

An aerial photograph of the Hoover Dam, a massive concrete structure spanning a deep canyon. The dam is surrounded by steep, rocky cliffs. Two large concrete arch bridges are visible, one on each side of the dam, connecting the canyon walls. The water in the reservoir is a vibrant blue. The title 'CONCRETO ARMADO' is prominently displayed in large, white, bold letters across the lower half of the image. Below it, the subtitle 'Comportamiento y Diseño' is written in a smaller, white, italicized font. The authors' names, 'Luis B. Fargier Gabaldón' and 'Luis E. Fargier Suárez', are listed at the bottom in a small, white font.

CONCRETO ARMADO

Comportamiento y Diseño

Luis B. Fargier Gabaldón
Luis E. Fargier Suárez

The background of the entire page is covered with a dense, random pattern of small, light gray triangles. These triangles are oriented in various directions, creating a textured, starry effect.

Concreto Armado

Comportamiento y Diseño

Concreto Armado

Comportamiento y Diseño

Luis B. Fargier Gabaldón

Luis E. Fargier Suarez

**"Civil Engineering is the art of directing the great sources of
Power in Nature for the use and convenience of man"**

**"La Ingeniería Civil es el arte de dirigir las fuentes de Poder de la
Naturaleza para el uso y conveniencia del hombre"**

Thomas Telford

Mérida-Venezuela

Fargier Gabaldon, Luis B.

Fargier Suarez, Luis E.

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN: 978-980-12-4158-4

Diseño de portada: Gustavo León Valeri.

Foto portada y contraportada: Hoover Dam Bypass (Cortesía del Federal Highway Administration)

Concreto Armado Comportamiento y Diseño.

Copyright © 2010 por Luis B. Fargier Gabaldón. Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del autor.

Nota: Los autores han hecho el mejor esfuerzo para preparar este libro. Sin embargo, no asumen ningún tipo de responsabilidad derivada de la utilización de la información presentada en esta obra. Los autores quedan exentos de cualquier responsabilidad legal que resulte del uso de este libro.

Publicado por Luis B. Fargier Gabaldon.

**C.C. Cantaclaro. Oficina MZB-06. Mérida. Edo Mérida.
Venezuela. Código postal: 5101.**

Impreso en los Estados Unidos de América

Este libro es dedicado a la memoria de mis abuelos,

María Eugenia y Luis Enrique

CAPITULO 1: CONCRETO Y ACERO

- 1.1 PROPIEDADES, 1
 - a) Resistencia a la compresión, 1
 - b) Módulo de elasticidad (E_c), 3
 - c) Resistencia a la tracción (f_{tr}), 3
 - d) Tracción por flexión, 4
 - e) Relación de poisson, 4
 - f) Esfuerzo cortante (v_c), 4
 - g) Fluencia lenta, 4
 - h) Retracción, 5
 - i) Cambio de temperatura, 6
 - j) Peso unitario, 6
- 1.2 ACERO DE REFUERZO, 6
- 1.3 ACERO DE TENSADO, 8

CAPITULO 2: CONCRETO ARMADO

- 2.1 RESUMEN HISTÓRICO, 9
- 2.2 GENERALIDADES, 10
- 2.3 UBICACIÓN DE LA ARMADURA, 11
 - a) Armadura principal, 11
 - b) Armadura transversal, 11
 - c) Armadura de repartición, 11
- 2.4 PORCENTAJE O CUANTÍA DE ACERO, 11
- 2.5 RECUBRIMIENTO (rec), 12
- 2.6 VENTAJAS Y DESVENTAJAS QUE OFRECE EL CONCRETO ARMADO, 12
 - a) Ventajas, 12
 - b) Desventajas, 13
- 2.7 CARGAS SOBRE LAS ESTRUCTURAS, 13
 - a) Cargas permanentes, 13
 - b) Cargas variables, 13
 - c) Cargas ambientales, 13
- 2.8 REQUISITOS DEL CONCRETO ARMADO, 14
- 2.9 DISEÑO, 15
 - a) Diseño por esfuerzos de trabajo (diseño por línea recta, esfuerzos admisibles), 15
 - b) Diseño por estados últimos (diseño a la rotura), 15

CAPITULO 3: COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN

- 3.1 ENSAYOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO, 17
- 3.2 CAPACIDAD DE ROTACIÓN EN ARTICULACIONES (CARGA CONCENTRADA EN EL CONCRETO), 21

CAPITULO 4: MÉTODO DE LOS ESFUERZOS ADMISIBLES

- 4.1 INTRODUCCIÓN, 23
- 4.2 HIPÓTESIS, 23
- 4.3 SECCIÓN TRANSFORMADA, 25
 - a) Caso general, 26
 - b) Ecuaciones de equilibrio, 27
 - c) Eje neutro, 27

- d) Aplicaciones del método de la línea recta, 28
- 4.4 SECCIONES USUALES, 30
 - a) Sección no agrietada de concreto (sin acero), 30
 - b) Sección no agrietada de concreto y acero, 30
 - c) Sección agrietada de concreto y acero, 31
 - d) Momentos y esfuerzos, 32

CAPITULO 5: FLEXIÓN-ROTURA

- 5.1 HIPÓTESIS, 43
- 5.2 DEFORMACIÓN EN EL CONCRETO Y ACERO EN EL INSTANTE DE FALLA, 43
- 5.3 FACTORES DE SEGURIDAD, 43
- 5.4 SOLICITACIONES, 44
- 5.5 DIAGRAMA RECTANGULAR DE COMPRESIONES, 45
 - a) Valor de β_1 , 46
- 5.6 FALLA BALANCEADA, 46
- 5.7 FALLA POR TRACCIÓN, 48
- 5.8 FALLA POR COMPRESIÓN, 49
- 5.9 SECCIONES RECTANGULARES, 49
- 5.10 REVISIÓN DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO, 49
- 5.11 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DEL EJEMPLO 5.3 AL 5.8, 55
- 5.12 EL FACTOR DE MINORACIÓN DE RESISTENCIA ϕ , 56
- 5.13 EL PARÁMETRO ζ , 56
 - a) Caso general de sección comprimida de cualquier forma, 56
 - b) Caso particular de sección comprimida rectangular, 57
 - c) Relación entre ζ y ϵ_s para secciones rectangulares, 57
- 5.14 DISEÑO CON ARMADURA SENCILLA, 58
- 5.15 SECCIONES RECTANGULARES. SIMPLIFICACIONES, 63
- 5.16 CASO PARTICULAR. MIEMBROS CON $f'_c < 280 \text{ kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, $\zeta = 0.50$, 66
- 5.17 DISEÑO CON ARMADURA DOBLE, 67
 - a) Área comprimida de concreto A_c , 67
 - b) Ecuaciones sin descontar vacíos, 68

CAPITULO 6: COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO A FLEXOCOMPRESIÓN Y A COMPRESIÓN AXIAL

- 6.1 COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO, 93
 - a) Compresión uniaxial, 93
 - b) Flexocompresión, 93
 - c) Microgrietas, 94
 - d) Compresión triaxial, 95
- 6.2 COMPORTAMIENTO DE COLUMNAS BAJO CARGA AXIAL, 95
 - a) Columnas con estribos, 95
 - b) Columnas zunchadas, 97
- 6.3 ESTRIBOS vs. ESPIRAL (O ZUNCHO), 98

CAPITULO 7: COLUMNAS

- 7.1 DEFINICIÓN, 99
- 7.2 TIPOS DE COLUMNAS DE CONCRETO, 99
- 7.3 ARMADURA, 100
 - a) Tipos de armadura, 100
 - b) Porcentajes de acero, 100
- 7.4 ECUACIONES DE EQUILIBRIO, 100
- 7.5 DIAGRAMA P_u vs. e , 101

- 7.6 TIPOS DE FALLAS, 102
 - a) Fallas por tracción, 102
 - b) Fallas por compresión, 102
- 7.7 DIAGRAMA DE INTERACCIÓN \bar{M}_u vs. \bar{P}_u , 103
- 7.8 COLUMNAS RECTANGULARES, 104
 - a) Valor de a o de c , 104
 - b) Acero únicamente en bordes, 105
 - c) Área de refuerzo requerida en el caso de acero únicamente en los bordes, 105
 - d) Acero transversal de confinamiento, 106
- 7.9 COLUMNAS CIRCULARES, 119
 - a) Acero transversal de confinamiento (zunchos), 121
- 7.10 COLUMNAS OCTOGONALES, 125
- 7.11 COLUMNAS CON DOBLE EXCENTRICIDAD, 126
 - a) Generalidades, 126
 - b) Volúmenes de interacción de $M - P$, 127
 - c) Ecuaciones de equilibrio, 128
 - d) Método de la excentricidad equivalente, 128
 - e) Método Parme, Nieves y Gouwens, 130
 - f) Método Bresler, 130
 - g) Método Meek, 130
 - h) Método Albert Gouwens para el cálculo de β , 131
- 7.12 COLUMNAS ESBELTAS, 134
 - a) Esbeltez, 134
 - b) Valor de δ , 136
 - c) Valor de $P_{crítico}$ (Euler), 137
 - d) Longitud efectiva, 137
 - e) Valor de $L_e = k \cdot L_u$, 138
 - f) Columnas que requieren corrección por esbeltez, 140
 - g) Simplificaciones, 140
- 7.13 DISPOSICIONES DE SEGURIDAD PARA COLUMNAS, 146

CAPITULO 8: CORTE

- 8.1 DEFINICIÓN, 147
- 8.2 CORTE POR FLEXIÓN EN VIGAS NO AGRIETADAS, 147
- 8.3 CORTE POR FLEXIÓN EN VIGAS AGRIETADAS, 149
- 8.4 COMPORTAMIENTO DE VIGAS SIN REFUERZO TRANSVERSAL, 150
 - a) Mecanismo resistente después del agrietamiento inicial, 151
 - b) Corte que resiste el concreto, 152
- 8.5 COMPORTAMIENTO DE VIGAS CON REFUERZO TRANSVERSAL, 154
 - a) Analogía de una viga de concreto armada con una cercha, 155
 - b) Corte resistido por estribos o barras dobladas, 156
- 8.6 DISEÑO DE ESTRIBOS, 157
 - a) Zona no sísmica, sección crítica, 157
 - b) En zona sísmica, 158
- 8.7 CORTE EN LOSAS, 160
 - a) Losas apoyadas en vigas, 160
 - b) Losas sobre columnas (zapatas de fundación), 160
- 8.8 MÉTODO DE DISEÑO DE CORTANTE POR FRICCIÓN, 175

CAPITULO 9: ADHERENCIA

- 9.1 DEFINICIÓN, 179
- 9.2 ENSAYOS PARA ESTUDIAR LA ADHERENCIA ENTRE EL CONCRETO Y EL ACERO, 179
 - a) Ensayo de extracción de barras de cilindros de concreto, 179
 - b) Ensayos de Goto, 180

- c) Ensayos de Untrauer y Warren, 181
- 9.3 ADHERENCIA POR ANCLAJE, 182
- 9.4 ADHERENCIA POR FLEXIÓN, 182
 - a) Viga a flexión pura bajo dos cargas P , 183
- 9.5 LONGITUD DE DESARROLLO L_d A PARTIR DE UNA SECCIÓN $T = A_s \cdot F_y$, 183
- 9.6 LONGITUD DE DESARROLLO EN APOYOS SIMPLES O PUNTOS DE INFLEXIÓN EN ZONAS DE MOMENTO POSITIVO, 186
- 9.7 LONGITUD DE DESARROLLO PARA BARRAS CON GANCHOS L_{dh} , 187
- 9.8 LONGITUD DE DESARROLLO PARA BARRAS EN COMPRESIÓN L_{dc} , 188
- 9.9 EMPALMES O EMPATES DE BARRAS, 188
- 9.10 RESUMEN LONGITUDES DE DESARROLLO RECOMENDADAS, 188
- 9.11 DETALLES DE OBLIGATORIO CUMPLIMIENTO PARA EL DESPIECE, 188
- 9.12 MOMENTOS MÁXIMOS EN VIGAS CONTINUAS Y EL DESPIECE, 189

CAPITULO 10: TORSIÓN

- 10.1 TORSIÓN PURA, 191
- 10.2 COMPORTAMIENTO A TORSIÓN, 192
 - a) Torsión pura – concreto sin armadura, 192
 - b) Teoría elástica de la torsión, 193
 - c) Teoría plástica de la torsión, 195
 - d) Torsión en concreto armado, 197
 - e) Torsión y flexión en concreto armado, 197
- 10.3 DISEÑO POR TORSIÓN, 198
 - a) Estribos requeridos por torsión, 199
 - b) Acero longitudinal requerido por torsión, 200
 - c) Sección crítica para el cálculo del refuerzo a torsión, 201
 - d) Máximo torque permisible, 201
 - e) Armadura mínima por torsión, 201
- 10.4 TORSIÓN POR EQUILIBRIO, 201
- 10.5 TORSIÓN POR COMPATIBILIDAD, 201

CAPITULO 11: MODELOS DE PUNTAL Y TIRANTE

- 11.1 ZONAS DISCONTINUAS, 207
- 11.2 RESISTENCIA A COMPRESIÓN DE LOS PUNTALES, 209
- 11.3 RESISTENCIA DE LAS ZONAS NODALES, 210
- 11.4 RESISTENCIA DE LOS TENSORES, 210
- 11.5 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO RECOMENDADO, 210

CAPITULO 12: LOSAS

- 12.1 LOSAS ARMADAS EN UN SENTIDO, 219
- 12.2 LOSAS MACIZAS, 219
 - a) Espesores mínimos, 219
 - b) Acero principal, 219
 - c) Acero de repartición, 219
 - d) Cargas permanentes, 220
 - e) Carga variable, 220
 - f) Carga última, 220
 - g) Valores últimos, 220
- 12.3 LOSAS NERVADAS, 221
 - a) Dimensiones, 221
 - b) Cargas permanentes, 221
 - c) Sobrecarga, 221
 - d) Cargas por nervio, 222

- e) Macizado por corte, 222
- f) Longitud de macizado, 223
- g) Sección resistente, 223
- h) Cortes y momentos en losas y vigas contiguas, 223
- 12.4 LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES SOBRE VIGAS RIGIDAS, 231
 - a) Distribución de cargas, 231
 - b) Valores aproximados de w_x y de w_y , 231
 - c) Valores de μ , 232
 - d) Valores de los momentos, 232
 - e) Momentos de diseño, 233
 - f) Torsión, 233
 - g) Dimensionamiento, 235
 - h) Alturas útiles, 235

CAPITULO 13: PÓRTICOS

- 13.1 CARGAS PERMANENTES, 241
- 13.2 VIGAS, 241
 - a) Dimensiones, 242
 - b) Predimensionado en zonas sísmicas, 242
 - c) Acero, 242
 - d) Estribos, 242
 - e) Cargas sobre las vigas, 242
- 13.3 COLUMNAS, 243
 - a) Dimensiones, 243
- 13.4 PREDIMENSIONADO DE COLUMNAS, 244
 - a) Área total de columnas en una planta, 244
 - b) Área de una columna, 244
 - c) Valores de P_u para el predimensionado, 244
- 13.5 JUNTAS VIGA-COLUMNA, 247
 - a) Criterios de diseño, 247
 - b) Modos de falla, 247
 - c) Fuerzas de diseño, 247
 - d) Mecanismos de resistencia al corte de la junta, 248
 - e) Refuerzo transversal en la junta, 248
 - f) Resistencia de la junta, 248
 - g) Mínima resistencia a flexión de las columnas, 249

CAPITULO 14: OBRAS VIALES

- 14.1 VIGAS COMPUESTAS, 257
 - a) Comportamiento, 257
- 14.2 VIGAS COMPUESTAS DE LOSAS SOBRE PERFILES DE ACERO ESTRUCTURAL, 258
 - a) Sección transformada, 258
 - b) Construcción con apuntalamiento, 258
 - c) Construcción sin apuntalamiento, 258
- 14.3 CALCULO A LA ROTURA EN VIGAS COMPUESTAS, 263
- 14.4 CONECTORES DE CORTE EN U, 264
 - a) Dimensiones, 264
 - b) Cálculo, 264
 - c) Comprobación de los conectores por el método de rotura, 264
- 14.5 MURO DE SOSTENIMIENTO, 267

CAPITULO 15: CONCRETO PRE-ESFORZADO

- 15.1 VENTAJAS DE LAS VIGAS PRE-ESFORZADAS, 275
- 15.2 DESVENTAJAS DE LAS VIGAS PRE-ESFORZADAS, 275
- 15.3 PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE TENSADO, 275
 - a) Pérdidas Instantáneas, 275
 - b) Pérdidas Diferidas, 280
- 15.4 DISEÑO DE SECCIONES SIN PERMITIR TRACCIONES EN EL CONCRETO, 285
 - a) Núcleo de sección, 285
 - b) Estimación preliminar de la fuerza de tensado, 285
 - c) Estimación preliminar de la excentricidad y área de la sección requerida al instante de la transferencia, 286
 - d) Estimación preliminar del área de la sección requerida bajo condiciones de servicio, 287
- 15.5 DISEÑO DE SECCIONES DE CONCRETO PRETENSADO ADMITIENDO TRACCIONES EN EL CONCRETO, 290
 - a) Estimación preliminar de la excentricidad y área de la sección requerida al instante de la transferencia, 290
 - b) Estimación preliminar de la fuerza de tensado y área de la sección requerida en condiciones de servicio, 291
- 15.6 SECCIONES COMPUESTAS, 292
- 15.7 MOMENTO DE AGRIETAMIENTO Y RESISTENCIA ÚLTIMA DE VIGAS PRE-ESFORZADAS, 297
 - a) Momento de agrietamiento, 297
 - b) Resistencia última de vigas pre-esforzadas con cables adheridos, 297
- 15.8 TRAYECTORIA DE LOS CABLES, 298
- 15.9 REFUERZO TRANSVERSAL PARA CONTROLAR EL AGRIETAMIENTO EN LOS EXTREMOS DE LA VIGA Y EN ZONAS DONDE EMPIEZAN/TERMINAN LAS MANGUERAS, 299
- 15.10 DEFLEXIONES EN VIGAS PRE-ESFORZADAS, 300
- 15.11 DISEÑO DE VIGAS PRE-ESFORZADAS POR CORTE, 304

CAPITULO 16: ANÁLISIS AL LÍMITE

- 16.1 INTRODUCCIÓN, 313
 - a) Limitantes del procedimiento de análisis al límite, 313
- 16.2 ANÁLISIS DE LOSAS POR LÍNEAS DE FLUENCIA, 321

CAPITULO 17: MUROS DE CORTE EN EDIFICIOS SISMO-RESISTENTES

- 17.1 INTRODUCCIÓN, 329
- 17.2 DISEÑO POR FLEXO-COMPRESIÓN Y CORTE, 329
- 17.3 ELEMENTOS DE BORDE, 330
- 17.4 EL VALOR DE δ_u , 332

CAPITULO 18: DIAGRAMAS DE MOMENTO-CURVATURA

- 18.1 INTRODUCCIÓN, 341
- 18.2 MODELO DE HOGNESTAD, 341
- 18.3 MODELO DE ACERO DE REFUERZO, 342
- 18.4 CONSTRUCCIÓN DE LA RELACIÓN DE MOMENTO CURVATURA, 343
- 18.5 ANÁLISIS NO-LINEAL DE PÓRTICOS, 344

REFERENCIAS, 349

APÉNDICE A: TABLAS PARA EL DISEÑO DE VIGAS, 357

APÉNDICE B: COLUMNAS Y DIAGRAMAS DE INTERACCIONES ADIMENSIONALES, 375

APÉNDICE C: AYUDAS PARA EL DISEÑO DE LOSAS, 385

APÉNDICE D: AYUDAS PARA EL DISEÑO DE FUNDACIONES, 391

APÉNDICE E: ÁREAS DE ACERO, 395

APÉNDICE F: LONGITUDES DE DESARROLLO DE ACUERDO AL ACI 318-08, 401

APÉNDICE G: DESPIECES TIPO: ESCALERA, TANQUE, COLUMNAS, NERVIOS y
VIGAS, 405

APÉNDICE H: DOSIFICACIONES DEL CONCRETO, TIEMPOS DE CURADO Y
DESENCOFRADO, 411

APÉNDICE I: SOBRECARGAS USUALES Y ANCHOS DE GRIETAS MÁXIMOS
RECOMENDABLES, 413



Coliseo Romano construido en el siglo I.
Cortesía de Luis B. Fargier G.

PRÓLOGO

Soy egresado de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de los Andes, con más de cincuenta años de ejercicio profesional, basados en las enseñanzas del Dr. Luis Enrique Fargier Suarez en su cátedra de Concreto Armado. De esas explicaciones magistrales, de su problemario y posteriormente de un pequeño tratado bautizado con el título de "*Concreto Armado*", fuimos muchos los ingenieros que logramos encarar los proyectos estructurales, puentes y edificios construidos con ese material.

Hoy, su nieto Luis Bernardo Fargier Gabaldon, heredero de la vocación docente de su abuelo, me ha sorprendido pidiéndome que le prologue un libro titulado "*Concreto Armado: Comportamiento y Diseño*", fruto de sus estudios e investigaciones, adelantadas en la Universidad de los Andes y en la Universidad de Michigan, lugar donde obtuvo su grado de Ph.D.

Evidentemente, la profunda formación académica del joven profesional, su ejercicio como ingeniero proyectista y su vocación para la enseñanza le han permitido presentar un tratado de concreto armado donde incorpora su vasto conocimiento a los principios generales que fueron vertidos por mi antiguo profesor en las primeras publicaciones de hace más de cincuenta años.

El estudioso que utilice este texto, se encontrará con temas poco tratados en otros libros sobre la materia, como son la retracción y la fluencia lenta (creep), su evolución en el tiempo y sus consecuencias que pueden inhabilitar las estructuras por agrietamiento de sus paredes o puede mejorar la continuidad al forzar los prefabricados a deformarse lentamente en conjunto, redistribuyendo los esfuerzos para descargar las partes individuales que formaron inicialmente la estructura, como sería el caso de las vigas compuestas, producto de dos vaciados desfasados en el tiempo que tratan de convergir hacia un comportamiento monolítico. Estos efectos de fluencia lenta y los de retracción se reflejan en aquellas estructuras mixtas, de acero y hormigón, donde el primero se opone tenazmente a ser acortado por el concreto que se encoge, tendiendo a agrietarlo, lo cual establece las cuantías mínimas y máximas en columnas reforzadas. Cuantía máxima que deja de serlo, en el diseño de las vigas mixtas, tratadas en el Capítulo 14, que sufren los rigores de la retracción contra los conectores de corte, y la fluencia lenta que minimiza la importancia de la losa de compresión. Igualmente, podrá asegurar la permanencia en el tiempo contra la agresividad del medio, diseñando el armado para que el tamaño de las grietas asegure la protección del acero.

