



MASTER ANALYSE FONCTIONNELLE  
ESPACES DE SOBOLEV

Examen de rattrapage - 15 juillet 2021

Toutes les réponses doivent être justifiées

Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$  et soit  $f \in L^2(I)$ . On considère la formulation variationnelle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H^1(I) \text{ tel que} \\ \int_I u'v' dx + \lambda \left( \int_I u dx \right) \left( \int_I v dx \right) = \int_I f v dx \quad \forall v \in H^1(I), \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\lambda \geq 1$ .

**Partie I. 1.** Montrer que (1) admet une solution unique  $u$  et que cette solution vérifie

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(I)},$$

où  $C_1 > 0$  est une constante indépendante de  $\lambda$ .

Indication. On admettra qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\|v\|_{H^1(I)}^2 \leq C \left( \|v'\|_{L^2(I)}^2 + \left| \int_I v dx \right|^2 \right) \quad \forall v \in H^1(I).$$

**2.** Utilisant la formulation (1), montrer que

$$\int_I u dx = \frac{1}{\lambda|I|} \int_I f dx.$$

En déduire que  $u \in H^2(I)$  et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' = f - \frac{1}{|I|} \int_I f dx \quad \text{dans } I, \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{array} \right.$$

**Partie II.** On note  $u_\lambda$  la solution du problème (1). On définit l'espace

$$W = \left\{ v \in H^1(I) \mid \int_I v \, dx = 0 \right\}.$$

**1.** Montrer que  $W$  est un espace de Hilbert et que le problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } w \in W \text{ tel que} \\ \int_I w' v' \, dx = \int_I f v \, dx \quad \forall v \in W, \end{cases}$$

admet une solution unique.

**2.** Montrer que

$$\int_I (u'_\lambda - w') v' \, dx = 0 \quad \forall v \in W.$$

**3.** Vérifier que

$$z_\lambda = u_\lambda - w - \frac{1}{|I|} \int_I (u_\lambda - w) \in W$$

et que

$$\|z'_\lambda\|_{L^2(I)}^2 = \int_I (u'_\lambda - w') z'_\lambda \, dx = 0.$$

**4.** Dédurre de ce qui précède que

$$\lambda(u_\lambda - w) = \frac{1}{|I|^2} \int_I f \, dx$$

et que

$$\|u_\lambda - w\|_{H^1(I)} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^2(I)},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\lambda$ . Commenter.



MASTER ANALYSE FONCTIONNELLE  
ESPACES DE SOBOLEV

Corrigé de l'examen de rattrapage du 15 juillet 2021

Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$  et soit  $f \in L^2(I)$ . On considère la formulation variationnelle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H^1(I) \text{ tel que} \\ \int_I u'v' dx + \lambda \left( \int_I u dx \right) \left( \int_I v dx \right) = \int_I f v dx \quad \forall v \in H^1(I), \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\lambda \geq 1$ .

**Partie I. 1.** Posons pour  $u, v \in H^1(I)$

$$a(u, v) = \int_I u'v' dx + \lambda \left( \int_I u dx \right) \left( \int_I v dx \right).$$

La forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $H^1(I) \times H^1(I)$ . En effet

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_I |u'| |v'| dx + \lambda \left( \int_I |u| dx \right) \left( \int_I |v| dx \right) \\ &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \lambda \|u\|_{L^1(I)} \|v\|_{L^1(I)} \\ &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \lambda |I| \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \\ &\leq (1 + \lambda |I|) \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)} \quad \forall u, v \in H^1(I). \end{aligned}$$

D'autre part, prenant en compte l'inégalité

$$\|v\|_{H^1(I)}^2 \leq C \left( \|v'\|_{L^2(I)}^2 + \left| \int_I v dx \right|^2 \right) \quad \forall v \in H^1(I), \quad (2)$$

et le fait que  $\lambda \geq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \|v'\|_{L^2(I)}^2 + \lambda \left( \int_I v dx \right)^2 \geq \|v'\|_{L^2(I)}^2 + \left( \int_I v dx \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{C} \|v\|_{H^1(I)}^2 \quad \forall v \in H^1(I), \end{aligned}$$

montrant ainsi que la forme bilinéaire  $a$  est coercive sur  $H^1(I) \times H^1(I)$ . Finalement, il est clair que

$$|(f, v)| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \quad \forall v \in H^1(I).$$

Les conditions d'application du théorème de lax-Milgran étant satisfaites, nous déduisons que le problème (1) admet une solution unique  $u$  dans  $H^1(I)$ .

Prenant  $v = u$  dans la formulation variationnelle correspondante, on obtient

$$\frac{1}{C} \|u\|_{H^1(I)}^2 \leq a(u, u) = (f, u) \leq \|f\|_{L^2(I)} \|u\|_{L^2(I)} \|f\|_{L^2(I)} \|u\|_{H^1(I)}$$

et donc

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C \|f\|_{L^2(I)},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\lambda$ .

