http://trithuctoan.blogspot.com/

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NỘI – AMSTERRDAM
TỔ TOÁN - TIN

ĐỀ THI HỌC KỲ II NĂM HỌC 2011 – 2012

Môn: ***Toán lớp 12***
Thời gian làm bài: ***150 phút.***

Bài 1: (2,5 điểm)

Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 4 \quad (C)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm tọa độ các cặp điểm nằm trên đồ thị (C) của hàm số biết rằng chúng đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Bài 2: (2,5 điểm)

a) Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $(d_1): x + y = 0;$ $(d_2): y = 8$ và đường cong $(C): y = x^3$.

Bài 3: (3 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxyz* cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$ và $(d_2): \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{4}$.

a) Chứng minh rằng (d_1), (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và song song với (d_2).

c) Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2).

Bài 4 : (2 điểm)

a) Giải bất phương trình: $\log_5\left(\frac{1}{4}.2^x + 1\right) + \log_{\frac{1}{5}}\left(4^x + 144\right) + 1 > 2\log_{\frac{1}{5}} 4.$

b) Tìm số phức z biết rằng z thỏa mãn điều kiện $|z - i - 2| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25.$

---------- Hết ----------

TRƯỜNG HÀ NỘI - AMSTERDAM
TỔ TOÁN – TIN

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC KỲ II NĂM HỌC 2011 – 2012
Môn Toán; Lớp 12

Bài 1: ***(2,5 điểm)***

a) $y = x^3 + 3x^2 - 4$

* Tập xác định: R.

* Sự biến thiên

- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm\infty$.

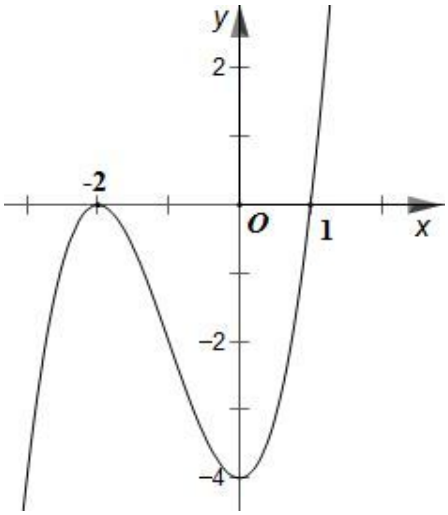
- Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(0;+\infty)$; hàm số nghịch biến trong khoảng $(-2;0)$. Hàm số có điểm đại là $(-2;0)$, cực tiểu là $(0;-4)$.

* Đồ thị:



- Nhận xét: đồ thị nhận điểm uốn $I(-1;-2)$ làm tâm đối xứng.

b) Gọi $A(x_0;y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 4$ (1).

Gọi B đối xứng với A qua O thì $B(-x_0;-y_0)$ với $x_0 \neq 0$.

Ta có $B \in (C) \Leftrightarrow -y_0 = -x_0^3 + 3x_0^2 - 4$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $6x_0^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Với $x_0 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Vậy hai cặp điểm $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ và $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Bài 2: ***(2,5 điểm)***

a) Đặt $x = \sin t$. Vì $x \in [0;1]$ nên $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $dx = \cos t dt$.

Đổi cận : Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$, với $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt$

$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $(d_1): x + y = 0$; $(d_2): y = 8$ và đường cong $(C): y = x^3$.

Ta có

+ (d_1) cắt (d_2) tại $A(-8;8)$.