Temas que tradicionalmente solo aparecían en los tratados de Elasticidad y Plasticidad, como son la analogía de la membrana y la analogía del pilón de arena, se incorporan en el Capítulo número diez, para establecer el análisis por torsión.

En esta era de la computación, en la cual el cálculo de las estructuras se hace por programas de Elementos Finitos, llegando a precisiones inusitadas, más reflejo del modelo matemático que del comportamiento del material, se corre el riesgo de situarse en la zona insegura. La norma que guía el cálculo ha sentido el peligro y ha incorporado a ese análisis microscópico, métodos globales más acordes con la seguridad que con la precisión. En este libro, el método de Puntal y el Tirante, que el ACI validó a principio de este siglo, se incorpora en el Capítulo 11 y le permitirá al lector resolver algunas estructuras especiales como serían las vigas altas o profundas, ménsulas, y una serie de elementos irregulares así como los bloques de anclaje de las vigas pre-esforzadas que se tratan en el Capítulo 15.

El libro no solo es un manual de consulta, ha sido elaborado con la intención de que el estudiante de pregrado tenga una gran variedad de ejercicios para adiestrarse; cada capítulo tiene ejemplos que lo guiarán por los distintos temas. Pero también está pensado como un auxiliar del diseño y en tal sentido ha incorporado varios Apéndices que sirven de ayuda para el diseño que bien podrán ser utilizados por los ingenieros en sus labores de pre-dimensionado y cálculo definitivo.

Al hojear este libro, he observado la gran cantidad de gráficos, especialmente diseñados para transmitir al lector el concepto de la lectura, en un afán de facilitar su comprensión a costa de un trabajo tenaz del autor, que posiblemente refleja la búsqueda de lo que él mismo persiguió en los textos de su época de estudiante.

Finalmente, todos sabemos que la mejor manera de aprender es enseñando, y al proponerse el autor a desarrollar un libro que toca aspectos tan variados e importantes, su mayor recompensa ya la está obteniendo

al ir atesorando todas esas búsquedas e investigaciones. Conocimiento que no agota la materia, pues cada avance hace surgir nuevas interrogantes que seguirán martillando nuestro cerebro para responderlas.

De lo que estamos conscientes es que vivimos en un mundo de aproximaciones, donde profesores, estudiantes y egresados tratamos de comprender el problema sin desprendernos de nuestro raciocinio. Encaremos así este libro como la mejor aproximación perfectible.

Rosendo Camargo Mora

Profesor de la Universidad de los Andes

La historia de este libro es bien particular. Sus orígenes nos llevan a los años cincuenta cuando Luis Enrique Fargier Suarez escribe *Apuntes de Concreto* para el curso que dictaba en la Universidad de los Andes, en Mérida, Venezuela. Los actualizaba con la frecuencia que lo hacía el código ACI-318 y fueron complementados con la aparición de un problemario en años posteriores. A mediados de los 70 las publicaciones tomaban el matiz de un libro con aplicaciones prácticas sobre el diseño y comportamiento del concreto armado bajo flexión, flexo-compresión, adherencia, corte y torsión. Aparece a fines de los 80 el libro *Concreto Armado*, que incluye teoría, ejemplos, ayudas de diseño en forma de tablas, gráficos y programas de computación. Esta edición fue culminada meses antes y publicada meses después de la desaparición física de Luis Enrique en 1988.

A fines de los 90 Luis Felipe Fargier Delgado transcribió gran parte del texto de *Concreto Armado* a un procesador de palabras y me sugirió reeditar en un futuro. Tal vez un poco impaciente en el 2001 y recién graduado, hice un primer intento, pero en el camino me convencí que era muy temprano. Hace dos años, y profesionalmente más maduro, me entusiasmé a revisar nuevamente el libro escrito por mi abuelo y rescatado por mi tío. Inicialmente retocaba, actualizaba y diagramaba los capítulos. Más adelante decidí ampliarlos e introducir cambios que creí convenientes, respetando el estilo y enfoque práctico del manuscrito original,

- Los capítulos de Flexión-Rotura (5) y Torsión (10) fueron casi reescritos por completo.
- Modificaciones importantes se hicieron a los capítulos del Método de los Esfuerzos Admisibles (4) y al de Adherencia (9).
- Cambios apreciables a: Concreto Armado (2), Columnas (7), Corte (8) y Obras Viales (14).
- Los capítulos de Concreto y Acero (1), Comportamiento a Flexión (3), Comportamiento a Compresión y Flexo-Compresión (6), Losas (12) y Pórticos (13) fueron actualizados con modificaciones menores.

En este segundo intento escribí nuevos capítulos,

- Modelos de Puntal y Tirante (Capítulo 11), Pre-Esforzado (15), Análisis al Límite (16), Muros de Corte en Edificios Sismo-Resistentes (17) y el de Diagramas de Momento-Curvatura (18),
- Las ayudas de diseño disponibles en la publicación original de *Concreto Armado* se complementaron con nuevas y se presentan en forma de apéndices que en total suman nueve. Se actualizaron las tablas para el diseño de vigas y losas e incluyen ayudas para el diseño de pórticos y fundaciones, despieces típicos de vigas, escaleras y tanques de agua y diagramas de interacción adimensionales para el diseño de columnas con sus detalles típicos en el Apéndice B.

En meses pasados empecé a editar y compaginar el manuscrito y pensé en combinar todos los capítulos en un nuevo libro que aquí se presenta. Espero sea útil a estudiantes y profesionales interesados en el diseño de estructuras. Puede servir como texto en cursos de pregrado y de apoyo para los de postgrado. Su contenido se nutre principalmente de experiencias en el ejercicio de la profesión, resultados de ensayos experimentales publicados en revistas científicas, procedimientos y detalles recomendados por el ACI-318-08 y en los principios de estática y resistencia de materiales. Muchos ejemplos incluidos en el manuscrito son adaptados de estructuras diseñadas por los autores. Reconozco con humildad que la información aquí presentada es un grano de arena si se compara con la que se maneja en un proyecto de ingeniería, donde siempre intervendrán aspectos económicos, sociales, ambientales y políticos, todos de suma importancia, con los que tiene que lidiar el proyectista además de muchos otros técnicos que están fuera del alcance del libro.

Creo es oportuno hacer una pausa y aprovechar estas líneas para orientar a los lectores sobre el alcance del libro en el diseño estructural y así llamar la atención a la forma en que actualmente son administrados muchos proyectos. El avance de la computación, la aparición de técnicas sofisticadas de análisis estructural, la alta velocidad con que se mueve la economía en las sociedades modernas y los bajos honorarios profesionales que demoran eternidades en hacerse efectivos, se reflejan en la subcontratación del proyectista. Este recibe una estructura con dimensiones preestablecidas por otros profesionales, calcula las cargas actuantes, introduce estos datos a un computador que los procesa con los más recientes programas de análisis y códigos de diseño, le facilita los resultados a un dibujante y entrega áreas de acero y separaciones de estribos. Con suerte tiene oportunidad de que le aprueben aumentar las dimensiones de algunas columnas. Esta dinámica de trabajo

produce proyectos que si bien cumplen las normas impuestas por los códigos, podrían ser valorados por la profesión como aceptables en algunos casos, rara vez buenos, a veces peligrosos y sería muy difícil pensar que produce las mejores soluciones donde es posible minimizar costos y maximizar seguridad y funcionalidad luego de una aguda y honesta valoración por parte del proyectista a la importancia y posible destino de la futura estructura.

En condiciones ideales, que deben ser el norte de la profesión, el proyectista estructural dispondrá de libertad y justa (buena) remuneración para trabajar en lo que considero son tres etapas inter-dependientes, enumeradas en orden de importancia: **1) configuración o estudio mental de la estructura, 2) detallado de los elementos y 3) análisis estructural.** Una revisión de duraciones en la elaboración de proyectos usuales en los que he participado sugieren que la mayor cantidad de tiempo se dedica a lo segundo, bastante a lo primero y menos a lo tercero. Estas tres etapas, todas necesarias en el proyecto, merecen los siguientes comentarios,

- 1) El primer y más importante paso en la etapa de configuración es visualizar la deformada de la edificación en su conjunto bajo los estados de carga que el proyectista crea probables y estimar sus órdenes de magnitud con cálculos simples. El segundo es el conocimiento de los métodos constructivos disponibles y sus costos. En esta etapa se define el sistema estructural, las dimensiones y ubicación de las vigas, columnas, escaleras, muros, fundaciones etc. Requiere de mucha creatividad y casi siempre es acompañada de numerosas restricciones arquitectónicas, constructivas y económicas. Lo más importante es identificar las rutas más rígidas que serán las preferidas por las fuerzas para recorrer la estructura. Estas deben ser continuas y claras hasta encontrar los vínculos a tierra. El proyectista las puede idear si dispone de libertad, por ejemplo, al incorporar muros de corte a una estructura aporticada para resistir fuerzas sísmicas. Siempre recordar que se proyecta para construir y se construye para crear bienestar en la sociedad.
- 2) Observaciones del comportamiento de estructuras frente a terremotos, ataques terroristas y sobrecargas en los últimos años indican que los detalles las protegen del colapso. Son responsabilidad conjunta del proyectista y del constructor. El diseñador debe garantizar detalles claros en los planos, de fácil, y en la medida de lo posible rápida ejecución en campo, con espacio suficiente para permitir el vaciado y vibrado del concreto en forma cómoda. Esto no es fácil lograrlo: requiere tiempo, dedicación y experiencia. El profesional que en obra se encuentra debe asegurarse que los detalles especificados en los planos sean reproducidos en los miembros. Especial atención merecen la correcta colocación de estribos y el acero de continuidad en vigas. Los estribos o ligaduras tienen como principal función confinar al concreto y resistir el corte. Se deben colocar a separaciones pequeñas, con el gancho anclado dentro del núcleo de la sección transversal. El acero de continuidad protege contra los colapsos progresivos y se logra al pasar por el tramo, es decir, entre columnas adyacentes, al menos dos cabillas continuas en la parte inferior de la viga y anclarlas dentro del nodo común viga-columna. Los requerimientos de los códigos deben ser interpretados como los mínimos necesarios.
- 3) Los resultados del análisis estructural deben servir para confirmar o alertar sobre los órdenes de magnitud que se usaron durante la configuración estructural y afinar la visión del proyectista sobre el comportamiento y la elástica de la edificación. Sin embargo, los campos reales de esfuerzos que sentirá la estructura dependen de muchas variables y en mayor grado de su geometría, las dimensiones y rigidez de sus miembros, el nivel de agrietamiento sufrido y el proceso constructivo adoptado. Otras que no son constantes en el tiempo como la historia y magnitud de cargas, retracción, cambios de temperatura, fluencia lenta, calidad del concreto y los asentamientos de las fundaciones, a veces influyen de manera significativa en el comportamiento de la edificación. Reproducir milimétricamente lo antes expuesto por medio de un análisis estructural es imposible antes de construida la estructura y por fortuna innecesario para proyectar las edificaciones usuales seguras, funcionales y económicas que el país necesita. En la mayoría de los casos prácticos es suficiente usar análisis elásticos de modelos simples, conocer y sensibilizarse con los órdenes de magnitud de las variables en cuestión, establecer su piso y techo, e identificar las que tienen mayor impacto en el comportamiento estructural, en base a la interpretación de los desplazamientos, cortes, momentos y fuerzas axiales. En edificios y puentes inusuales resulta de gran ayuda realizar análisis de alternativas y estudiar los periodos de vibración y las formas modales. Se recomienda ser cautelosos al aplicar procedimientos y modelos sofisticados en el análisis estructural; pueden arrojar falsas precisiones y confundir al proyectista.

Un paseo por la historia y evolución de la ingeniería sugiere que los creadores de obras trascendentes hacen el recorrido por estas tres etapas de la mano de su ingenio e intuición, sin ignorar ninguna fuerza significativa, respetando las leyes de la estática y principios geométricos de continuidad. Avanzan inspirados en experiencias acumuladas por la profesión desde épocas milenarias y apoyados en teorías que en su mayoría se sustentan en hipótesis muy distantes a las realidades físicas, pero convenientes si son interpretadas con perspicacia e imaginación para entender el comportamiento de la estructura que resulta de su interacción con el medio ambiente y tomar decisiones de diseño y no para pretender duplicarlo matemáticamente. Robert Maillart (1938), sintetiza lo anteriormente expuesto con mucha claridad,

“¿Es realmente necesario considerar todas las circunstancias secundarias en un análisis? La apreciación que generalmente prevalece para estar en el lado seguro es que los cálculos, clara y conclusivamente gobiernan el diseño. Sin embargo, cuando uno ve que es imposible tomar en cuenta todas las influencias secundarias, se vuelve evidente que cada cálculo es solo una ayuda para el diseñador, quien además tiene que tomar en cuenta todos los efectos secundarios de alguna forma. Dependiendo de las circunstancias, los resultados de los cálculos pueden tener una aplicación directa o necesitan ser modificados. El segundo es el caso usual si es un diseñador y no un analista quien hace el trabajo. El primero no permitirá que un muro delgado sea sobre-esforzado al mismo nivel que una losa, sino que aumentará su espesor. Para la losa, sin embargo, el diseñador pudiese permitir esfuerzos algo mayores que los que sus cálculos sugieren. Este considerara, especialmente en el caso de vigas profundas, si puede hacer uso de la resistencia a la adherencia que sus cálculos le permiten. Desafortunadamente, los estándares y códigos de diseño, particularmente cuando son usados en los cursos universitarios o aplicados literalmente por los ingenieros, desorientan y a veces fuerzan al diseñador a adherirse a estos de una forma mecánica. Una relajación de las regulaciones en favor de colocar más responsabilidad en el diseñador, llevaría a una mejora significativa en la calidad de las estructuras....”

Como complemento a estas líneas recomiendo las lecturas de Hardy Cross “*Engineers and Ivory Towers*”, la de Cross con Newlin Morgan “*Continuous Frames of Reinforced Concrete*” y la de Pier Luigi Nervi “*Structures*” por sintetizar cónsonas reflexiones sobre la relación entre las teorías el análisis estructural y la construcción de infraestructura.

Agradecimientos

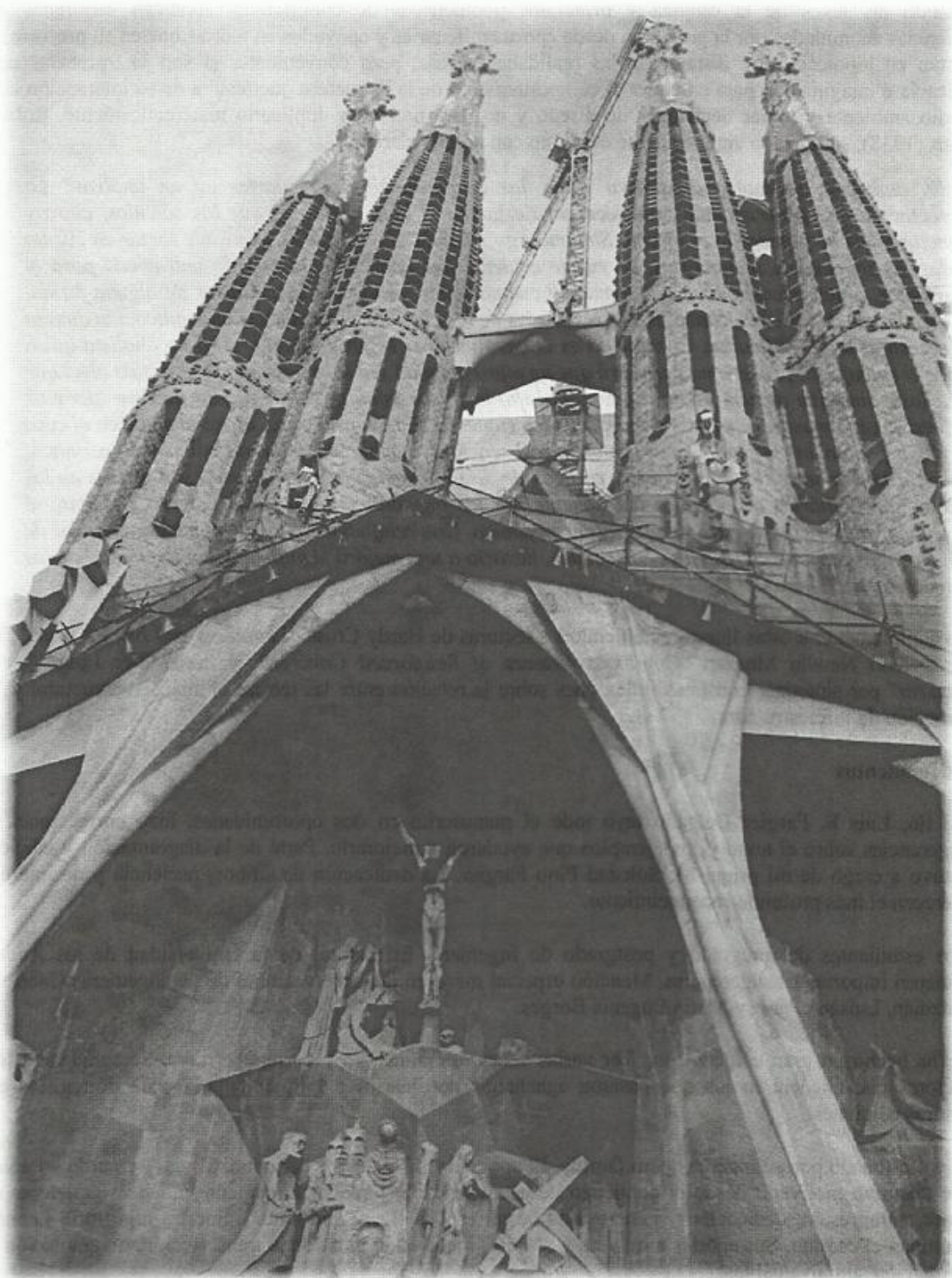
Mi tío, Luis F. Fargier Delgado leyó todo el manuscrito en dos oportunidades, hizo correcciones y sugerencias sobre el texto y los ejemplos que ayudaron a mejorarlo. Parte de la diagramación y edición estuvo a cargo de mi prima M. Soledad Pino Fargier. La dedicación de ambos, paciencia y desinterés, merecen el más profundo reconocimiento.

Los estudiantes del pregrado y postgrado de Ingeniería Estructural de la Universidad de los Andes hicieron importantes sugerencias. Mención especial merecen las observaciones de las ingenieras Gabriela Guzmán, Luisana Pérez y María Eugenia Borges.

Se ha hecho un gran esfuerzo por leer varias veces el manuscrito y corregir errores. Se agradece a los lectores que encuentren los que pasaron agachados notificarlos a lfargier@ula.ve para corregirlos en futuras ediciones.

Soy afortunado por estar cerca de mi familia. El apoyo de mis padres y hermano, Silvia, Bernardo y Pablo, me mantuvo motivado desde el comienzo de esta agradable jornada. Finalmente, quisiera agradecer el amor, comprensión, dedicación y generosidad de mi esposa Betsy que junto a nuestra hija Sofia Leonor iluminan el camino. Sus aportes a mi vida y al libro, incluyendo parte de la transcripción, diagramación y corrección son invaluable.

Luis Bernardo Fargier Gabaldón, Mérida Junio del 2010



La Sagrada Familia en Barcelona, España (en construcción).
Cortesía de Luis B. Fargier G.

CAPÍTULO 1 CONCRETO Y ACERO

El concreto u hormigón es un conglomerado artificial de agregados finos (arena) y gruesos (piedra picada), unido entre sí por una pasta de cemento y agua. El concreto fresco, recién preparado, toma la forma del encofrado o molde que lo contiene, endureciéndose con el tiempo a medida que el agua se combina con los componentes del cemento hasta formar una especie de piedra artificial que contiene,

- Agregados finos y gruesos inertes.
- Pasta de cemento y agua que une los agregados.
- Agua, vapor de agua y aire en los intersticios.

A veces se utilizan productos aditivos en la mezcla para acelerar o retardar el endurecimiento o fraguado, introducir aire, o para aumentar la plasticidad o trabajabilidad de la mezcla durante el vaciado.

La reacción que se produce al combinar agua y cemento es exotérmica: la temperatura de la mezcla aumenta. En la construcción de estructuras de grandes masas de concreto (represas, por ejemplo) es necesario disminuir la cantidad de calor que se genera durante el vaciado, lo que se logra con mezclas muy pobres (4 sacos de cemento por metro cúbico), agua en forma de hielo y cementos especiales de bajo desarrollo de calor.

1.1 PROPIEDADES

a) RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN

Es el esfuerzo que mejor soporta el concreto. El esfuerzo máximo en compresión axial medido a los 28 días de vaciado el concreto se denota f'_c y se utiliza como índice de su calidad. En Venezuela es obligatorio ensayar probetas cilíndricas standard de 15 cm de diámetro por 30 cm de altura (Figura 1.1). La rotura de cilindros en compresión axial se produce en planos inclinados unos 35 grados con la vertical o en planos verticales (Figura 1.2). Otras veces se presentan dos tipos de grietas. El tipo de falla depende de la fricción entre las caras planas del cilindro y los aparatos de carga.