**2.** Choissant  $v = 1$  dans (1), on obtient

$$\lambda \left( \int_I u \, dx \right) \left( \int_I 1 \, dx \right) = \int_I f \, dx$$

ce qui est équivalent à

$$\int_I u \, dx = \frac{1}{\lambda|I|} \int_I f \, dx. \quad (3)$$

Utilisant (1) et (3), nous déduisons que

$$\begin{aligned} \int_I u'v' \, dx &= \int_I f v \, dx - \lambda \left( \int_I u \, dx \right) \left( \int_I v \, dx \right) \\ &= \int_I f v \, dx - \frac{1}{|I|} \int_I f \, dx \left( \int_I v \, dx \right) \\ &= \int_I g v \, dx \quad \forall v \in H^1(I). \end{aligned}$$

où  $g = f - \frac{1}{|I|} \int_I f \, dx$ . Ceci est, en particulier vrai, pour des fonctions test appartenant à  $C_c^1(I)$  et implique que la dérivée faible de  $u'$  est donnée par

$$u'' = (u')' = -g. \quad (4)$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des arguments classiques montrent que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2(I)} &\leq \|f\|_{L^2(I)} + \left\| \frac{1}{|I|} \int_I f \, dx \right\|_{L^2(I)} \\
&= \|f\|_{L^2(I)} + \frac{1}{|I|} \left| \int_I f \, dx \right| \|1\|_{L^2(I)} \\
&= \|f\|_{L^2(I)} + \frac{|I|^{\frac{1}{2}}}{|I|} \left| \int_I f \, dx \right| \\
&\leq \|f\|_{L^2(I)} + \frac{|I|}{|I|} \|f\|_{L^2(I)} = 2 \|f\|_{L^2(I)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent  $u'' \in L^2(I)$ , i.e.  $u \in H^2(I)$ . Utilisant la formule de Green dans (1) on obtient

$$\int_I -u'' v \, dx + u'(a)v(a) - u'(b)v(b) = \int_I g v \, dx \quad \forall v \in H^1(I)$$

et grâce à (4), on a

$$u'(a)v(a) - u'(b)v(b) = 0 \quad \forall v \in H^1(I).$$

Choisissant  $v$  tel que  $(v(a), v(b)) = (1, 0)$  et puis tel que  $(v(a), v(b)) = (0, 1)$ , il vient que

$$u'(a) = u'(b) = 0. \quad (5)$$

Ainsi, en combinant (4) et (5), nous déduisons que  $u$  est la solution faible du problème

$$\begin{cases} -u'' = g & \text{dans } I, \\ u'(a) = u'(b) = 0. \end{cases}$$

**Partie II.** On note  $u_\lambda$  la solution du problème (1). On définit l'espace

$$W = \left\{ v \in H^1(I) \mid \int_I v \, dx = 0 \right\}.$$

**1.** Il est facile de voir que  $W$  est fermé dans  $H^1(I)$ . Il est donc complet et c'est un espace de Hilbert. De plus, prenant en compte (2), il vient que

$$\|v\|_{H^1(I)}^2 \leq C \|v'\|_{L^2(I)}^2 \quad \forall v \in W.$$

Cette inégalité, combinée avec des arguments classiques, implique que les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram au problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } w \in W \text{ tel que} \\ \int_I w' v' \, dx = \int_I f v \, dx \quad \forall v \in W, \end{cases}$$

sont satisfaites et qu'il admet donc une solution unique.

**2.** Prenant en compte les formulations variationnelles associées à  $w$  et  $u_\lambda$ , on obtient facilement que

$$\begin{aligned}\int_I (u'_\lambda - w') v' dx &= -\lambda \left( \int_I u_\lambda dx \right) \left( \int_I v dx \right) \\ &= 0 \quad \forall v \in W.\end{aligned}$$

**3.** Vu que  $u_\lambda$  et  $w$  appartiennent à  $H^1(I)$ , et que n'importe quelle constante appartient aussi à  $H^1(I)$ , il est facile de voir que  $z_\lambda \in H^1(I)$ . De plus

$$\begin{aligned}\int_I z_\lambda dx &= \int_I \left( u_\lambda - w - \frac{1}{|I|} \int_I (u_\lambda - w) \right) dx \\ &= \int_I (u_\lambda - w) dx - \int_I \left( \frac{1}{|I|} \int_I (u_\lambda - w) dx \right) dx \\ &= \int_I (u_\lambda - w) dx - \left( \frac{1}{|I|} \int_I (u_\lambda - w) dx \right) \int_I 1 dx \\ &= \int_I (u_\lambda - w) dx - \int_I (u_\lambda - w) dx = 0,\end{aligned}$$

impliquant que  $z_\lambda \in W$ . Utilisant l'identité dans l'alinéa précédente, il vient que

$$\|z'_\lambda\|_{L^2(I)}^2 = \int_I z'_\lambda z'_\lambda dx = \int_I (u'_\lambda - w') z'_\lambda dx = 0.$$

**4.** Utilisant (2) et l'alinéa précédente, nous déduisons que

$$\|z_\lambda\|_{H^1(I)} = 0$$

et par conséquent  $z_\lambda = 0$ , i.e.

$$u_\lambda - w = \frac{1}{|I|} \int_I (u_\lambda - w) dx = \frac{1}{|I|} \int_I u_\lambda dx.$$

Prenant en compte (3), nous concluons que

$$\lambda (u_\lambda - w) = \frac{\lambda}{|I|} \int_I u_\lambda dx = \frac{1}{|I|^2} \int_I f dx$$

et

$$\begin{aligned}\lambda \|u_\lambda - w\|_{H^1(I)} &= \left\| \frac{1}{|I|^2} \int_I f \, dx \right\|_{H^1(I)} \\ &= \left\| \frac{1}{|I|^2} \int_I f \, dx \right\|_{L^2(I)} \\ &= \frac{|I|^{\frac{1}{2}}}{|I|^2} \left| \int_I f \, dx \right| \\ &\leq \frac{|I|}{|I|^2} \|f\|_{L^2(I)},\end{aligned}$$

et donc

$$\|u_\lambda - w\|_{H^1(I)} \leq \frac{1}{|I|\lambda} \|f\|_{L^2(I)}.$$

Ainsi

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|u_\lambda - w\|_{H^1(I)} = 0.$$