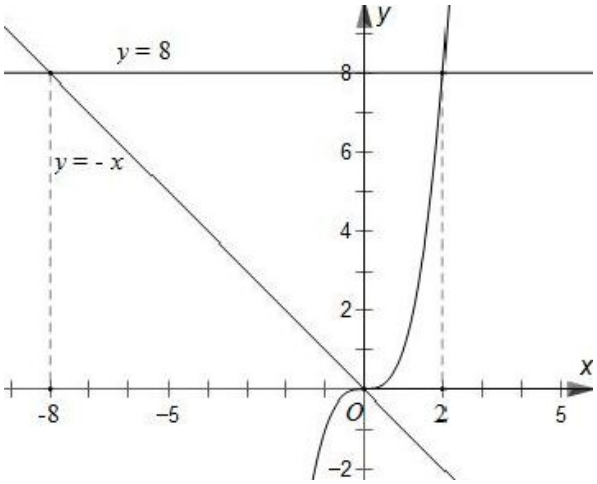
+ (d_1) cắt (C) tại $O(0;0)$.

+ (d_2) cắt (C) tại $B(2;8)$.

Vậy diện tích hình phẳng là :

$S = \frac{1}{2}.8.8 + \int_0^2 (8 - x^3)dx = 32 + \left(8x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2$

$= 32 + 12 = 44(dvdt)$



Bài 3: ***(3 điểm)***

a) * Ta có (d_1) đi qua $M(0;2;0)$ và có VTCP là $\overrightarrow{u_1} = (1;-2;1)$.

(d_2) đi qua $N(1;2;1)$ và có VTCP là $\overrightarrow{u_2} = (-2;1;4)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (1;0;1)$ và $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (-9;-6;-3) \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = -12 \neq 0$.

Do đó (d_1), (d_2) chéo nhau.

* Ta có $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Rightarrow (d_1),(d_2)$ vuông góc nhau.

b) Ta có mặt phẳng (P) đi qua M và nhận $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (-9;-6;-3) = -3(3;2;1)$ làm VTPT.

Do đó, phương trình mặt phẳng (P) là :

$$3(x-0)+2(y-2)+(z-0)=0 \text{ hay } 3x+2y+z-4=0.$$

c) Gọi $A(a;-2a+2;a)\in(d_1)$ và $B(-2b+1;b+2;4b+1)\in(d_2)$ từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}=(-a-2b+1;2a+b;-a+4b+1)$.

AB nhỏ nhất khi nó là đoạn vuông góc chung của $(d_1),(d_2)$. Khi đó:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-2b+1-2(2a+b)-a+4b+1=0\\ -2(-a-2b+1)+(2a+b)+4(-a+4b+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6a+2=0\\ 21b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\Rightarrow A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)\\ b=-\dfrac{2}{21}\Rightarrow B\left(\dfrac{25}{21};\dfrac{40}{21};\dfrac{13}{21}\right)\end{cases}$$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(\dfrac{16}{21};\dfrac{34}{21};\dfrac{10}{21}\right),R=\dfrac{\sqrt{9^2+6^2+3^2}}{21}=\dfrac{\sqrt{126}}{21}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):\left(x-\dfrac{16}{21}\right)^2+\left(y-\dfrac{34}{21}\right)^2+\left(z-\dfrac{10}{21}\right)^2=\dfrac{126}{441}$.

Bài 4 *: (2 điểm)*

a) Ta có

$$\log_5\left(\frac{1}{4}.2^x+1\right)+\log_{\frac{1}{5}}\left(4^x+144\right)+1>2\log_{\frac{1}{5}}4.$$

$$\Leftrightarrow\log_5\left(\frac{1}{4}.2^x+1\right)+\log_5 16+\log_5 5>\log_5\left(4^x+144\right)$$

$$\Leftrightarrow 80\left(\frac{1}{4}2^x+1\right)>4^x+144\Leftrightarrow 4^x-20.2^x+64<0\Leftrightarrow 4<2^x<16\Leftrightarrow 2<x<4.$$

b) Gọi $z=x+yi$. Ta có : $|z-i-2|=\sqrt{10}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=10\ \ (1)$.

Ta có $z.\overline{z}=25\Leftrightarrow x^2+y^2=25\ \ (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $(x;y)=(3;4)$ hoặc $(5;0)$.

Vậy $z=3+4i$ hoặc $z=5+0i$.

---------- **Hết** ----------