Comúnmente se emplean concretos de f'_c entre 150 kg/cm^2 y 350 kg/cm^2 , pudiendo alcanzarse resistencias mayores. El valor de f'_c aumenta con,

- La disminución de la relación agua cemento (A/C) de la mezcla de concreto (Figura 1.3). La cantidad mínima de agua requerida es de 0.20 litros por kilogramo de cemento, es decir $A/C \cong 0.20$ al peso. En miembros estructurales usuales, tales como vigas, losas y columnas se emplean entre 8 y 10 sacos de cemento por m^3 de concreto que se

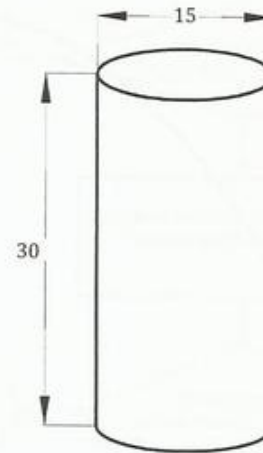


Fig. 1.1 Cilindro standard

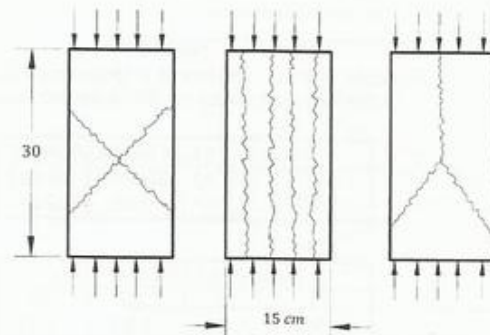


Fig. 1.2 Planos de rotura de los cilindros

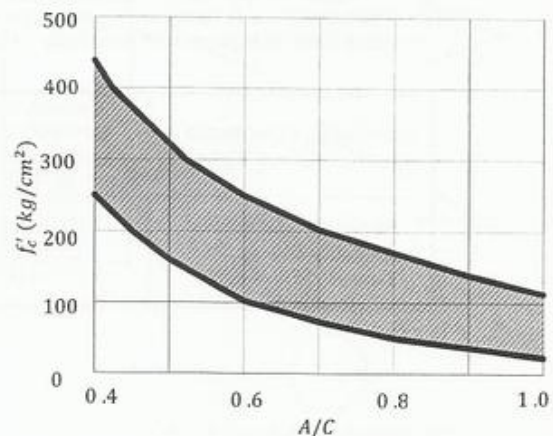


Fig. 1.3 Influencia de la relación A/C en la resistencia del concreto f'_c
Adaptado de Ersoy (2000)

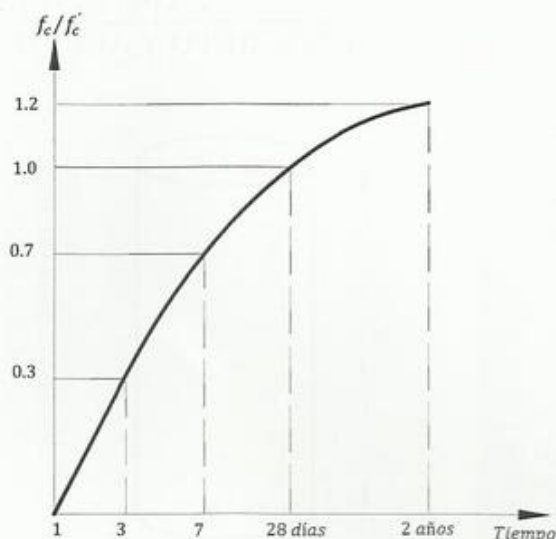


Fig. 1.4 Relación aproximada entre la edad del concreto y la resistencia del cilindro (El eje de las $x \rightarrow$ en escala logarítmica)

Tabla 1.1
Relación entre la resistencia a compresión de probetas cilíndricas y cúbicas de diferentes dimensiones

PROBETAS CILINDRICAS (cm)			
12 x 20	15 x 30	20 x 40	30 x 60
1.26	1.00	0.96	0.91

PROBETAS CUBICAS (cm)			
10	15	20	30
1.26	1.25	1.20	1.11

Tabla 1.2 (COVENIN, Tabla 4.3.2.2)
Resistencia promedio a la compresión cuando no se dispone de datos para establecer una desviación estándar.

Resistencia especificada a la compresión f'_c kg/cm^2	Resistencia promedio a la compresión f'_c kg/cm^2
Menor de 200 kg/cm^2	$f'_c + 70$
de 200 a 350 kg/cm^2	$f'_c + 85$
más de 350 kg/cm^2	$f'_c + 100$

combinan con unos 140–220 litros de agua. Relaciones A/C típicas en edificaciones, se encuentran entre 0.40–0.60 al peso.

- La calidad y dosificación adecuada de la arena y piedra.
- El control sobre el mezclado, transporte, vaciado, compactación ó vibrado. Un buen curado del concreto, que se logra manteniendo el concreto húmedo luego del vaciado hasta que alcance la resistencia de diseño. La edad del concreto (Figura 1.4).

En algunos países de Europa y de América se ensayan probetas cúbicas en lugar de cilíndricas. La Tabla 1.1 presenta las relaciones de resistencia normalizadas con respecto a una probeta cilíndrica de 15 cm por 30 cm.

La norma COVENIN estipula que deben ensayarse un par de cilindros por cada 100 m^3 de concreto vaciado o por cada 460 m^2 de área superficial de placas o muros, pero no menos de uno al día.

De acuerdo con la norma COVENIN los cilindros ensayados deben cumplir los siguientes requisitos de calidad,

- El promedio de tres ensayos consecutivos debe ser $\geq f'_c$ asumido en los cálculos.
- Ningún ensayo deberá dar un valor menor que $f'_c - 35 \text{ kg/cm}^2$.

Es necesario dosificar el concreto de manera que su resistencia media sobrepase la resistencia f'_c en una cantidad suficiente para garantizar el cumplimiento de los requisitos a y b , según se indica en la Tabla 1.2.

Si los resultados de los ensayos de cilindros no satisfacen los requisitos a y/o b , se deben adoptar medidas de inmediato para mejorar la calidad del concreto. Además, si no se satisface el requisito b se deberán considerar las disposiciones siguientes,

Si hay dudas sobre la resistencia del concreto y una revisión de los cálculos indica preocupación sobre la capacidad resistente de la estructura, se puede requerir el ensayo de núcleos de sección extraídos de la zona en duda, de acuerdo con el procedimiento "Método para la Extracción y Ensayo de Probetas Cilíndricas y Viguetas de Concreto Endurecido", COVENIN 345.

Deberán tomarse tres núcleos (tres muestras pequeñas extraídas de la estructura) por cada resultado de ensayo de resistencia de cilindros que esté por debajo de f'_c en más de 35 kg/cm^2 . El concreto de la zona representada por los núcleos se considerará estructuralmente adecuado si el promedio de los tres núcleos es por lo menos igual al 85 por ciento de f'_c y ningún núcleo tiene una resistencia menor del 75 por ciento de f'_c . De lo contrario el profesional responsable puede ordenar que se hagan pruebas de carga en la parte dudosa de la estructura, reforzar y en última instancia demoler. El diagrama de flujo de la Figura 1.5, muestra la secuencia de decisiones a tomar descrita en los párrafos anteriores.

b) MODULO DE ELASTICIDAD (E_c)

Usualmente se mide como la pendiente de la curva de esfuerzo deformación del concreto, tomado de los ensayos de cilindros. Comúnmente se establece como la pendiente de una recta que entre el origen y un punto con esfuerzo de $0.45 f'_c$ (Figura 1.6). Para concretos de peso normal Pauw (1960) obtiene,

$$E_c = 15100 \cdot \sqrt{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad [1.1]$$

Resultados de ensayos realizados en el Laboratorio de Materiales de la ULA indican que el módulo de elasticidad dado por las Normas (A.C.I. y COVENIN) es muy alto para concretos de la zona. En base a resultados obtenidos de doscientos ensayos se obtuvo,

$$E_c \cong 55000 \cdot \sqrt[4]{f'_c} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad [1.2]$$

Durante el ensayo de un cilindro a compresión la deformación correspondiente al esfuerzo unitario máximo f'_c casi no varía con la calidad del concreto y tiene un valor aproximado de dos milésimas (0.002). La deformación máxima ó deformación de rotura es cercana a las tres milésimas (0.003) ó más, aumentando para concretos de baja calidad (Figura 1.7).

c) RESISTENCIA A LA TRACCIÓN (f_{tr})

La resistencia unitaria del concreto a tracción es pequeña si se compara con su resistencia a compresión. Es muy dependiente del tipo de ensayo que se use para medirla. El método más común consiste en ensayar probetas cilíndricas comprimidas transversalmente a lo largo de generatrices opuestas (Figura 1.8). La carga se aplica al cilindro a través de un material blando, madera por ejemplo. La resistencia a la tracción se obtiene de acuerdo a,

$$f_{tr} = \frac{2 \cdot P}{\pi \cdot D \cdot L} \quad [1.3]$$

Resultados obtenidos de ensayos realizados en el laboratorio de materiales de la ULA indican $f_{tr} \cong 0.09 \cdot f'_c$.

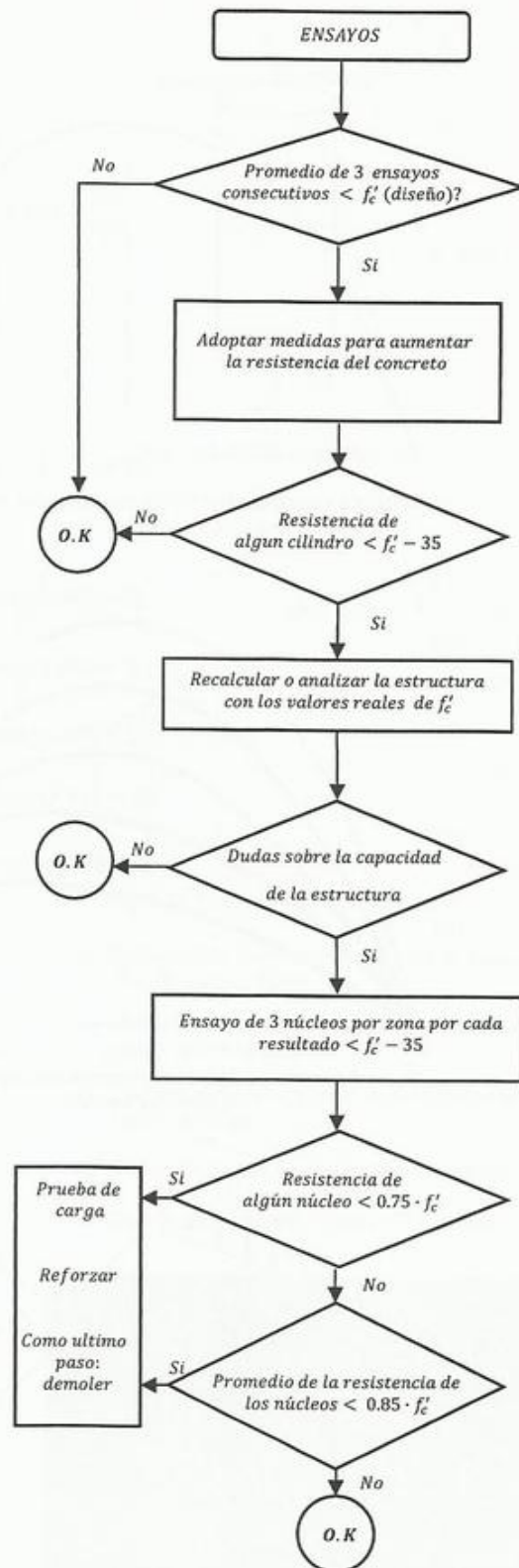


Fig. 1.5 Toma de decisiones para evaluar la resistencia del concreto

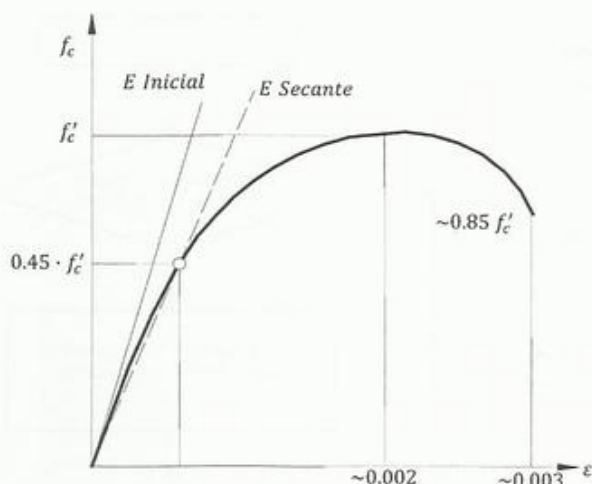


Fig. 1.6 Curva esfuerzo-deformación para un cilindro de concreto

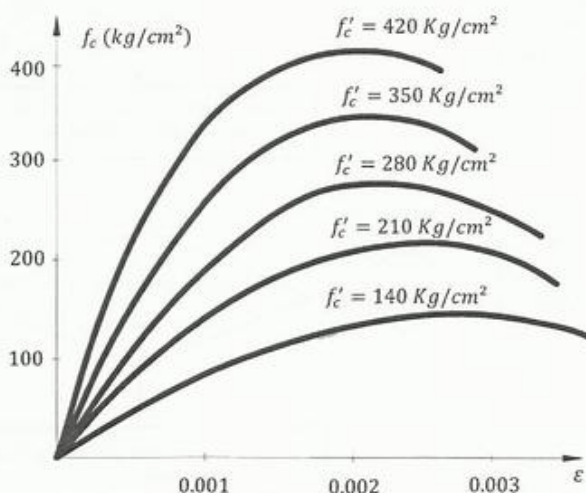


Fig. 1.7 Curvas de Esfuerzo-deformación para concretos de distintas calidad

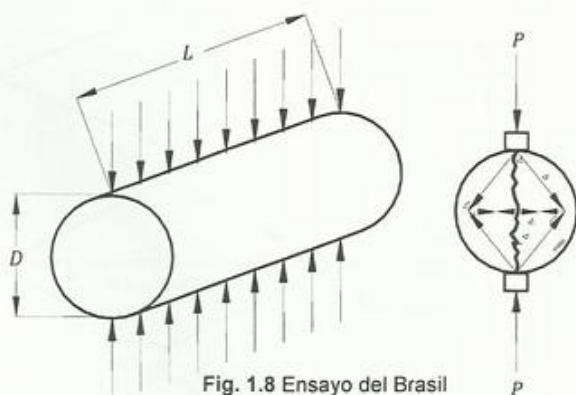


Fig. 1.8 Ensayo del Brasil



Fig. 1.9 Ensayo de tracción por flexión

d) TRACCIÓN POR FLEXIÓN

El esfuerzo unitario de rotura del concreto a tracción por flexión es llamado módulo de rotura, y es obtenido de ensayo de vigas de concreto en masa (sin acero), de sección cuadrada de 15 cm de lado, de luz igual a 90 cm y cargadas en los puntos tercios (Figura 1.7) y puede ser tomado como,

$$f_{tr} = 2 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [1.4]$$

e) RELACIÓN DE POISSON

Al ensayar un cilindro en compresión axial se producen acortamientos longitudinales ϵ y ensanchamiento de la sección transversal ϵ' (Figura 1.10). Las deformaciones transversales son muy pequeñas hasta una carga unitaria de aproximadamente $0.80 \cdot f'_c$ y por lo tanto el cilindro disminuye de volumen desde $f = 0$ hasta $f = 0.80 \cdot f'_c$ (Figura 1.8).

- Relación de Poisson = ϵ'/ϵ varía entre 0.15 y 0.20 (para esfuerzos $f < 0.80 \cdot f'_c$)

f) ESFUERZO CORTANTE (v_c)

La resistencia del concreto al corte puro puede alcanzar hasta el 30% del valor de f'_c . Para el caso de corte en combinación con flexión (el más común), el valor del esfuerzo cortante unitario último del concreto ha sido tradicionalmente asumido como,

$$v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [1.5]$$

En vigas con bajas cuantías de acero longitudinal y sin estribos, este valor puede resultar inseguro.

g) FLUENCIA LENTA

Fluencia o flujo plástico del concreto es el fenómeno relacionado con los acortamientos longitudinales bajo una carga constante, es decir que permanece aplicada durante un período de tiempo largo. Al aplicar en breve tiempo una carga P a una probeta de concreto se produce una deformación (acortamiento) elástica inicial ϵ_i . Si mantenemos la acción de la carga, la probeta sigue acortándose. Las deformaciones de acortamiento aumentan con el tiempo a una rata decreciente, hasta llegar a un valor máximo $\epsilon_i + \epsilon_d$. (Figura 1.11).

Si retiramos la carga P , se producen,

- Una recuperación elástica ε_i' menor que ε_i .
- Una recuperación a largo plazo ε_d' menor que la deformación plástica $\varepsilon_d - \varepsilon_i$.
- Una deformación permanente ε_p .

Para cargas de trabajo que actúan permanentemente, la deformación diferida es mayor que la elástica $\varepsilon_d = 1.5$ a 3.5 veces ε_i . Esta relación disminuye con la presencia de acero en la zona comprimida.

La deformación diferida ε_d aumenta con,

- El esfuerzo de compresión al que está sometido el elemento.
- La relación agua-cemento.
- La cantidad de cemento por unidad que posee la mezcla.
- El tiempo de aplicación de la carga P .

Disminuye con,

- La edad del concreto al aplicar P .
- La humedad.
- El espesor de la pieza de concreto.

Sea $\varepsilon_p = C \cdot \varepsilon_i$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_i + \varepsilon_p \quad [1.6]$$

$$\varepsilon_t = \frac{f'_c}{E_c} \cdot (1 + C) = \frac{f'_c}{E_c / (1 + C)} \quad [1.7]$$

Las deflexiones en vigas y columnas aumentan con el tiempo debido al efecto del flujo plástico (ver Sección 4.3d). Para el cálculo de deflexiones (vigas) y/o cargas críticas de pandeo que ocurren bajo carga sostenida, se emplea el uso de un módulo de elasticidad efectivo,

$$E_c' = E_c / (1 + C) \quad [1.8]$$

β_d Varía de acuerdo a las características del concreto. Para condiciones normales... $E_c' = 0.40 \cdot E_c \sim 0.80 \cdot E_c$

h) RETRACCIÓN

El concreto se contrae al perder humedad, disminuyendo de volumen; este fenómeno se conoce como retracción. Por el contrario, si el concreto seco se humedece aumenta de volumen. Recién preparado (concreto fresco), contiene mucha más agua que la requerida para combinarse con el cemento. Por ejemplo, si se emplean 0.5 litros por kilogramo de cemento, menos de 0.25 litros se combinan. La reacción agua-cemento, muy rápida al principio, continúa a rata decreciente a través del tiempo.



Fig. 1.10 Relación de Poisson

Entre B y C la carga es constante
En C ocurre la descarga

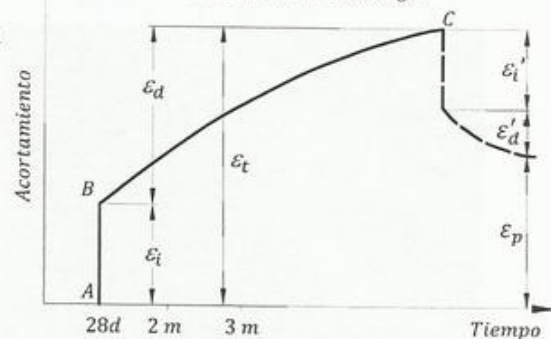


Fig. 1.11 Flujo plástico en el concreto

ε_i Deformación instantánea al aplicar la carga el día 28, para la figura.

ε_d Deformación a largo plazo bajo debido a la carga aplicada el día 28.

ε_i' Deformación recuperada inmediatamente al retirar la carga.

ε_d' Deformación que se recupera a largo plazo.

ε_p Deformación plástica que no se recupera



Fig. 1.12 Grietas por retracción del concreto.
Cortesía de Luis B. Fargier G



Fig. 1.13 Emparrillado de cabillas en una losa de fundación.
Cortesía de Luis B. Fargier G.

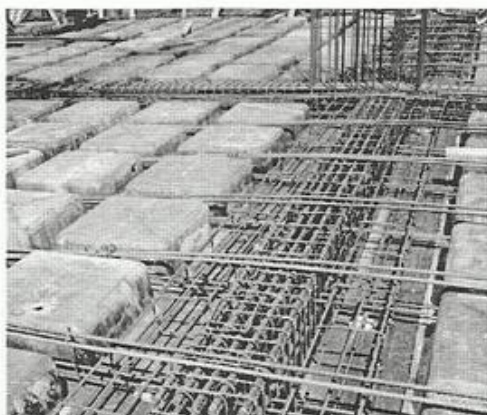
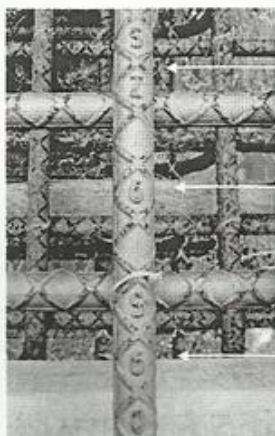


Fig. 1.14 Acero de Refuerzo en las Vigas
Cortesía de Pablo A. Fargier G.



Fabricante de la cabilla
SZ=Sizuca

Número de octavos de la cabilla
6/8".....3/4"

Tipo de Acero (A 60).
 $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Fig. 1.15 Nomenclatura de las Cabillas
Cortesía de Luis B. Fargier G.

Para minimizar la pérdida de humedad del concreto recién preparado debe "curarse", protegiéndolo así de la acción del viento y de los rayos solares durante los primeros días y "regándolo" con agua para mantener su humedad en su superficie.

La deformación unitaria por retracción aumenta con el tiempo y su valor varía entre dos y siete diezmilésimas (hasta una milésima 0.001) en lugares muy secos). También aumenta con la relación A/C , la cantidad de cemento y la porosidad de los agregados. Disminuye con la humedad y el espesor del elemento. Al restringirse la retracción, se produce tracción en el concreto que se agrieta (Figura 1.12). El agrietamiento se minimiza con un curado adecuado.

i) CAMBIO DE TEMPERATURA

El concreto se dilata o se contrae cuando la temperatura aumenta o disminuye, causando esfuerzos que pueden ser grandes cuando se trata de elementos estructurales de dimensiones considerables, debiéndose colocar en ellos juntas de dilatación a distancias adecuadas. En edificaciones es recomendable mantener las dimensiones de los elementos estructurales por debajo de los 40 m.

Coefficiente de dilatación: 1 por 10^{-5} por grado centígrado.

j) PESO UNITARIO

Concretos corrientes,	En masa	2300 kg/m^3
	Armado	2500 kg/m^3

En edificaciones de concreto armado se recomienda usar 2500 kg/m^3 para el peso propio

1.2 ACERO DE REFUERZO

Las barras (cabillas, redondos ó varillas) de acero para el refuerzo (figuras 1.13 y 1.14) se obtienen de la combinación del hierro con pequeñas cantidades de carbón (entre el 0.05% - 2%). Se incluyen además pequeñas cantidades de otros minerales como Magnesio, Silice, Azufre. A mayor contenido de carbón se alcanzan mayores resistencias pero menor ductilidad, es decir la barra pierde capacidad de deformaciones plásticas (Figura 1.16). La cabillas de refuerzo del concreto son de sección circular con diámetros de hasta 2.25". Se designan por su diámetro, por ejemplo, 3/8" ó por el número de octavos de pulgada de su diámetro #4, #6, #7 para barras de 1/2" 3/4" y 7/8" respectivamente (Figura 1.15).

Las barras corrugadas no tienen un diámetro único debido a la presencia de las corrugaciones, por lo que se usa el diámetro nominal que es aquel de una barra lisa equivalente que tenga el mismo peso que una barra corrugada.

El tipo de barra más usado es el A - 60 con un esfuerzo de fluencia nominal $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. En algunos países se usan barras A - 40 con $F_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$ principalmente como estribos.

Las cabillas llevan grabadas en su superficie una nomenclatura que indica su tamaño y la calidad del acero del cual están hechas (Figura 1.15).

Las características más importantes en el comportamiento del acero son,

- Esfuerzo de fluencia (F_y), donde se producen deformaciones bajo incrementos casi nulos de esfuerzo.
- Esfuerzo máximo (F_{su}).
- Módulo de elasticidad. Es el valor numérico de la pendiente inicial de la curva que relaciona los esfuerzos y las deformaciones en el rango elástico (Figura 1.16). Para todos los tipos de acero se tiene $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

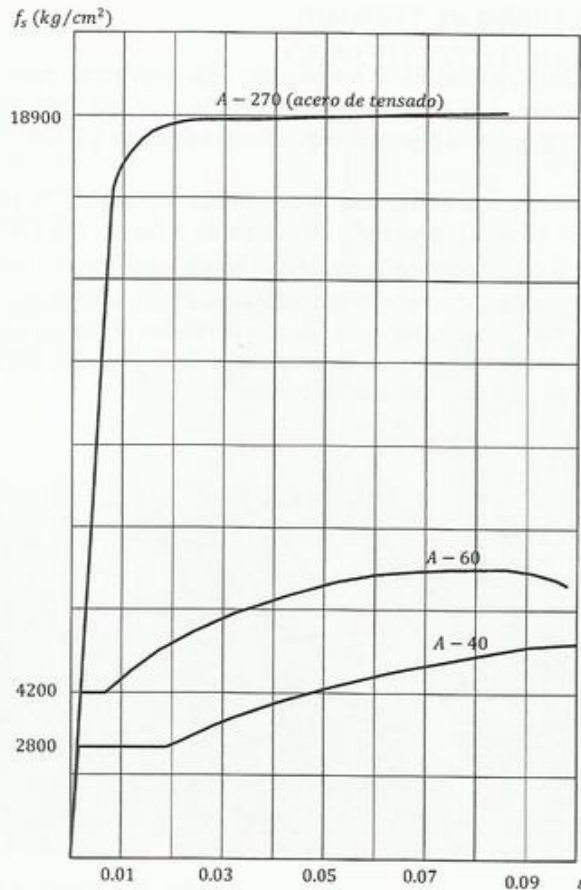


Fig. 1.16 Curvas de esfuerzo-deformación para el acero

Para límite de fluencia

$$F_y = 2800 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \epsilon_y = 0.00137$$

Para límite de fluencia

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \epsilon_y = 0.00206$$

Los aceros con bajo contenido de carbón presentan una plataforma o zona de cedencia bien definida en la cual las deformaciones aumentan continuamente para un esfuerzo constante. A partir de cierto valor de deformación los esfuerzos comienzan a aumentar debido a un fenómeno que se conoce como endurecimiento por deformación. La curva tiende a una tangente horizontal para el esfuerzo último (F_{su}) y luego descende hasta la rotura (Figura 1.16). Los aceros con mayor contenido de carbón presentan una plataforma de fluencia de menor longitud y una mayor resistencia, en ellos el esfuerzo de fluencia no está bien definido, según se muestra en la Figura 1.16.

Resumen de las características más importantes:

- Coeficiente de dilatación del acero $1.17 \cdot 10^{-5}$ por grado centígrado.
- Peso unitario del acero $7850 \text{ kg/m}^3 \dots \dots \dots 0.785 \text{ kg/(m} \cdot \text{cm}^2)$

El acero en la construcción es además usado en forma de,

- *Mallas electro-soldadas*: Utilizadas para la construcción de pavimentos, losas de entrepiso ó techo. Se designan por el calibre ó diámetro de la barra y por su separación.
- *Acero estructural*: Perfiles de acero embebido en concreto utilizado en columnas o vigas compuestas (ver Capítulo 14).

1.3 ACERO DE TENSADO

Se emplean cables o torones de alta resistencia para introducir fuerzas de compresión a los miembros de concreto. Los más comunes son los torones que se forman con siete guayas entrelazadas entre sí con diámetros de 0.5" y 0.6" lo que correspondientes áreas de 1.0 cm^2 y 1.4 cm^2 respectivamente.

La resistencia de los aceros de tensado alcanza $F_{su} = 18900 \text{ kg/cm}^2$. Estos no presentan un límite de fluencia claro como el observado en aceros de refuerzo (Figura 1.16) y la fluencia se asume alrededor de $F_{py} = 0.90 \cdot F_{pu}$. En miembros *pretensados* el acero transfiere las fuerzas al concreto por medio de la adherencia y en piezas *postensadas* es necesario emplear anclajes mecánicos que reaccionan contra el concreto para transferir las fuerzas. En losas postensadas se usan cuñas metálicas que son trabadas por un anclaje (Figura 1.17). En vigas de puentes postensadas se usan aparatos de anclaje que trabajan con el mismo principio para múltiples torones a los que se les conoce como "trompetas".

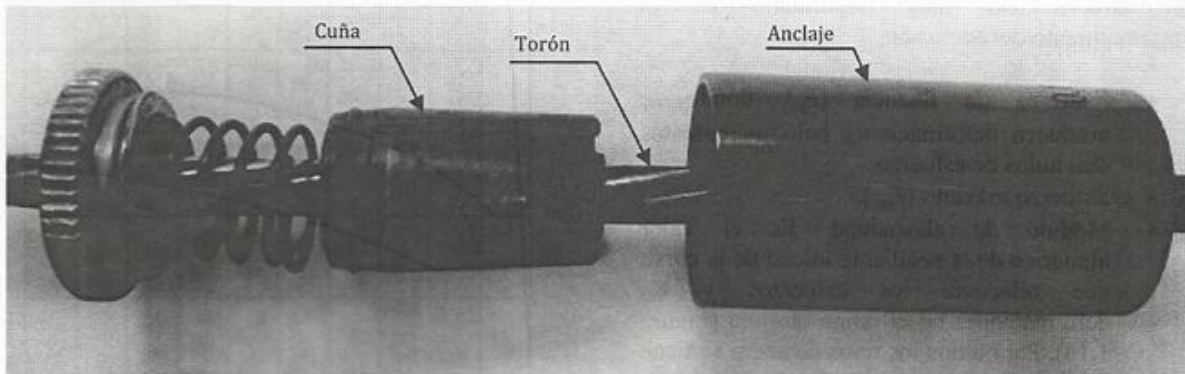


Fig. 1.17 Aparato de anclaje para un torón
Cortesía de Luis B. Fargier G.

El concreto u hormigón armado es aquel que contiene refuerzos metálicos adecuadamente dispuestos dentro de ciertos límites. Es un material resistente a todo tipo de esfuerzos, adaptable a todo tipo de estructura, monolítico y de larga duración aún con poco mantenimiento y económico (figuras 2.1 y 2.2).

Así, en el caso más simple, el acero se colocará en la zona de tracción y cerca del borde en una cuantía mínima aproximada de 0.4% y máxima 2.5% (vigas) y entre el 1.0% y el 6.0 % para el caso de columnas.

2.1 RESUMEN HISTÓRICO

A mediados del siglo diecinueve WILKINSON y LAMBOT observaron el aumento de resistencia del concreto al introducirle refuerzos metálicos. En 1855 FRANCISCO COIGNET publica un libro sobre las aplicaciones del hormigón armado. En 1867 MONIER logra la reducción de los espesores al colocar el refuerzo adecuadamente en la masa de concreto.

EMPERGER, TALBOT, MELAN, MORSCH, MARCUS, PROBST, HENNEBIQUE y otros investigan y estudian analíticamente el concreto armado aplicando la teoría de la LINEA RECTA o de los esfuerzos de trabajo.

En la primera mitad del siglo veinte SUENSON, WHITNEY, PASTERNAK, LOLEIT, desarrollan la teoría de ROTURA que actualmente se emplea en el cálculo del concreto armado. Importantes contribuciones se realizaron desde la Universidad de Illinois lideradas por CROSS, NEWMARK, RICHART y SEISS. En la segunda mitad del siglo veinte, BERTERO, BREEN, FERGUSON, JIRSA, MACGREGOR, PARK, PAULAY, SOZEN y WINTER han realizado grandes aportes en el diseño de estructuras de concreto armado, sin pretender que estas listas sean completas.

En Venezuela el Ingeniero Manuel Felipe Herrera Tovar construye en 1912 el primer edificio de concreto armado para la sede del Archivo General de la Nación. Por esa época se tienden varios puentes de losa de concreto sobre perfiles metálicos en la carretera Caracas-La Guaira. A partir de 1940 se generaliza en Venezuela el empleo del concreto armado en toda clase de obras de ingeniería.

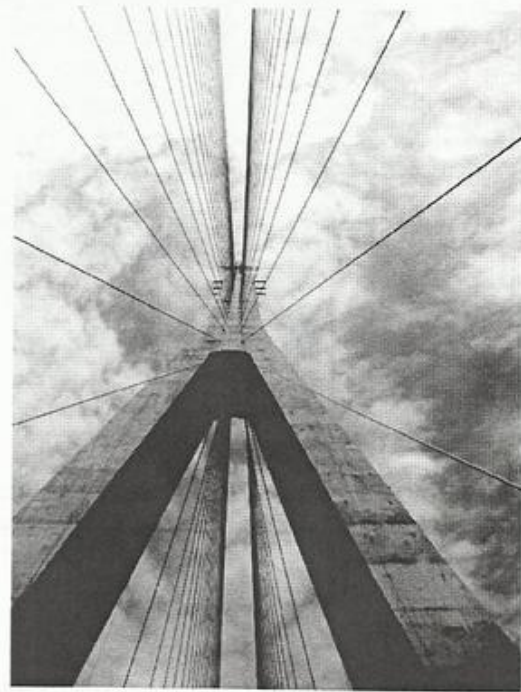


Fig. 2.1 Columna de un puente atirantado.
Cortesía de Luis B. Fargier G.

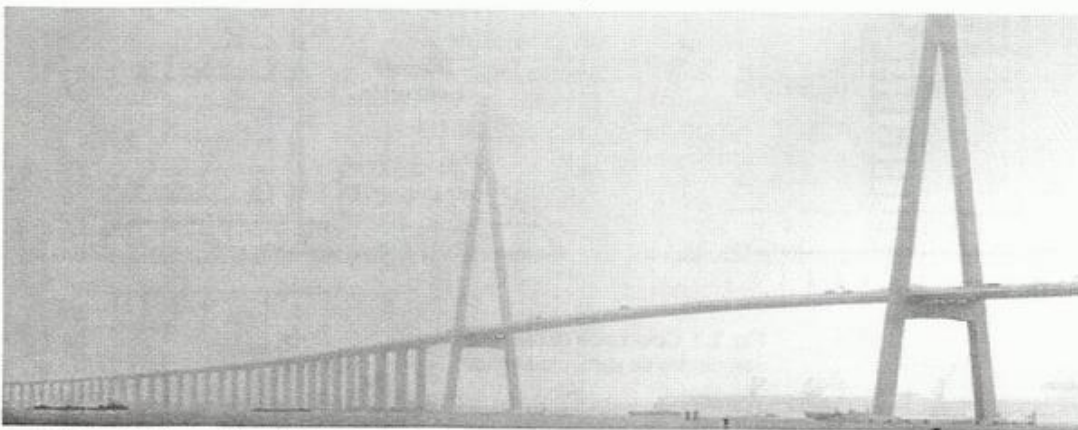
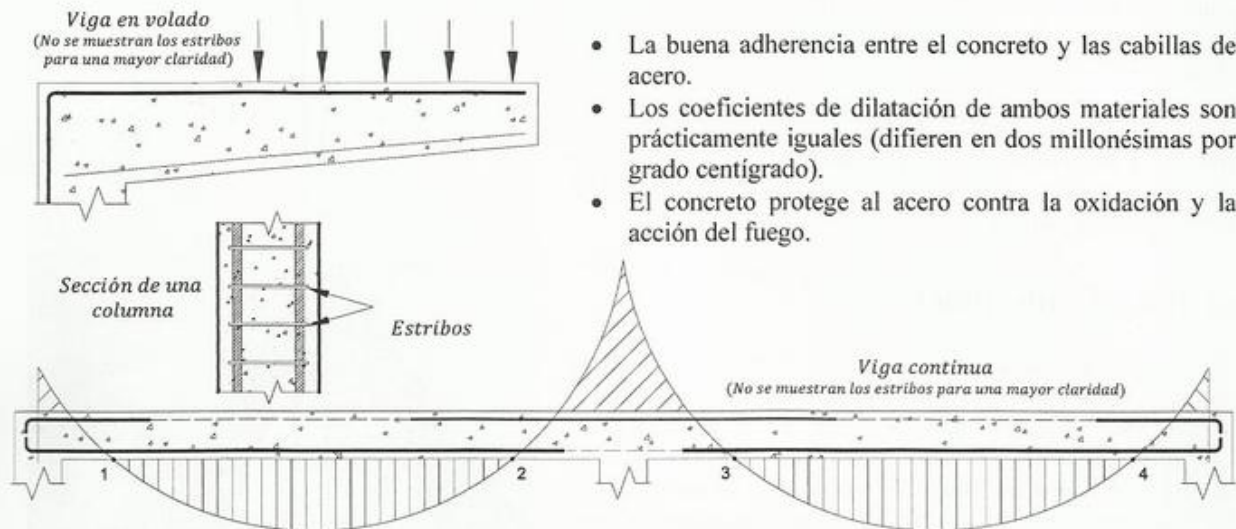


Fig. 2.2 Puente Sutong (Shanghái, China) el más grande del mundo suspendido. El tramo central mide más de 1 km
Cortesía de Luis B. Fargier G.

2.2 GENERALIDADES

El concreto soporta bien los esfuerzos de compresión pero es débil en tracción. Esta la resistirá el acero de refuerzo que también colaborará con el concreto para absorber compresión, corte y torsión. El hecho que el concreto y el acero formen un material de construcción eficaz, se debe a,



- La buena adherencia entre el concreto y las cabillas de acero.
- Los coeficientes de dilatación de ambos materiales son prácticamente iguales (difieren en dos millonésimas por grado centígrado).
- El concreto protege al acero contra la oxidación y la acción del fuego.

Es importante destacar que,

- Si no hubiese adherencia entre acero y concreto, no se podrían transmitir fuerzas de un material al otro.
- Si los coeficientes de dilatación fuesen muy diferentes, un cambio de temperatura produciría esfuerzos internos considerables en la sección de concreto armado, incluyendo tracción en el concreto.
- El acero es protegido por el concreto contra la corrosión y el efecto nocivo de las altas temperaturas que disminuye su resistencia y módulo de elasticidad. Si colocamos una capa exterior de concreto que recubre las barras de 2.5 cm de espesor, se necesita un fuego de mil grados centígrados durante una hora para elevar la temperatura del acero hasta 500 grados centígrados.

Sección transversal de una viga

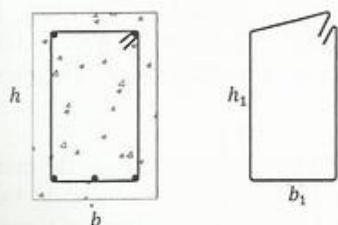


Fig. 2.3 Colocación del acero en elementos de concreto armado

2.3 UBICACIÓN DE LA ARMADURA (Figura 2.3)

El acero se colocará en la zona adecuada para resistir,

- La totalidad de los esfuerzos de tracción.
- Una parte de los esfuerzos de compresión, corte y torsión.

a) ARMADURA PRINCIPAL

La que resiste tracción o parte de la compresión y se designará A_s y A'_s respectivamente. Se coloca a lo largo del eje del elemento. En ocasiones se le llama armadura longitudinal.

b) ARMADURA TRANSVERSAL

Para resistir corte por flexión o torsión en forma de "estribos" en vigas y las "ligaduras" en columnas.

Se colocan en el plano de la sección (o inclinadas) enmarcando las barras principales a separaciones pequeñas. El refuerzo transversal soporta el corte y confina el concreto, incrementando su resistencia y capacidad de deformación última. Es el refuerzo más importante para que las estructuras sobrevivan durante un sismo.

c) ARMADURA DE REPARTICIÓN

En losas se emplea para mantener en posición a las barras principales, distribuir las cargas y resistir esfuerzos producidos por cambios de temperatura, retracción y flujo plástico. Forma con la armadura principal una malla con uniones de alambre, (Figura 2.4).

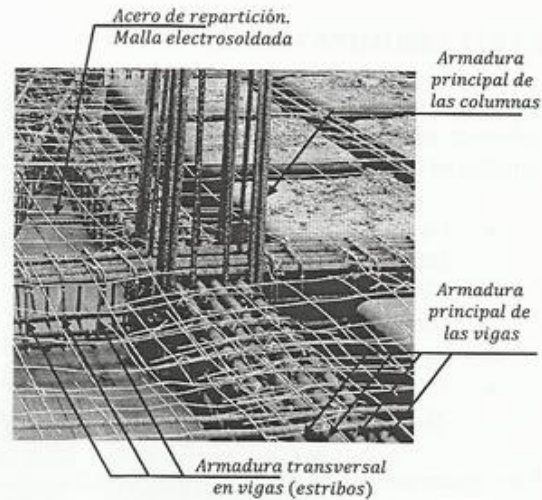


Fig. 2.4 Armaduras principales y transversales
Cortesía de Luis B. Fargier G

2.4 PORCENTAJE O CUANTÍA DE ACERO

La cuantía es la relación entre el área de acero colocada dividida entre el área de concreto. La cuantía geométrica $A_s/(b \cdot d)$ de acero principal en vigas viene definida por (ACI 318-08, Sección 10.6, Ecuación 10.3, para acero mínimo y Sección 21.5.2.1 para ρ_{max}),

$$\rho_{min} = 0.8 \cdot \frac{\sqrt{f'_c}}{F_y} \geq \frac{14}{F_y} \quad [2.1]$$

$$\rho_{max} = 0.025 \quad [2.2]$$

La cuantía geométrica de acero principal en columnas,

$$\rho = \frac{\text{Area Total de Acero}}{\text{Area de Concreto}} = \frac{A_{st}}{b \cdot t} \quad [2.3]$$

$$\rho_{min} = 1.00 \% \dots \rho_{max} = 6.00 \% \quad [2.4 \text{ y } 2.5]$$

Se recomienda usar cuantías $< 2.5\%$ en columnas

La cuantía mecánica (ω) esta toma en cuenta las propiedades de los materiales,

$$\omega = \rho \cdot \frac{F_y}{f'_c} \quad [2.6]$$

2.5 RECUBRIMIENTO (*rec*)

Es la capa exterior de concreto que recubre las barras (Figura 2.5) (obtenido durante el vaciado de la viga, losa, columna, etc.). Los frisos con mortero de cemento, aunque protegen contra el fuego y la oxidación no se consideran como parte del elemento estructural. Las dimensiones del recubrimientos se escogerán en base a,

- La situación del elemento estructural que puede estar cubierto o a la intemperie sobre el terreno o enterrado.
- El vaciado (caso de bases o fundaciones o muros) según éste se haga contra encofrados o directamente contra tierra.
- El riesgo de incendio.
- La calidad del ambiente; si se trata de ambientes salinos es indispensable garantizar un recubrimiento grande.

Para garantizar la posición correcta de las cabillas dentro de los encofrados de modo que se cumpla con los recubrimientos establecidos en el proyecto y que se mantenga la distancia entre barras se recomienda utilizar separadores y soportes de mortero. (Figura 2.6).

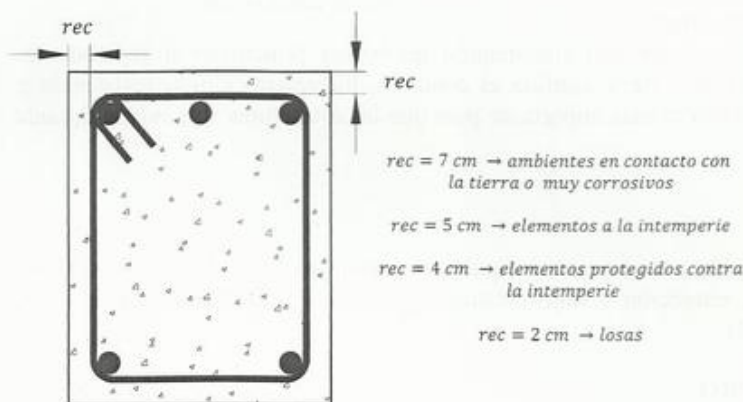


Fig. 2.5 Recubrimiento

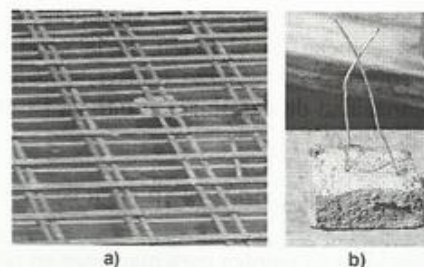


Fig. 2.6 a) Separadores en obra para lograr el recubrimiento de una parrilla de acero en una losa de fundación
b) Foto del separador
Cortesía de Luis B. Fargier G

2.6 VENTAJAS Y DESVENTAJAS QUE OFRECE EL CONCRETO ARMADO

a) VENTAJAS

Capacidad de resistir simultáneamente la función arquitectónica y estructural: Al ser colocado en estado plástico el concreto se amolda al encofrado y de este modo es posible lograr la forma y textura deseada, (Figura 2.7).

- **Resistencia al fuego:** El concreto puede estar en contacto con el fuego unas 3 horas sin necesidad de utilizar recubrimientos anti-fuego.
- **Rigidez:** La rigidez que poseen las estructuras de concreto armado bien diseñadas hace posible minimizar vibraciones y los desplazamientos laterales durante un sismo. Las tendencias modernas del diseño sismo-resistentes se inclinan por las estructuras rígidas sobre las más flexibles.
- **Bajo mantenimiento:** Las estructuras de concreto armado poseen vidas útiles muy largas y no necesitan de gran mantenimiento.
- **Disponibilidad de los materiales:** Los materiales que forman el concreto: la arena, piedra, agua, cemento y acero se consiguen fácilmente en grandes cantidades



Fig. 2.7 Monumento a La Virgen de la Paz. Estado Trujillo. Altura del monumento: 46 metros.
Cortesía de Luis B. Fargier G

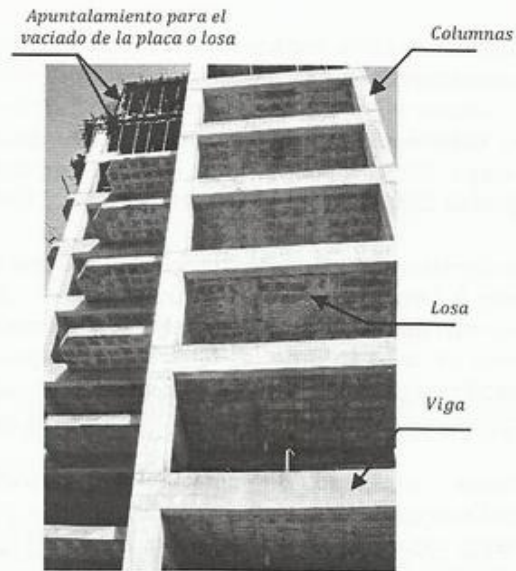


Fig. 2.8 Proceso constructivo de un edificio aporticado de vigas y columnas
Cortesía de Luis B. Fargier G

b) DESVENTAJAS

- El proceso constructivo requiere el uso de encofrados y apuntalamientos (Figura 2.9).
- Baja resistencia por unidad de peso y volumen. Gran parte de la resistencia de una estructura de concreto armado es destinada a soportar su propio peso.

2.7 CARGAS SOBRE LAS ESTRUCTURAS

a) CARGAS PERMANENTES

Conocidas también con el nombre de cargas muertas, son las que se mantienen constantes en magnitud y posición durante toda la vida útil de una estructura. Por ejemplo el peso propio de la edificación.

b) CARGAS VARIABLES

Llamadas también cargas vivas, constituyen las cargas de ocupación de las edificaciones. No son constantes ni en magnitud ni en posición durante la vida útil de una edificación. Son muy difíciles de estimar con exactitud por lo que los códigos establecen las mínimas cargas variables que actúan sobre las estructuras. Por ejemplo para viviendas el mínimo recomendado es 175 kg/m^2 para estacionamientos, 250 kg/m^2 (Ver Apéndice I).

c) CARGAS AMBIENTALES

Las ejercidas por los sismos, vientos, nieve, entre otras. Al igual que las cargas variables son muy difíciles de estimar con exactitud.

2.8 REQUISITOS DEL CONCRETO ARMADO

Una estructura de concreto armado debe ser segura, funcional y razonablemente económica en su construcción. Además la estructura debe,

- **No deformarse más allá de ciertos límites bajo la acción de cargas de trabajo y la influencia del tiempo.** Por ejemplo, la flecha máxima permisible de una viga es igual a una fracción de la luz (por ejemplo $L/360$ para la acción de carga viva...ver Tabla 4.2).
- **No agrietarse mucho:** Bajo cargas de trabajo el ancho de las grietas debe ser preferiblemente menor de unos 0.2 mm ó de 0.3 mm según se trate de elementos expuestos o no a la acción de la intemperie, respectivamente (Ver Apéndice I). El agrietamiento excesivo conlleva el peligro de la oxidación del acero de refuerzo y de las filtraciones de agua. La presencia de pequeñas grietas en el concreto es prácticamente inevitable, aún en elementos no cargados, ya que la retracción y el cambio de temperatura pueden producir esfuerzos de tracción mayores que la fatiga de rotura a tracción.
- **Poseer capacidad de deformación suficiente bajo solicitaciones extremas:** Mediante un confinamiento adecuado es posible aumentar la deformación última del concreto. Así se logra una mayor capacidad de disipación de energía (Figura 2.9). El confinamiento del concreto se consigue utilizando estribos o ligaduras a poca separación y más eficazmente con "zunchos" que forman una espiral.
- **Ser económica y estética:** Los proyectos deben resultar en obras agradables y funcionales a través del trabajo en equipo coordinado de arquitectos e ingenieros (figuras 2.2, 2.7, 2.8 y 2.10), y también ser,
- **Segura contra el colapso:** Debe garantizar la integridad humana bajo efectos de acciones especiales (terremotos, huracanes por ejemplo).

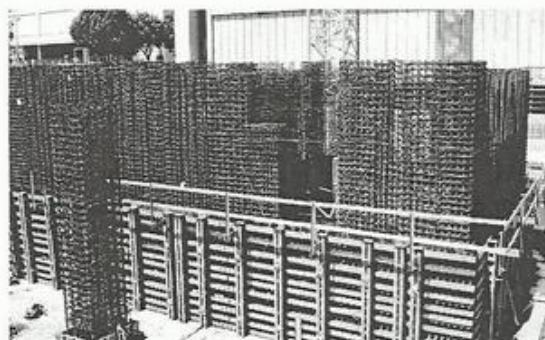


Fig. 2.9 Confinamiento abundante en las columnas y muros del primer piso de un rascacielos a construirse en Los Ángeles.

Cortesía de Luis B. Fargier G

Tabla 2.1. Combinaciones de carga básica en el método de los estados límite

CONDICIÓN	CARGA MAYORADA
BÁSICA	$U = 1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV$
SISMO	$U = 1.2 \cdot CM + CV + 1.0 \cdot S$
	$U = 0.9 \cdot CM + 1.0 \cdot S$

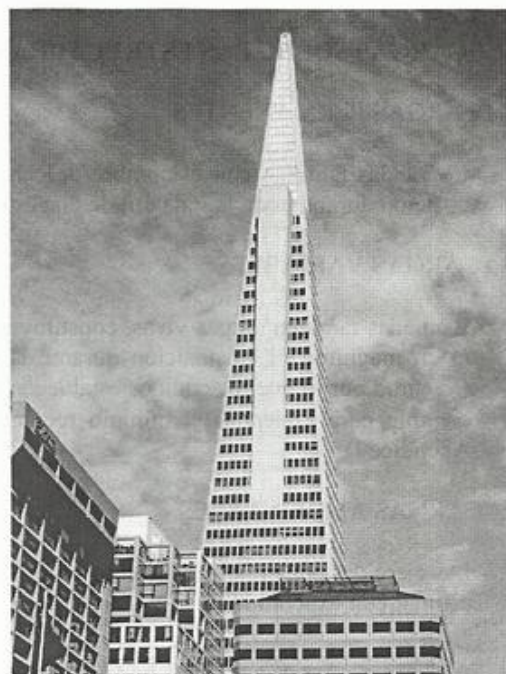


Fig. 2.10 Edificio Transamerica. San Francisco.

Cortesía de Luis B. Fargier G

2.9 DISEÑO

El diseño de edificaciones está generalmente regulado por un código o norma. La función de los códigos es especificar los requerimientos mínimos que el diseñador debe cumplir para que la edificación posea un grado de seguridad que la profesión puede considerar como aceptable. Los elementos de concreto armado se pueden diseñar o por esfuerzos de trabajo (esfuerzos admisibles) o por resistencia (diseño por estados límites).

a) DISEÑO POR ESFUERZOS DE TRABAJO (DISEÑO POR LÍNEA RECTA, ESFUERZOS ADMISIBLES)

Se diseña para un factor de seguridad uniforme. La ecuación general de diseño luce así,

$$\frac{\text{Resistencia (R)}}{\text{Factor de Seguridad (FS)}} > \text{Efecto de las cargas (Q)} \quad [2.7]$$

Si R y Q se conocieran con exactitud, bastaría con asegurarse que la resistencia R sea ligeramente superior a los efectos de las cargas Q y se pudiesen usar factores de seguridad cercanos a 1.0. En la práctica R y Q nunca se conocerán con exactitud (figuras 2.11 y 2.12) porque,

- Las cargas reales difieren de las asumidas en el diseño.
- Las resistencias reales de los materiales y elementos son distintas a las asumidas en el diseño.
- Los procedimientos de cálculo de las resistencias arrojan valores aproximados y no exactos.
- Las dimensiones de las piezas y la colocación del refuerzo varían al ser ejecutadas en obra con respecto a las especificaciones de diseño.

Por ello se adoptan factores de seguridad por el orden de 1.5 a 3.0.

b) DISEÑO POR ESTADOS ÚLTIMOS (DISEÑO A LA ROTURA)

Se diseña para factores de seguridad que son variables y dependen de las incertidumbres en estimar las cargas y resistencias de los elementos (ver Tabla 2.2). En general es un método menos conservador que el diseño por esfuerzos de trabajo. En esta metodología los efectos de las cargas de servicio (Q) son multiplicados por factores de carga (γ) y las resistencias últimas (R) son multiplicadas por factores de resistencia (ϕ), obtenidos en base a estudios estadísticos. La ecuación de diseño viene dada por,

$$\phi \cdot \text{Resistencia (R)} > \gamma \cdot \text{Efectos de las cargas (Q)} \quad [2.8]$$

Factores de Carga

Son menores que la unidad y reflejan,

- La variación entre la resistencia de los materiales asumida durante el diseño y la obtenida en obra por ejemplo F_y , f'_c y en el módulo de elasticidad E , E_c .
- Las incertidumbres relacionadas con las dimensiones geométricas ejecutadas en obra.
- Las incertidumbres implícitas en los modelos de cálculo de resistencias a flexión, corte, flexo-compresión, torsión, etc.; a partir de las propiedades de los materiales. Recordemos que los procedimientos que estudiaremos para el cálculo de resistencias y deformaciones arrojan valores aproximados y no exactos.
- A mayor dispersión en los datos para la estimación de una resistencia dada, menor es el factor ϕ . Por ejemplo para vigas dúctiles con gran capacidad de deformación cuyo comportamiento es bien descrito usando las hipótesis de vigas estudiadas en resistencia de materiales, $\phi = 0.90$. Para el mecanismo de falla más frágil y peligroso de todos que es el de corte, y del cual se conoce poco, las normas toman $\phi = 0.75$. Para columnas con elevadas cargas axiales las normas obligan a usar $\phi = 0.65$.

Factores de Resistencia

Están basados en estimaciones estadísticas de la magnitud de las cargas. Son independientes del tipo de material. Sean,

CM = Carga permanente o su efecto. También conocida como carga muerta.

CV = Carga variable o su efecto. Conocida como carga viva.

S = Carga sísmica o sus efectos.

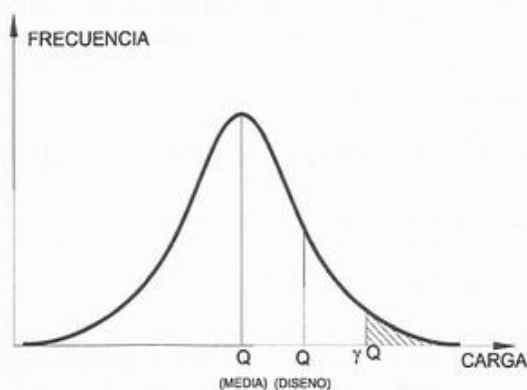


Fig. 2.11 Distribución de la carga sobre un elemento estructural, obtenida de muestreos estadísticos

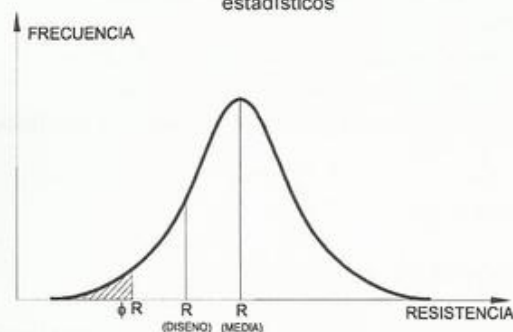


Fig. 2.12 Distribución de la resistencia de un elemento estructural, obtenido de muestreos estadístico

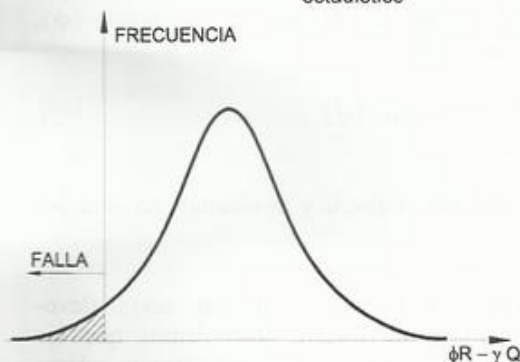


Fig. 2.13 Distribución probabilística de la relación entre la carga mayorada y la resistencia minorada

A mayor incertidumbre para estimar una carga, mayor será el correspondiente factor γ . Por ejemplo, las cargas muertas pueden ser estimadas con mayor exactitud que las vivas, por lo que son mayoradas por 1.2 y 1.6 respectivamente en el caso de carga básico (Tabla 2.1).

El método del diseño por estados límites está basado en estimaciones probabilísticas de las cargas y resistencias. Las figuras 2.11-2.12, muestran posibles distribuciones probabilísticas de la resistencia y carga a las que pudiese estar sujeto un elemento estructural dado. A la izquierda de la (Figura 2.13) se indican los efectos estructurales donde la resistencia resulta menor que las cargas que sobre el elemento actúan, lo que en teoría conllevaría a una falla.

El factor de seguridad resultante al aplicar el método de los estados límites dependerá de la relación entre CM/CV , y de los factores ϕ y γ según se indica en la Tabla 2.2. En edificios de vivienda la relación CM/CV es casi siempre un tanto mayor que 3.

Tabla 2.2. Factores de seguridad equivalentes que resultan de aplicar el método de los estados límites para el caso de carga básico: $1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV$

Tipo de elemento	ϕ	Relación CM/CV				
		4	3	2	1	0.5
Vigas y Columnas con baja carga axial	0.90	1.42	1.44	1.48	1.56	1.63
Columnas (alta carga axial)	0.65	1.97	2.00	2.05	2.15	2.26
Corte y Torsión	0.75	1.71	1.73	1.78	1.87	1.96

A los lectores interesados en profundizar en el tema de confiabilidad estructural que sirve de base para elaborar los estudios de la calibración de los factores de carga y resistencia, se les recomienda consultar el excelente tratado de Nowak y Collins (2000). Para el código ACI 318 estos estudios fueron realizados por Nowak y Szerszen (2001).

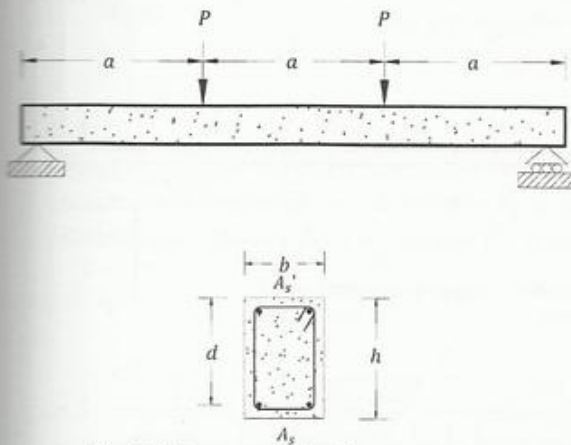


Fig. 3.1 Esquema de las vigas en estudio

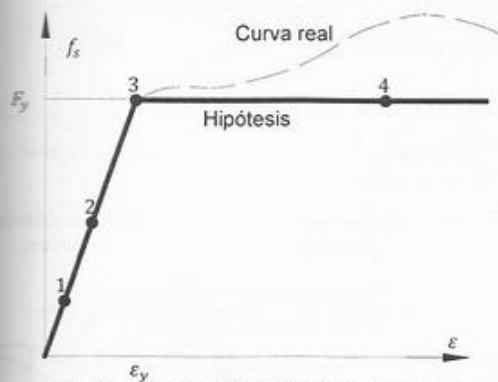


Fig. 3.2 Curva esfuerzo deformación del acero

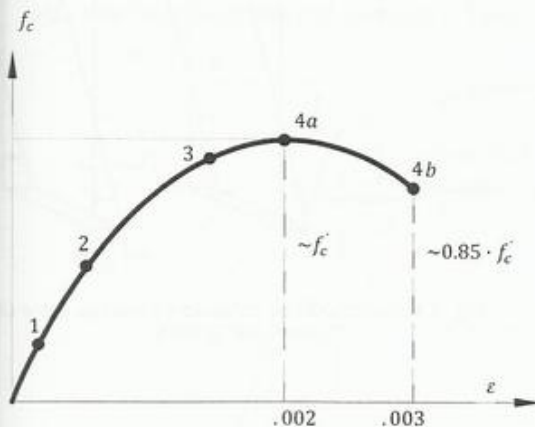


Fig. 3.3 Curva esfuerzo deformación del concreto

3.1 ENSAYOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Los ensayos fueron realizados en vigas rectangulares de ancho b , altura h y altura útil d , con estribos y cargadas en los tercios centrales (Figura 3.1), con baja pero suficiente cantidad de acero en la parte en tracción y acero mínimo en compresión. Las cargas P se aumentan desde cero hasta producir la falla, o sea desde $M = 0$ hasta $M = M_{\text{último}}$, donde $M = P \cdot a$, de acuerdo a la estática. La viga fallará por flexión pura en su zona central, sometida a M constante (corte igual a cero).

Sean,

- f_c = Esfuerzo de compresión (fibra superior)
- f_s = Esfuerzo de tracción en A_s
- ϵ_c = Deformación unitaria en el concreto en fibra superior
- f_t = Esfuerzo de tracción en el concreto en la fibra inferior
- x = Profundidad del eje neutro
- $n = E_s/E_c \sim 10$
- T = Fuerza de tracción en el acero
- f_{ca} = Esfuerzo admisible en el concreto $\cong 0.45 \cdot \sqrt{f'_c}$
- f_{sa} = Esfuerzo admisible en el acero
- z = Brazo entre el par de fuerzas C y T
- f_{tr} = Esfuerzo de rotura del concreto a tracción. Las normas recomiendan $= 2 \cdot \sqrt{f'_c}$
- ϕ = Curvatura $= \epsilon_c/c$. Es la rotación por unidad de longitud. La misma aumentará con el valor de ϵ_c y disminuirá con el aumento de c
- E_c = Módulo de elasticidad del concreto
- A_s = Área de acero en tracción
- A'_s = Área de acero en compresión
- $r = \text{rec} + \text{diam. del estribo} + (\text{diam. de } A_s) / 2$

En el transcurso del ensayo se presentan las siguientes etapas,

1. Entre $M = 0$ y $M = M_{\text{agrietamiento}}$ (entre puntos 0 y 1 de las figuras 3.2, 3.3 y 3.9) donde este último es el valor del momento que produce f_{tr} en la fibra más traccionada, iniciándose el agrietamiento del concreto en la fibra inferior (recordemos que el concreto resiste muy poco a los esfuerzos de tracción) figuras 3.4 y 3.6. Tanto el acero como el concreto hasta antes de ese momento resisten tracciones.

El diagrama de deformaciones unitarias es una recta y E_c es constante o sea que el diagrama de esfuerzos es también una recta $f_c = E_c \cdot \epsilon_c$ (Ley de Hooke).

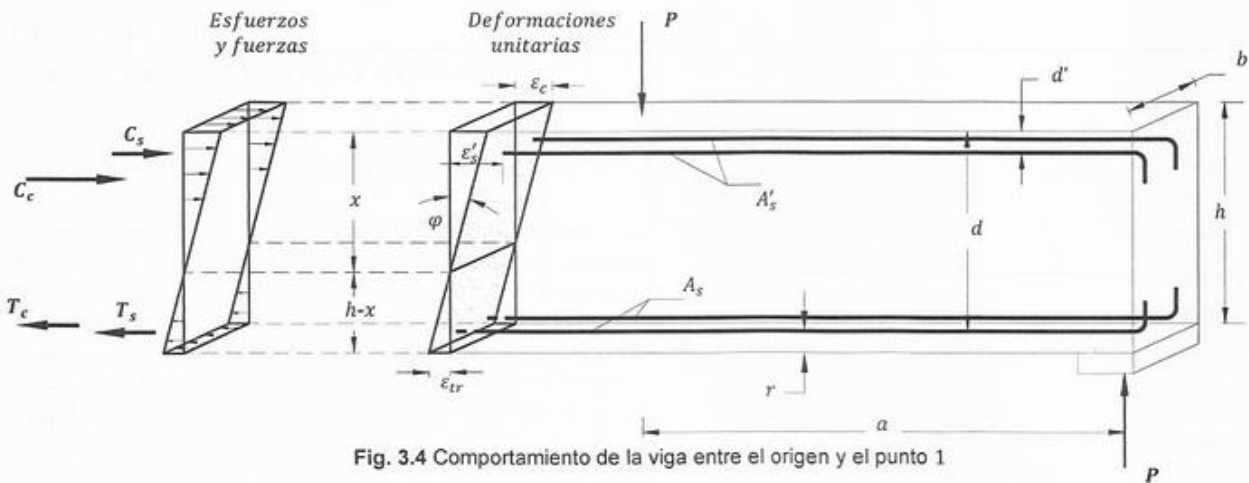


Fig. 3.4 Comportamiento de la viga entre el origen y el punto 1



Fig. 3.5 Agrietamiento de la viga entre el origen y el punto 1

Las propiedades de la sección transversal se pueden estimar con bastante precisión de acuerdo a,

$$I' = \frac{b \cdot h^3}{12} \dots \dots \dots \varphi = \frac{M_{agriet}}{E \cdot I'}$$

- Entre $M_{agrietamiento}$ y $M_{trabajo}$ (entre puntos 1 y 2 de las Figuras 3.2, 3.3 y 3.9) es decir desde el inicio del agrietamiento hasta alcanzar esfuerzos de trabajo en el acero o en el concreto. Se tiene: el diagrama de deformaciones unitarias se mantiene recto (Figura 3.8). El diagrama de esfuerzos-deformaciones del concreto se curva un poco, E_c varía muy poco (disminuye).

Con el aumento del momento, las grietas aumentan en número, se ensanchan y suben empujando al eje neutro hacia arriba (Figura 3.7). El concreto prácticamente no resiste tracción. Para esta sección agrietada tenemos,

$$I = \frac{b \cdot x^3}{3} + n \cdot A_s \cdot (d - x)^2 + (n - 1) \cdot A'_s \cdot (x - d')^2$$

I es menor que I'

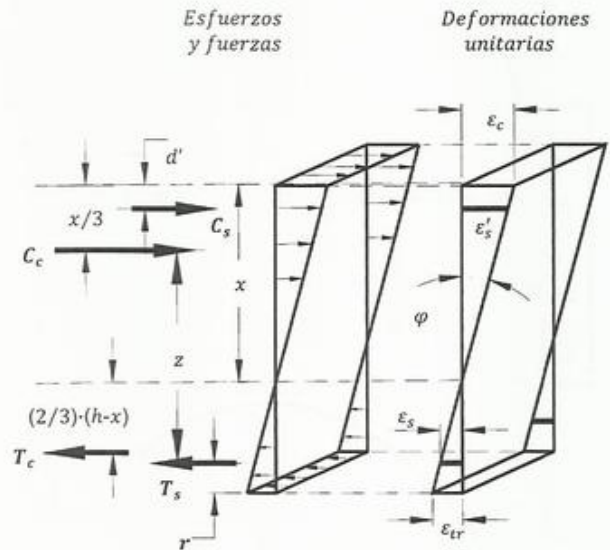


Fig. 3.6 Distribución de esfuerzos y fuerzas entre el origen y el punto 1



Fig. 3.7 Comportamiento de la viga entre el punto 1 y 2

3. Entre $M_{trabajo}$ y M_y (entre puntos 2 y 3 de las Figuras 3.2, 3.3 y 3.9) donde 3 es el punto en que el acero alcanza la deformación ε_y y el esfuerzo F_y de cedencia, mientras que en el concreto se tiene ε_c menor que la deformación última y f_c es menor que f'_c . (figuras 3.9 y 3.10). Se tiene,

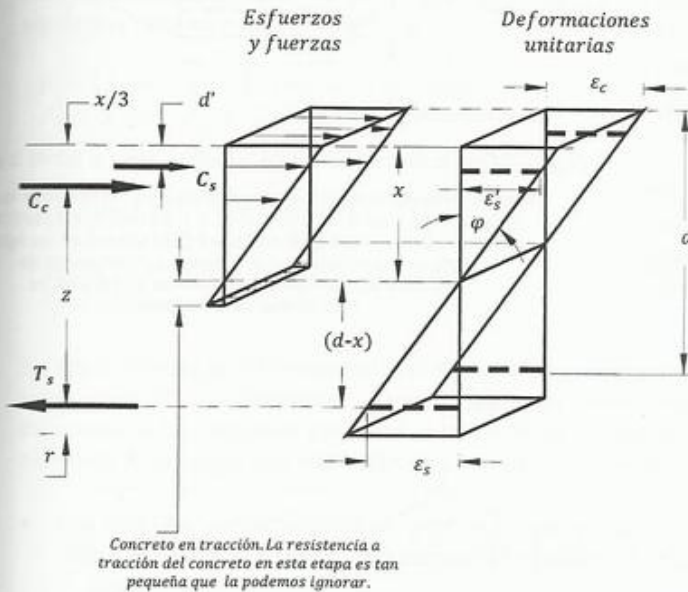


Fig. 3.8 Distribución de esfuerzos y fuerzas entre el punto 1 y 2

- El diagrama de deformaciones es recto.
- El diagrama esfuerzo-deformación del concreto se curva cada vez más. E_c disminuye rápidamente.
- El acero se comporta elásticamente.
- En el punto 3 tenemos $f_s = f_y$, $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ y $T = A_s \cdot f_y$.

Desde $M = 0$ hasta $M = M_y$, es decir entre los puntos 0 y 3 se tiene,

- Aumentan la tracción y la compresión unitarias totales.
- Aumenta el brazo de palanca z del par resistente. Por lo tanto el valor del momento $M = C \cdot z = T \cdot z$ aumenta rápidamente ya que los dos factores crecen en la zona 0-3 (el brazo z y las fuerzas: C y T).

4. Entre M_y y $M_{último}$ (entre puntos 3 y 4 de las Figuras 3.2, 3.3 y 3.9). A partir del punto 3 el acero cede y su deformación ε_s aumenta por encima de ε_y (en el escalón de cedencia esto se produce con incremento de esfuerzo despreciable); en el concreto ε_c tiene un valor aproximado de dos milésimas (0.002) cuando $f_c \cong f'_c$

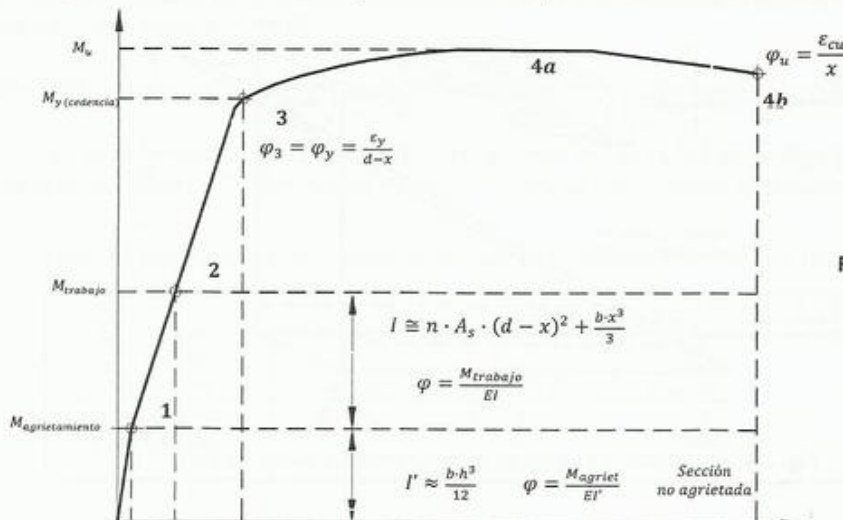


Fig. 3.9 Diagrama de Momento-Curvatura (ver Capítulo 18)

Las deformaciones ϵ_c y ϵ_s siguen aumentando hasta que en el concreto se alcanza la deformación última ϵ_{cu} y ocurre la falla final por aplastamiento del concreto (punto 4, Figura 3.9 y 3.12). El diagrama de deformaciones es casi recto y el de esfuerzos-deformaciones del concreto se curva considerablemente. (Figura 3.10).

El esfuerzo en el acero se mantiene casi constante $f_s = f_y$ si la rotura se produce en el escalón de fluencia o incluso se incrementa si la falla ocurriese en la zona de endurecimiento por deformación. El valor de z aumenta muy poco y como consecuencia se produce un ligero aumento del valor del momento M_u que es un poco mayor que M_y . En cambio la curvatura que desde 0 hasta 3 crece linealmente, aumenta mucho a partir del punto 3, teniéndose ϕ_u mucho mayor que ϕ_y .

La amplitud de la etapa 3-4 aumenta con la disminución del acero de tracción y el aumento del acero en compresión. La curvatura ϕ aumenta cuando x disminuye. El agrietamiento posible antes de la falla se muestra en la Figura 3.11.

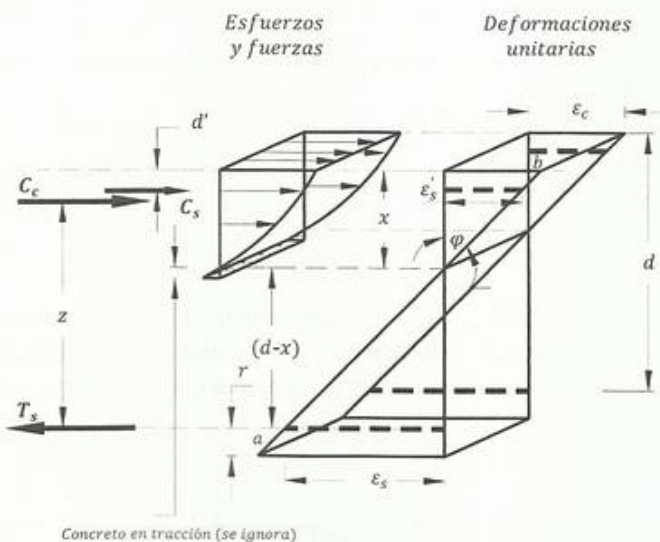


Fig. 3.10 Distribución de esfuerzos y fuerzas entre el punto 2 y 3

Nota: El orden de magnitud de la curvatura ϕ es tan pequeño que se cumple: $\tan(\phi) \approx \phi$ y también $\cos(\phi) \approx 1$. Es decir la longitud de la recta inclinada $a-b$ es igual a la altura útil d aunque en las figuras parezca mucho mayor. Ello obedece a la necesidad de amplificar las deformaciones unitarias en los gráficos para ilustrar los conceptos.

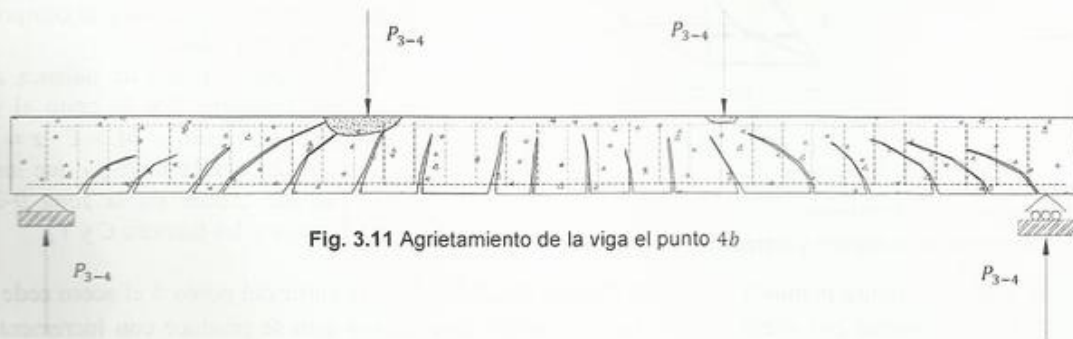


Fig. 3.11 Agrietamiento de la viga el punto 4b

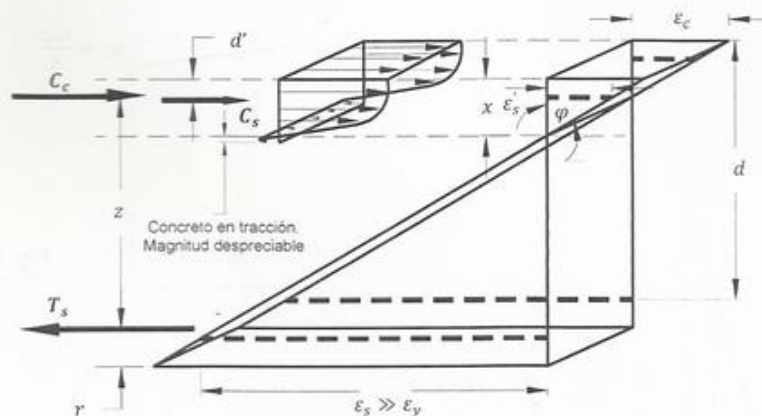


Fig. 3.12 Distribución de esfuerzos y fuerzas entre el punto 3 y 4

3.2 CAPACIDAD DE ROTACIÓN EN ARTICULACIONES

Se presenta un resumen de los ensayos realizados por Alan H. Mattock (1965), de la Asociación de Cemento Portland (P.C.A.), para determinar la capacidad de rotación de articulaciones plásticas en vigas de concreto armado (Figura 3.13). Las articulaciones plásticas pueden desarrollarse en elementos adecuadamente diseñados y se forman cuando el momento actuante alcanza la zona 3, lo que implica que las deformaciones, en este caso las rotaciones aumentan bajo incrementos de carga prácticamente nulos, en este caso, momentos. Los ensayos fueron realizados en vigas con las siguientes características (Tabla 3.1),

$$b = 15 \text{ cm}, d = 25 \text{ cm} \text{ ó } d = 50 \text{ cm}$$

$$A_s = 2 \#6 \quad A'_s = 2 \#3 \text{ ó },$$

$$A_s = 4 \#6 \quad A'_s = 2 \#3$$

$$\text{Estribos } 1/4" \text{ ó de } 3/8" (\#2 \text{ ó } \#3)$$

$$a \text{ 6.3 cm } 12.5 \text{ cm ó } 25 \text{ cm}$$

$$\text{Luces (L): 1.40 m, 2.80 m y 5.60 m}$$

$$F_y = 3300 \text{ y } 4200 \text{ kg/cm}^2$$

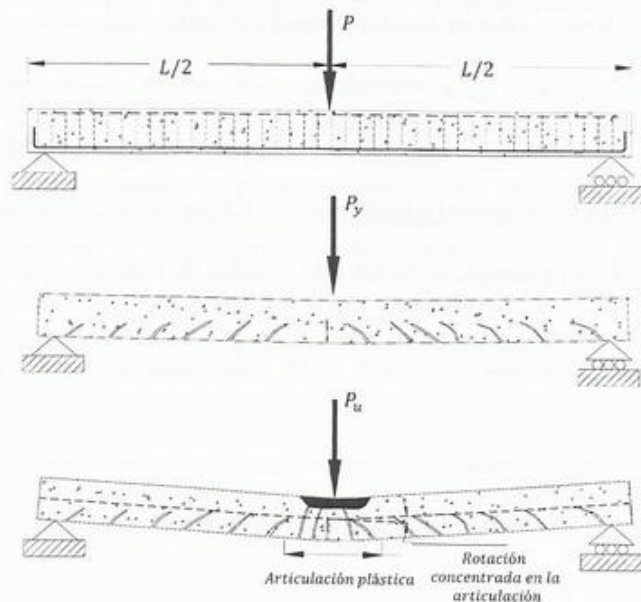


Fig. 3.13 Comportamiento de la viga ensayada por Mattock

Se aplica una carga P concentrada en el centro para obtener una condición de momento similar a la de un apoyo intermedio de viga continua. A menor luz corresponde mayor pendiente del diagrama de momentos y los esfuerzos en las secciones próximas al punto de aplicación de P disminuyen más rápidamente a medida que nos alejamos de la carga. Los resultados de los ensayos se pueden sintetizar así,

- Las primeras grietas visibles son verticales y se inician abajo (grietas por flexión) para valores entre el 15 y el 30% de la carga última P_u . Al aumentar P aquellas aumentan en número, se ensanchan y suben.
- Para $P = P_y$ o sea $M = M_y$ el acero A_s alcanza $F_s = F_y$ y una deformación $\epsilon_s = \epsilon_y$ por lo que comienza a ceder. Un ligero aumento de P produce $\epsilon_s > \epsilon_y$. Las grietas aumentan considerablemente a medida que crece ϵ_s y reducen la zona resistente a compresión, hasta que finalmente el concreto falla por aplastamiento.
- En la zona comprimida el descascaramiento (pérdida del recubrimiento superior) del concreto ocurre para valores de $\epsilon_c \approx 0.0025$ a 0.0035 .
- La falla final corresponde a deformaciones en el concreto ϵ_{cu} mucho mayor que 0.003 .

El valor ϵ_{cu} de la deformación última aumenta cuando disminuyen la luz de la viga y el valor de A_s , o cuando aumenta la relación A'_s/A_s y la cantidad de estribos o ligaduras que confinan al concreto.

Tabla 3.1 Resultados de los ensayos de las vigas ensayadas por Mattock, $b = 15 \text{ cm}$ $d = 25 \text{ cm}$

		$L = 1.40 \text{ m}$	$L = 2.80 \text{ m}$	$L = 5.60 \text{ m}$
$A_s = 5.70 \text{ cm}^2$	M_u/M_y	1.50	1.40	1.33
$A'_s = 1.42 \text{ cm}^2$	ϵ_{cu}	0.058	0.019	0.006
$\rho/\rho' = 4.00$	Estribos	#3 a 12.5 cm	#2 a 12.5 cm	#2 a 12.5 cm
$A_s = 11.40 \text{ cm}^2$	M_u/M_y	1.33	1.10	1.10
$A'_s = 1.42 \text{ cm}^2$	ϵ_{cu}	0.032	0.008	
$\rho/\rho' = 8.00$	Estribos	#3 a 6.3 cm	#3 a 12.5 cm	#2 a 12.5 cm

En la Tabla 3.1 se muestra un cuadro para la serie C de los ensayos de la Portland Cement Asociation. La relación A'_s/A_s es de 0.25 en el primer caso y de 0.125 en el segundo. Es oportuno hacer notar que en los apoyos de vigas en zona sísmica se tiene por norma como mínimo $A'_s/A_s = 0.50$ aproximadamente.

El valor de ϵ_{cu} puede calcularse aproximada y conservadoramente con la fórmula,

$$\epsilon_{cu} = 0.003 + 1.27/\alpha$$

Donde α es igual a la distancia de P al apoyo en centímetros.

En la práctica, la forma más sencilla de aumentar valor de ϵ_{cu} es mediante un confinamiento con estribos y ligaduras y preferiblemente con zunchos (ver capítulos 6 y 7).

4.1 INTRODUCCIÓN

El método de los esfuerzos admisibles permite estudiar el comportamiento del concreto armado bajo cargas de servicio, que son las que actúan sobre la estructura durante un día común y corriente. Las flechas (Figura 4.1), el agrietamiento, los esfuerzos de trabajo del concreto y el acero, y el estudio de la patología del concreto armado en estructuras existentes se hace con el método de los esfuerzos admisibles. Los conceptos en los que se fundamenta son una ampliación de los estudiados en los cursos de resistencia de materiales y enfocados adecuadamente contribuyen en la formación de los ingenieros.

La aparición de la metodología de diseño por estados últimos (Capítulo 5) desplazó desafortunadamente la enseñanza del método de los esfuerzos admisibles hasta el punto de desaparecer de los Pensum de estudios de muchas Universidades.

Muchísimas son las estructuras diseñadas por esfuerzos admisibles sin que hasta la fecha los autores tengan conocimientos de problemas encontrados en ellas derivados de la aplicación correcta del método. Es por ello que podemos concluir que esta metodología produce estructuras seguras y un tanto más costosas que las que se obtendrían al usar el método de rotura (ver ejemplos 4.3 y 5.9).



Fig. 4.1 Viga de concreto armado agrietada

4.2 HIPÓTESIS

1. La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta.
2. Toda la tracción la resiste el acero.
3. No hay esfuerzos iniciales en el acero.
4. Las secciones planas se conservan planas después de la flexión, es decir que las deformaciones unitarias ϵ son directamente proporcionales a sus distancias al eje neutro (Figura 4.2).
5. El módulo de elasticidad del concreto es constante dentro de los límites de trabajo. Se aproxima el diagrama de esfuerzos (f_c) deformaciones (ϵ), es una línea recta entre $f_c = 0$ y $f_c = 0.45 \cdot f'_c$, por lo tanto los esfuerzos son directamente proporcionales a sus distancias al eje neutro.

Las hipótesis 1 y 4 han sido comprobadas experimentalmente. La hipótesis 2 es válida en las grietas. Entre grietas el concreto sí resiste fuerzas de tracción. La hipótesis 5 que aproxima mediante una recta el diagrama de esfuerzo deformación f_c vs. ϵ_s entre $f_c = 0$ y $f_c = 0.45 \cdot f'_c$ que en realidad es ligeramente curvo, es la que define la teoría de los esfuerzos de trabajo (Figura 4.2).

Comparando los valores obtenidos por la teoría de la línea recta con los resultados experimentales, se tiene,

- Para fibras cercanas al eje neutro los esfuerzos calculados por línea recta son menores que los medidos.
- Lo contrario ocurre para fibras cercanas al borde comprimido.

Las secciones se calcularán de manera que los esfuerzos debidos a las cargas de trabajo sean menores o iguales a las fatigas o esfuerzos admisibles. Debe cumplirse,

$$f_c \leq f_{ca} \text{ y } f_s \leq f_{sa}$$

Donde f_s es el esfuerzo en el acero y f_{ca} y f_{sa} son los esfuerzos admisibles en el concreto y el acero, respectivamente.

Sus resultados son bastante buenos en flexión con acero en tracción, es decir con armadura sencilla. La presencia de acero de compresión desvía los resultados. Bajo compresión axial y flexo-compresión los esfuerzos obtenidos por línea recta pueden diferir considerablemente de los obtenidos experimentalmente debido al efecto del flujo plástico en el concreto.

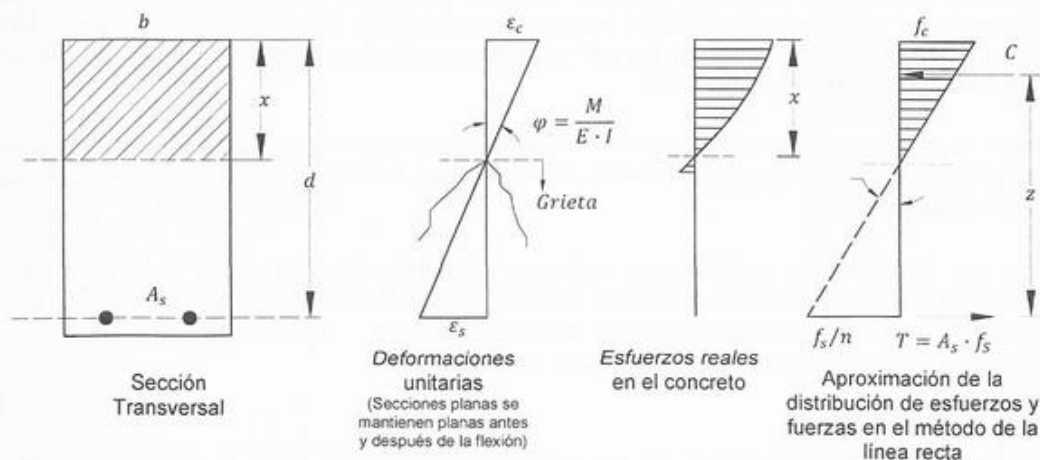


Fig. 4.2 Esfuerzos y deformaciones en el concreto vs. hipótesis del método de la línea recta

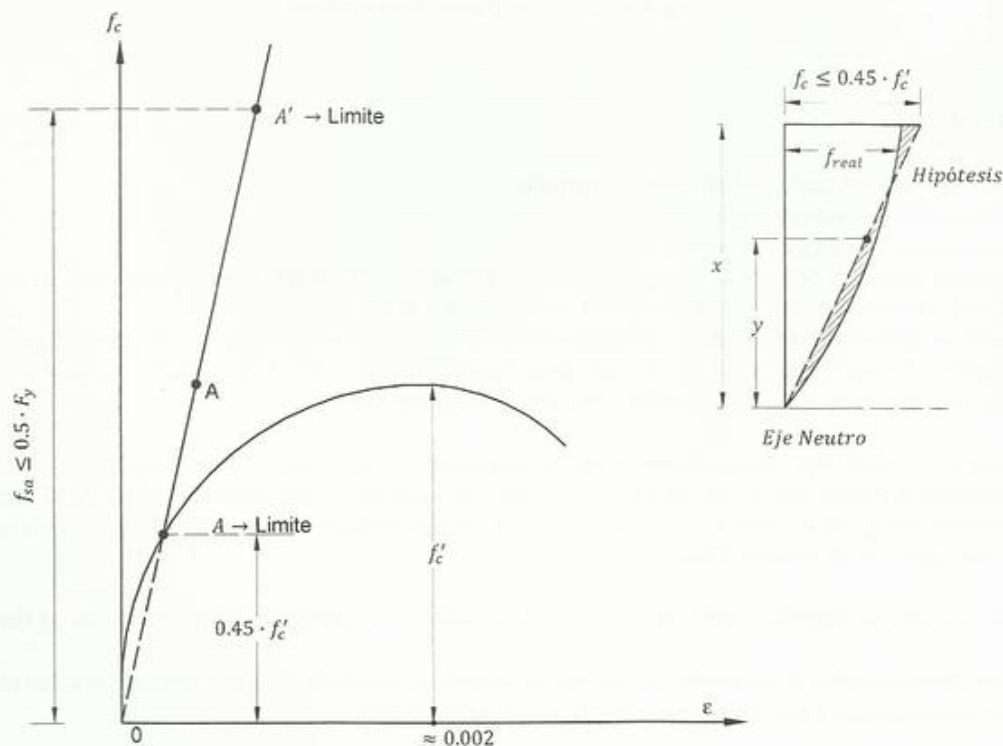


Fig. 4.3 Aproximación lineal del diagrama de esfuerzo deformación del concreto

4.3 SECCIÓN TRANSFORMADA

El estudio de elementos de concreto armado bajo condiciones de servicio donde los esfuerzos son linealmente proporcionales a las deformaciones (Ley de Hooke) se hace empleando el concepto de sección transformada (Figura 4.4). La sección de concreto armado puede sustituirse por una **homogénea** equivalente que puede ser,

- De puro concreto como es usual ó
- De puro acero, como en el caso de vigas compuestas (concreto y acero estructural...ver Capítulo 14).

Sean,

u = Área de concreto que sustituye al acero (área transformada) de tracción A_s

f = Esfuerzo en u

E_c = Módulo de elasticidad del concreto

E_s = Módulo de elasticidad del acero

$n = E_s/E_c$ = Relación modular

φ = Curvatura

Siendo la adherencia perfecta, el acero y el concreto se deforman igual y a una distancia $(d-x)$ del eje neutro; en el centroide de A_s , tenemos,

$$\frac{f_s}{E_s} = \frac{f}{E_c} \quad \therefore \quad f = \frac{f_s \cdot E_c}{E_s} \quad \text{si} \quad \frac{E_s}{E_c} = n \quad \dots \quad f = \frac{f_s}{n}$$

Por otra parte el área transformada debe resistir la misma tracción que resistiría A_s , luego,

$$T = A_s \cdot f_s = u \cdot f = u \cdot \frac{f_s}{n} \quad \therefore \quad u = n \cdot A_s$$

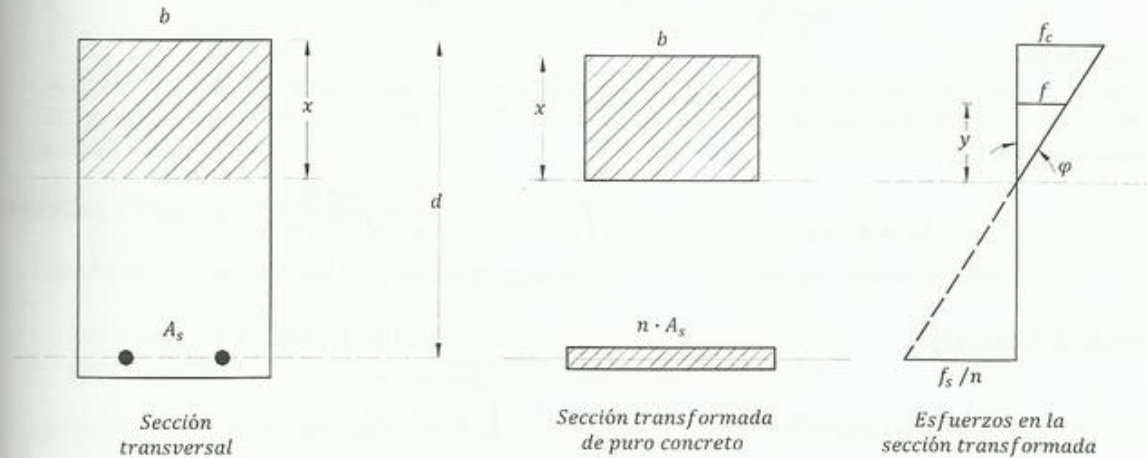


Fig. 4.4 Sección transformada

Si la sección de concreto armado tiene un ancho b , altura útil d , área de acero A_s trabajando a un esfuerzo f_s y área comprimida $b \cdot x$ sometida a un máximo esfuerzo f_c , la sección transformada tiene (Figura 4.4),

- Área de tracción transformada igual a $n \cdot A_s$ y esfuerzo unitario f_s/n . El área transformada $u = n \cdot A_s$ tendrá la misma altura e igual centroide que el de las cabillas, de manera que no varíen la altura útil ni el momento de inercia.
- Área de compresión $b \cdot x$.

En el caso del acero en compresión el área transformada v de A'_s se toma igual a $2 \cdot n \cdot A'_s$, (si se descuentan los vacíos del concreto ocupados por las cabillas: $(2 \cdot n - 1) \cdot A'_s$ ya que el esfuerzo real en A'_s es aproximadamente el doble del valor calculado por Línea Recta, debido a las deformaciones producidas por la retracción y el flujo plástico en el concreto, aunque en ningún caso se tomará un valor mayor que el admisible f_{sa} .

a) CASO GENERAL

Sección con zona comprimida de ancho variable, con aceros de tracción A_s y compresión A'_s sometida a la acción de un momento flector M . Los momentos estáticos y de inercia se calculan con relación al eje neutro (Figura 4.5).

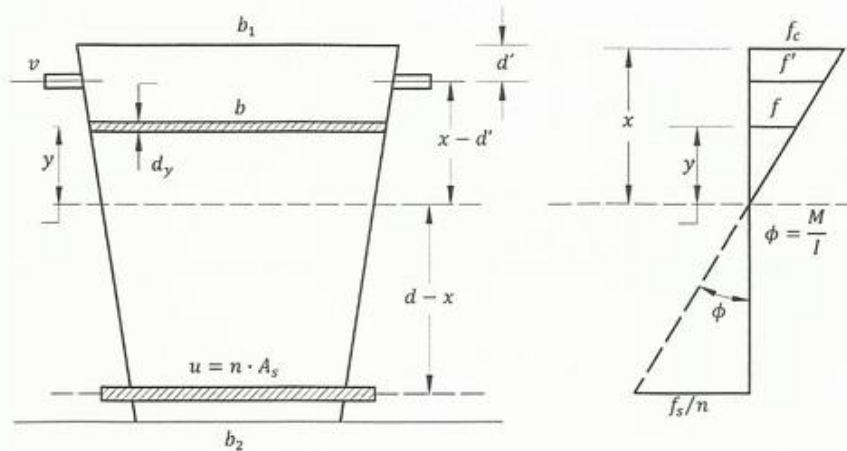


Fig. 4.5 Sección transformada. Caso general.

De la figura,

$$\frac{x}{d} = \frac{f_c}{f_c + \frac{f_s}{n}} \quad f = \frac{f_c}{x} \cdot y \quad f' = \frac{f_c}{x} \cdot (x - d')$$

Área comprimida,

$$A_0 = v + \int_0^x b \cdot dy$$

Momento estático (S),

$$S_0 = S_s + S_c = \underbrace{v \cdot (x - d')}_{\text{acero}} + \overbrace{\int_0^x b \cdot y \cdot dy}^{\text{Por encima de } x} = \underbrace{u \cdot (d - x)}_{\text{concreto}} = S$$

Momento de inercia (I),

$$I_0 = I_s + I_c = v \cdot (x - d')^2 + \overbrace{\int_0^x b \cdot y^2 \cdot dy}^{\text{Por encima de } x}$$

$$I = I_0 + \underbrace{u \cdot (d - x)^2}_{\text{por debajo de } x} \quad \dots \dots \dots \text{Momento de inercia total}$$

Compresión,

$$C_c = \int_0^x f \cdot b \cdot dy = f_c/x \cdot \int_0^x b \cdot y \cdot dy = (f_c/x) \cdot S_c$$

$$C_s = v \cdot f' = v \cdot f_c/x \cdot (x - d') = (f_c/x) \cdot S_s$$

$$C = C_c + C_s = f_c/x \cdot (S_c + S_s) = (f_c/x) \cdot S$$

Donde C_c y C_s son la compresión en el concreto y acero respectivamente.

De la expresión anterior se concluye que el valor de la compresión total es igual al producto del talud de la recta del diagrama de esfuerzos f_c/x y el momento estático de las áreas comprimidas con relación al eje neutro. La posición de la resultante de la compresión en el concreto C_c se determinará tomando momentos con relación al eje neutro,

$$C_c \cdot y_c = \int_0^x f \cdot b \cdot y \cdot d_y = f_c/x \int b \cdot y^2 \cdot d_y = f_c/x \cdot I_c$$

$$y_c = \frac{I_c}{S_c} \dots \dots \text{análogamente} \dots \dots y_0 = \frac{I_0}{S_0}$$

Distancias entre A_s y C_c

$$z_c = d - x + y_c$$

Distancias entre A_s y C

$$z = d - x + y_0 = \frac{M}{C} = \frac{I}{S}$$

Momento,

$$M = A_s \cdot f_s \cdot z = \frac{f_s \cdot I}{d - x} = \frac{f_c \cdot I}{x}$$

$$f_s = \frac{M \cdot n \cdot (d - x)}{I} \quad y \quad f_c = \frac{M \cdot x}{I}$$

Conocido el valor de x las fórmulas anteriores nos permiten calcular el momento de inercia, los esfuerzos, las fuerzas de compresión y de tracción $T = A_s \cdot f_s$ y la distancia entre ellas para una sección de cualquier forma (ancho variable).

b) ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Cuando un momento flector M , actúa en una sección de una viga o losa de concreto produce,

- compresión de un lado del eje neutro y
- tracción del otro,

que por equilibrio deben ser iguales. Además el momento exterior debe ser igual al momento interno, es decir

$$C = T = A_s \cdot f_s \dots \dots M = C \cdot z = T \cdot z$$

c) EJE NEUTRO

El valor de x se obtiene resolviendo la ecuación que resulta de igualar los momentos estáticos a ambos lados del eje neutro. Necesitamos conocer las dimensiones de la sección y las áreas de acero. Alternativamente el eje neutro se puede calcular iterando, al variar la posición de x hasta conseguir equilibrio, es decir $C = T$. Al conocer la posición del eje neutro de una sección podemos decir que el problema está prácticamente resuelto.

d) APLICACIONES DEL MÉTODO DE LA LÍNEA RECTA

Cálculo de flechas

Una viga sometida a cargas de trabajo se agrieta y el momento de inercia varía a lo largo de la viga. En efecto, entre grietas, tenemos concreto sano en tracción con I_{gruesa} correspondiente a toda la sección de concreto y en sitios donde hay grietas el momento de inercia se reduce considerablemente a $I_{agrieta}$. Así para calcular la flecha tomaremos un valor intermedio que se llama $I_{efectivo}$.

$$I_{efectivo} = R \cdot I_{gruesa} + (1 - R) \cdot I_{agrieta} \dots \text{siendo} \quad R = \left[\frac{M_{agrieta}}{M_{trabajo}} \right]^3 \quad [4.1]$$

Flechas instantáneas (δ_i)

Son las que producen las cargas de servicio inmediatamente después de su aplicación. Se pueden calcular suponiendo un comportamiento elástico del material, basados en una rigidez a flexión $E_c \cdot I_e$ usando cualquiera de los procedimientos estudiados en los cursos de resistencia y análisis estructural (área momento, doble integración, viga conjugada, trabajo virtual, entre otros).

Flechas adicionales a largo plazo (δ_{LP})

Las cargas que actúan sobre una viga por un largo periodo de tiempo, o también conocidas como cargas sostenidas, producen deflexiones adicionales a las que estas producen de forma instantánea. La viga continúa deformándose bajo el efecto de las cargas sostenidas debido al flujo plástico y retracción del concreto. Las flechas adicionales a largo plazo disminuyen,

- Con la cantidad de acero a compresión. A mayor cantidad de acero, menores deflexiones a largo plazo.
- Con la edad del concreto al momento que se aplica la carga sostenida. A mayor edad, menores serán las deflexiones a largo plazo.

El cálculo de las deflexiones a largo plazo se obtendrá multiplicando las flechas instantáneas (δ_i) causadas por la carga sostenida, por el factor γ (Tabla 4.1, Figura 4.6). Para mayor información se recomienda consultar a Branson (1965) y el trabajo de Corley y Sozen (1966).

Tabla 4.1 Multiplicadores para la obtención de flechas a largo plazo. (ACI 318-9.5.2.5)

TIEMPO	FACTOR ξ
3 meses	1
6 meses	1.2
1 año	1.4
5 años ó más	2.0

$$\gamma = \frac{\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} \quad [4.2, \text{ACI 9.11}] \quad \rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d}$$

Donde,

ξ = Factor dependiente del tiempo de actuación de las cargas sostenidas

ρ' = Cuantía de la armadura en compresión

- La flecha a largo plazo δ_{LP} viene dada por la expresión, $\delta_{LP} = \gamma \cdot \delta_i$.
- Para diseño preliminar se recomienda asumir $\gamma = 2$.

Las flechas calculadas deben ser comparadas con las tolerancias recomendadas por la norma (Tabla 4.2).

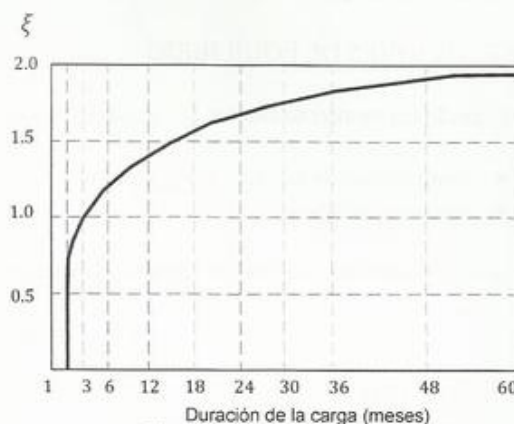


Fig. 4.6 Factor ξ vs. duración carga

Tabla 4.2 Límites de flechas. (ACI 318-08 Sección 9.5b)

TIPO DE MIEMBRO	FLECHAS A CONSIDERAR	FLECHA LÍMITE
Techos planos que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales susceptibles a ser dañados por grandes flechas	Flecha instantánea debida a la carga variable	$Luz / 180$
Entrepisos que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales susceptibles a ser dañados por grandes flechas	Flecha instantánea debida a la carga variable	$Luz / 360$
Techos en entrepisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales susceptibles de ser dañados por grandes flechas	Aquella parte de la flecha total que se produce después de la fijación de elementos no estructurales (suma de las flechas adicionales a largo plazo y flecha instantánea debida a carga variable)	$Luz / 480$
Techos o entrepisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que no son susceptibles a ser dañados por grandes flechas.		$Luz / 240$

Recomendaciones de diseño

El código de diseño ACI 318-08 ofrece recomendaciones para la estimación de las mínimas dimensiones de elementos estructurales para que no sea necesario verificar la flecha. Elementos con dimensiones menores a las establecidas por la Tabla 4.3 deben ser comprobados por flecha.

Tabla 4.3 Dimensiones mínimas de vigas y losas a menos que se verifiquen las flechas. (ACI 318-08 Tabla 9.5a)

MIEMBRO	ALTURA O ESPESOR MÍNIMO h			
	SIMPLEMENTE APOYADA	UN EXTREMO CONTINUO	AMBOS EXTREMOS CONTINUOS	VOLADIZO
	Miembros que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales susceptibles a ser dañados por grandes flechas			
Losas macizas	$Luz / 20$	$Luz / 24$	$Luz / 28$	$Luz / 10$
Vigas o losas nervadas	$Luz / 16$	$Luz / 18.5$	$Luz / 21$	$Luz / 8$

En edificios de mediana altura en zona sísmica se recomiendan alturas de vigas por el orden de $h = Luz/16 - Luz/10$ con el fin de minimizar desplazamientos laterales de los pórticos durante sismos.

Cálculo de la máxima separación entre barras para limitar el ancho de grietas

Los elementos de concreto armado se agrietan bajo cargas de servicio. El código ACI 318-08 limita el espaciamiento máximo entre barras para evitar anchos de las grietas por flexión a un valor aproximado de 0.4 mm .

$$s_{max} (\text{cm}) = \frac{105}{f_s (\text{ton/cm}^2)} - 2.5 \cdot c_c \leq \frac{85}{f_s (\text{ton/cm}^2)} \quad [4.3] \text{ ACI } 10 - 4$$

De donde c_c es el recubrimiento libre de la barra (cm), f_s lo podemos calcular con el método de los esfuerzos admisibles o alternativamente el código permite asumir $f_s = 0.6 \cdot F_y$. Para recubrimientos usuales de 7.0, 5.0, y 3.0 cm se obtienen separaciones máximas aproximadas de 20, 25 y 30 cm., al asumir $f_s = 0.6 \cdot F_y$ para ($F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$). Se recomienda consultar a Frosh (1999) y Gegerly y Lutz (1968) a los interesados en profundizar sobre agrietamiento y las separaciones de barras máximas.

Acero en los costados de vigas altas ($h \geq 90 \text{ cm}$)

Es necesario colocar barras en sus costados laterales para controlar el agrietamiento. Se dispondrán en ambos costados, y distribuirán verticalmente entre la cara en tracción y $h/2$. Frosh (2002) concluye que la cantidad de acero colocada en el costado no es la variable más trascendente para controlar que agrietamiento. Lo es el espaciamiento entre barras. Es más eficiente colocarlas a espaciamientos verticales pequeños. Se recomienda proveer en cada costado el 5% de A_s en barras de $3/8"$ distanciadas verticalmente a menos de 20 cm (Ver ACI 318-08, secciones 10.6.4-10.6.7 y el Capítulo 5 para calcular A_s y A'_s).

4.4 SECCIONES USUALES

Según su forma las secciones más usadas en vigas son en Te y rectangular. Para efectos de cálculo se entiende por sección rectangular aquella cuya área de compresión sea rectangular (Figura 4.7).

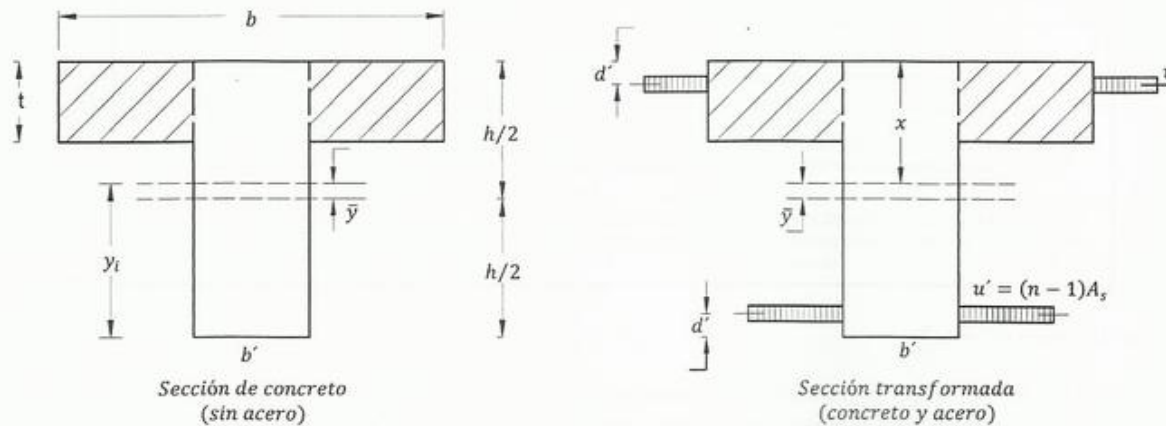


Fig. 4.7 Secciones no agrietadas. Método de esfuerzos admisibles

$$A_1 = b' \cdot h \dots \dots \dots A_2 = (b - b') \cdot t$$

$$A_c = A_1 + A_2 = \text{area total de concreto}$$

a) SECCION NO AGRIETADA DE CONCRETO (sin acero)

$$\bar{y} = \left(\frac{A_2}{A_c} \right) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \quad y_s = x = \frac{h}{2} - \bar{y} \quad y_i = \frac{h}{2} + \bar{y} = h - x$$

$$I_c = \frac{(A_1 \cdot h^2 + A_2 \cdot t^2)}{12} + \frac{A_2 \cdot (h - t)^2}{4} - A_c \cdot \bar{y}^2 \dots \dots M_{\text{agrietamiento}} = \frac{f_t \cdot I_c}{(h - x)} \quad [4.4a]$$

b) SECCIÓN NO AGRIETADA DE CONCRETO Y ACERO

$$u' = (n - 1) \cdot A_s \quad v = (n - 1) \cdot A'_s \quad A = A_c + u' + v \quad [4.5]$$

$$\bar{y} = \frac{A_2 \cdot (h - t)}{2} + \frac{(v - u') \cdot (h/2 - d')}{A}$$

$$x = \frac{h}{2} - \bar{y} \quad y_i = \frac{h}{2} + \bar{y}$$

$$I = \frac{(A_1 \cdot h^2 + A_2 \cdot t^2)}{12} + \frac{A_2 \cdot (h - t)^2}{4} + (u' + v) \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right)^2 - A \cdot \bar{y}^2$$

$$M_{\text{agrietamiento}} = \frac{f_t \cdot I}{(h - x)} \quad [4.4b]$$

f_{tr} es el valor del esfuerzo de rotura a tracción del concreto y según las Normas A.C.I.- 318-08, Ecuación 1.4 viene dado por,

$$f_{tr} = 2 \cdot \sqrt{f'_c} \quad \text{Por ejemplo, } f_{tr} = 28.8 \text{ kg/cm}^2 \text{ para } f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

e) SECCIÓN AGRIETADA DE CONCRETO Y ACERO (Figura 4.8)

$$v = (n - 1) \cdot A'_s \dots u = n \cdot A_s \dots w = u + v \dots W = w + A_2 \quad [4.6]$$

Eje neutro: eje sobre el cual el momento estático de la parte superior o comprimida es igual al de la zona de tracción,

$$b' \cdot \frac{x^2}{2} + A_2 \cdot \left(x - \frac{t}{2}\right) + v \cdot (x - d') = u \cdot (d - x) \quad [4.7a]$$

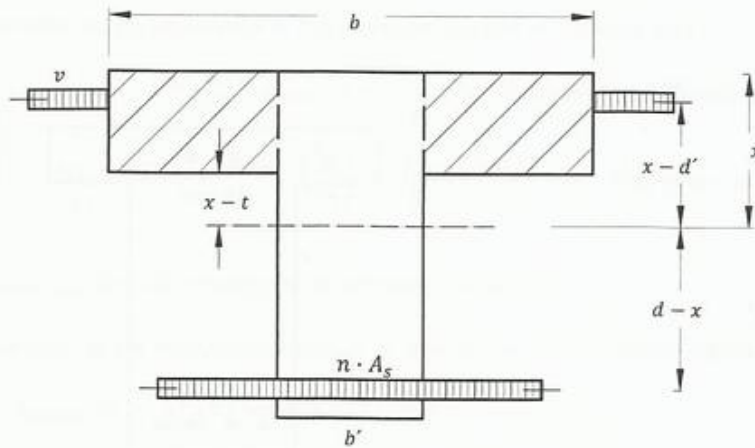


Fig. 4.8 Sección agrietada. Método de los esfuerzos admisibles

Al resolver la ecuación anterior nos queda un polinomio de segundo grado, cuya solución es,

$$x = \frac{\left(\sqrt{W^2 + 2 \cdot b' \cdot \left(u \cdot d + v \cdot d' + A_2 \cdot \frac{t}{2}\right)} - W\right)}{b'} \quad [4.7b]$$

La inercia viene dada por,

$$I = \frac{b' \cdot x^3}{3} + A_2 \cdot \left[\frac{t^2}{12} + \left(x - \frac{t}{2}\right)^2\right] + u \cdot (d - x)^2 + v \cdot (x - d')^2$$

Para secciones rectangulares se tiene, $A_2 = 0 \quad \therefore \quad W = w \dots b' = b \dots t = 0$

Si la zona comprimida es rectangular de ancho b , las expresiones anteriores se convierten en:

$$x = \frac{\left(\sqrt{w^2 + 2 \cdot b \cdot (u \cdot d + v \cdot d')} - w\right)}{b}$$

$$I = \frac{b \cdot x^3}{3} + u \cdot (d - x)^2 + v \cdot (x - d')^2$$

En caso de tracción arriba se sustituye b por b'

d) MOMENTOS Y ESFUERZOS

$$M = f_c \cdot \left(\frac{I}{x} \right) \quad [4.8a] \quad f_c = \left(\frac{M}{I} \right) \cdot x \quad [4.9a]$$

$$M = \frac{f_s}{n} \cdot \frac{I}{(d-x)} \quad [4.8b] \quad f_s = \left(\frac{M}{I} \right) \cdot n \cdot (d-x) \quad [4.9b]$$

EJEMPLO 4.1

Cálculo de x , I , $M_{agrietamiento}$, $M_{trabajo}$

$$\begin{aligned} f'_c &= 200 \text{ kg/cm}^2 \\ h &= 55 \text{ cm} \\ F_y &= 3600 \text{ kg/cm}^2 \\ b' &= 30 \text{ cm} \\ E_s &= 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\ b &= 60 \text{ cm} \\ d &= 50 \text{ cm} \\ A_s &= 20 \text{ cm}^2 \\ d' &= \text{rec} = 5 \text{ cm} \\ A'_s &= 10 \text{ cm}^2 \\ t &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

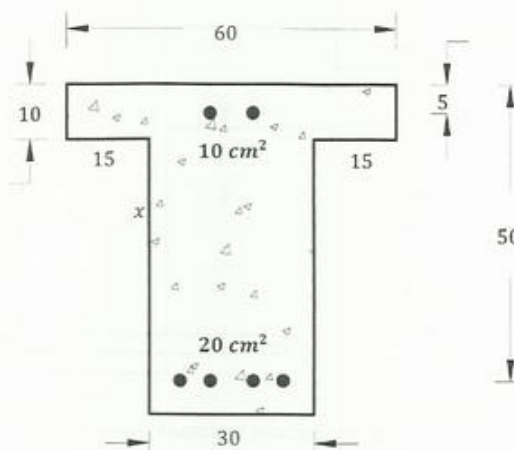


Fig. 4.9 Viga del Ejemplo 4.1

Se pide

$M_{agrietamiento}$, inercia, x , $M_{trabajo}$ para las sección de la Figura 4.9. Comparar los resultados con los de una sección rectangular de ancho $b = 30 \text{ cm}$ y $h = 55 \text{ cm}$ con y sin acero. Esfuerzos en el acero y concreto para $M = 13000 \text{ kg} \cdot \text{m}$. $I_{efectivo}$ para $M = 12455 \text{ kg} \cdot \text{m}$ (Sección T).

Valores preliminares de los esfuerzos admisibles en el concreto (f_{ca}) y acero (f_{sa}),

$$f_{ca} = 0.45 \cdot f'_c = 90 \text{ kg/cm}^2 \quad E_c = 15000 \cdot \sqrt{f'_c} = 212132 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{sa} = 0.45 \cdot F_y = 1620 \text{ kg/cm}^2 \quad n = E_s/E_c = 10 \text{ (aproximado)}$$

$$f_{tr} = 2 \cdot \sqrt{f'_c} = 28.2 \text{ kg/cm}^2$$

Momento de agrietameinto

- $M_{agrietamiento}$ Sección T de concreto (sin acero)

$$A_1 = 30 \cdot 55 = 1650 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = (15 \cdot 10) \cdot 2 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 1950 \text{ cm}^2$$

$$(h/2) - (t/2) = 22.5 \text{ cm}$$

Eje neutro,

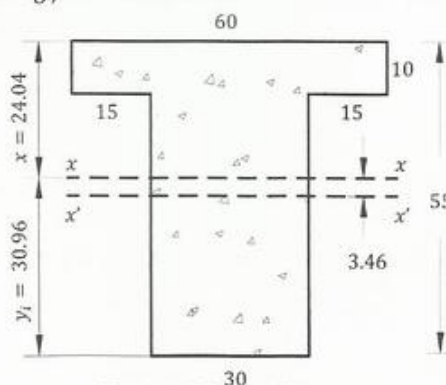


Fig. 4.10 Viga del Ejemplo 4.1
Sección T de concreto no agrietada (sin acero)

$$\bar{y} = (300) \cdot \frac{(22.5)}{1950} = 3.46 \text{ cm}$$

$$\therefore x = 27.5 - \bar{y} = 24.04 \text{ cm}$$

$$I_{x'x'} = 30 \cdot (55)^3 / 12 + 300 \cdot (100/12 + 22.5^2) = 570312.5 \text{ cm}^4$$

$$I_{xx} = I_{gruesa} = 570312.5 - 1950 \cdot (\bar{y})^2 = 546948 \text{ cm}^4$$

El momento de agrietamiento lo calcularemos usando la Fórmula 4.4a

$$M_{agrietamiento} : h - x = (55 - 24.0385) = 30.9615 \text{ cm} = y_i$$

$$M_{agrietamiento} = f_t \cdot \left(\frac{I_{xx}}{y_i} \right) = 498165 \text{ kg} \cdot \text{cm}; \quad M_{agrietamiento} = 4982 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

- $M_{agrietamiento}$ Sección rectangular de concreto (sin acero)

Ignoraremos el ala. Sección rectangular de $b = 30 \text{ cm}$ y $h = 55 \text{ cm}$. Aplicaremos 4.4a.

$$I_{xx} = I_{gruesa} = b \cdot h^3 / 12 = 415937.5 \text{ cm}^4$$

$$M_{agrietamiento} = f_t \cdot \left(\frac{I_{xx}}{h/2} \right) = 28.2 \cdot 415937.5 / 27.5 = 4265 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

- $M_{agrietamiento}$ Sección T de concreto armado (con acero)

Calcularemos las áreas de acero equivalente en concreto con la Ecuación 4.5

$$u' = (n - 1) \cdot A_s = (10 - 1) \cdot 20 = 180 \text{ cm}^2$$

$$v = (n - 1) \cdot A'_s = (10 - 1) \cdot 10 = 90 \text{ cm}^2$$

$$A = 1650 + 300 + 270 = 2220 \text{ cm}^2$$

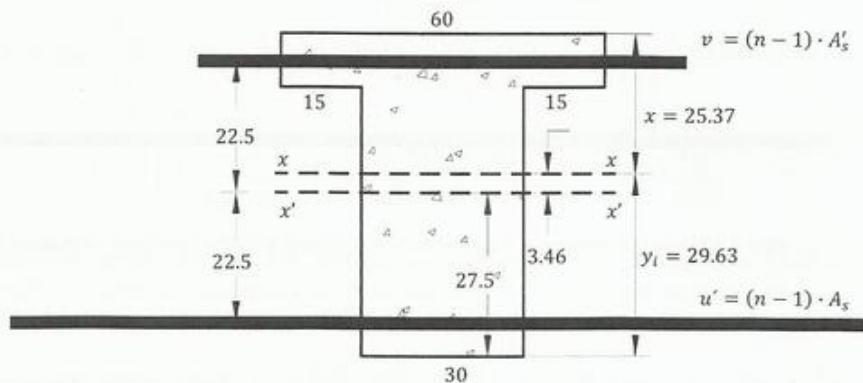


Fig. 4.11 Viga del ejemplo 4.1 Sección T de concreto armado no agrietada (con acero)

$$\bar{y} = (300) \cdot (22.5) + (90 - 180) \cdot (22.5) / 2220 = 2.1284 \text{ cm}$$

$$x = (h/2) - \bar{y} = 27.5 - 2.1284 = 25.37 \text{ cm}$$

$$\text{Inercia, } I_{x'x'} = 570312.5 + (270) \cdot (22.5)^2 = 707000 \text{ cm}^4$$

$$I_{xx} = 707000 - 2200 \cdot \bar{y}^2 = 696943 \text{ cm}^4$$

El agrietamiento lo calcularemos con $4.4b$, $h - x = 29.63 \text{ cm} = y_i$

$$M_{agrietamiento} = f_t \cdot \frac{I_{xx}}{y_i} = 28.2 \cdot \frac{696943}{29.6284} = 663343 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 6633 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

- $M_{agrietamiento}$ Sección rectangular de concreto armado (con acero) $b = 30 \text{ cm}$ y $h = 55 \text{ cm}$

$$A = 1650 + 270 = 1920 \text{ cm}^2 \quad \bar{y} = (-90) \cdot (22.5) / 1920 = -1.0547 \text{ cm}$$

$$x = 27.5 - \bar{y} = 28.55 \text{ cm} \quad y_i = h - x = 26.45 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = I_{agrietamiento} \frac{415937.5}{b \cdot h^3 / 12} + (270) \cdot (22.5)^2 = 552625 \text{ cm}^4;$$

$$M_{agrietamiento} = f_t \cdot \frac{I_{agrietamiento}}{y_i} = 5892 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Al comparar los valores de la sección de concreto sin acero con los de la sección armada no agrietada estos son,

$$\underbrace{\frac{\text{sin acero}}{4982 \text{ kg} \cdot \text{m}}}_{\text{sección en T}} \text{ vs. } \underbrace{\frac{\text{con acero}}{6633 \text{ kg} \cdot \text{m}}}_{\text{sección en T}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\frac{\text{sin acero}}{4265 \text{ kg} \cdot \text{m}}}_{\text{sección rectangular}} \text{ vs. } \underbrace{\frac{\text{con acero}}{5892 \text{ kg} \cdot \text{m}}}_{\text{sección rectangular}}$$

Propiedades de la sección T de concreto armado agrietada (con acero)

Al aplicar la Ecuación 4.6

$$u = n \cdot A_s = 10 \cdot 20 = 200 \text{ cm}^2$$

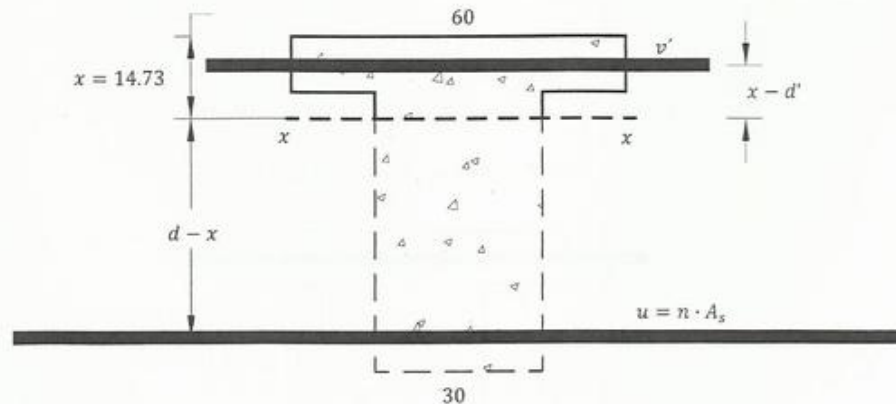


Fig. 4.12 Viga del ejemplo 4.1 Sección T de concreto armado agrietada (con acero)

Momentos estáticos con relación al eje neutro (Ecuación 4.7a),

$$15 \cdot x^2 + 300 \cdot (x - 5) + 90 \cdot (x - 5) = 200 \cdot (50 - x) \text{ Resolviendo esta ecuación,}$$

$$x = 14.73 \text{ cm} \quad d - x = 35.27 \text{ cm} \quad x - d' = 9.73 \text{ cm}$$

Momento de Inercia,

$$\frac{I_{xx}}{I_{agrietada}} = 30 \cdot x^3/3 + 300 \cdot (100/12) + (9.7346)^2 + 200 \cdot (d-x)^2 + 90 \cdot (x-d')^2$$

$$I_{agrietada} = 62918 + 257258 = 320176 \text{ cm}^4$$

$$I_{xx}/x = 21730 \text{ cm}^3 ; I_{xx}/(d-x) = 9079 \text{ cm}^3 ; I_{xx}/(x-d') = 32890 \text{ cm}^3$$

Sección rectangular de concreto armado agrietada (con acero)

Tenemos $b = 30 \text{ cm}$, $d = 50 \text{ cm}$. Al aplicar la Ecuación 4.7a,

$$15 \cdot x^2 + 90 \cdot (x-5) = 200 \cdot (50-x) \quad \text{de donde} \quad x = 18.44 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = I_{agrietada} = 10 \cdot x^3 + 90 \cdot (x-5)^2 + 200 \cdot (50-x)^2 \quad \therefore \quad I = 278166 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_{xx}}{x} = 15083 \text{ cm}^3 ; \quad \frac{I_{xx}}{d-x} = 8815 \text{ cm}^3$$

Momento de trabajo para la sección T

$$M = \frac{f_{sa}}{n} \cdot \frac{I_{agrietada}}{d-x} = \frac{1620}{10} \cdot 9079 = 1470800 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 14708 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad [4.8b]$$

$$f_c = \frac{f_{sa}}{n} \cdot \frac{x}{d-x} = \frac{1620}{10} \cdot \frac{14.73}{50-14.73} = 67.7 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < f_{ca} = 90 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad [4.9a]$$

Momento de trabajo para la sección rectangular

$$M = \frac{f_{sa}}{n} \cdot \frac{I_{agrietada}}{d-x} = \frac{1620}{10} \cdot 8815 = 1428030 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 14280 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad [4.8b]$$

$$f_c = \frac{f_{sa}}{n} \cdot \frac{x}{d-x} = \frac{1620}{10} \cdot \frac{18.44}{50-18.44} = 94.65 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} > f_{ca} = 90 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad [4.9a]$$

Siendo f_c mayor que f_{ca} , calcularemos el momento así,

$$M = f_{ca} \cdot \frac{I_{agrietada}}{x} = 90 \cdot (15083) = 1357470 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 13575 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad [4.8a]$$

$$f_s = \left[M \cdot \frac{d-x}{I_{agrietada}} \right] \cdot n = \left(\frac{1357470}{8815} \right) \cdot 10 = 1540 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad [4.9b]$$

En este caso el acero de tracción trabaja por debajo de su límite $f_s = 1540 \text{ kg/cm}^2 < f_{sa} = 1620 \text{ kg/cm}^2$. Cuando el concreto y el acero de tracción trabajan al máximo, es decir a f_{ca} y f_{sa} , la sección se denomina balanceada.

Esfuerzo en el acero de tracción para $M = 13000 \text{ kg} \cdot \text{m}$

Sección en Te, aplicando las ecuaciones 4.10 y 4.8 respectivamente

$$f_s = \left[M \cdot \frac{d - x}{I_{\text{agrietada}}} \right] \cdot n = [1300000/9079] \cdot 10 = 1432 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c = M \cdot \frac{x}{I_{xx}} = 1300000/21730 = 59.8 \text{ kg/cm}^2$$

Sección rectangular,

$$f_s = \left[M \cdot \frac{d - x}{I_{\text{agrietada}}} \right] \cdot n = [1300000/8815] \cdot 10 = 1475 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c = M \cdot \frac{x}{I_{\text{agrietada}}} = (1300000/15083) = 86.2 \text{ kg/cm}^2$$

Valor del momento de inercia efectivo sección T

Es un valor comprendido entre el momento de inercia de la sección armada agrietada ($I = 320176 \text{ cm}^4$) y el momento de inercia de la sección de concreto sin acero ($I_c = 546948 \text{ cm}^4$). Momento de inercia efectivo (Ecuación 4.1).

$$I_{\text{efectivo}} = R \cdot I_{\text{gruesa}} + (1 - R) \cdot I_{\text{agrietada}} \quad \text{siendo} \quad R = \left[\frac{M_{\text{agrietamiento}}}{M_{\text{trabajo}}} \right]^3$$

Para un momento $M = 12455 \text{ kg} \cdot \text{m}$ y siendo en nuestro problema el momento de agrietamiento para la sección de concreto sin acero igual a $4982 \text{ kg} \cdot \text{m}$, tenemos,

$$R = (4982/12455)^3 = 0.064 \dots \dots (1 - R) = 0.936$$

$$I_{\text{efectivo}} = 0.064 \cdot 546948 + 0.936 \cdot 320176 = 334690 \text{ cm}^4$$

Este valor (que en ningún momento puede ser mayor que la inercia de la sección de concreto sin acero, I_{gruesa}), se utiliza para calcular la flecha debida a un momento exterior igual a $12455 \text{ kg} \cdot \text{m}$. Cuando se trate de vigas continuas es más exacto calcular I_{efectivo} tanto en el apoyo como en el tramo y tomar un valor medio. A continuación se presenta un resumen de los valores obtenidos en el problema resuelto,

$$b = 60 \text{ cm} \quad h = 55 \text{ cm} \quad f_{ca} = 90 \text{ kg/cm}^2$$

$$b' = 30 \text{ cm} \quad d = 50 \text{ cm} \quad f_{sa} = 1620 \text{ kg/cm}^2$$

$$t = 10 \text{ cm} \quad d' = 5 \text{ cm} \quad A_s = 20 \text{ cm}^2 \quad A'_s = 10 \text{ cm}^2$$

Tabla 4.4 Resumen de resultados del Ejemplo 4.1

	Sección sin acero		Sección con acero $A'_s = 10 \text{ cm}^2$ $A_s = 20 \text{ cm}^2$				Unidades
	No grietada		No grietada		Agrietada		
	Rectangular	T	Rectangular	T	Rectangular	T	
A	1650	1950	1920	2220			cm ²
x	27.5	24.04	28.55	25.37	18.44	14.73	cm
I	415938	546948	550489	696943	278166	320176	cm ⁴
M _{agrietamiento}	4265	4982	5870	6633			kg · m
M _{trabajo}					13574	14708	kg · m

La relación entre $M_{\text{agrietamiento}}$ y M_{trabajo} es aproximadamente igual a 0.33 (para el concreto solo) y a 0.45 (para el concreto armado). ■

EJEMPLO 4.2

$$\begin{aligned}
 b' &= 30 \text{ cm} \\
 b &= 80 \text{ cm} \\
 h &= 56 \text{ cm} \\
 t &= 10 \text{ cm} \\
 d &= 50 \text{ cm} \\
 f_{ca} &= 94.5 \text{ kg/cm}^2 \\
 f_{sa} &= 1680 \text{ kg/cm}^2 \\
 n &= 10
 \end{aligned}$$

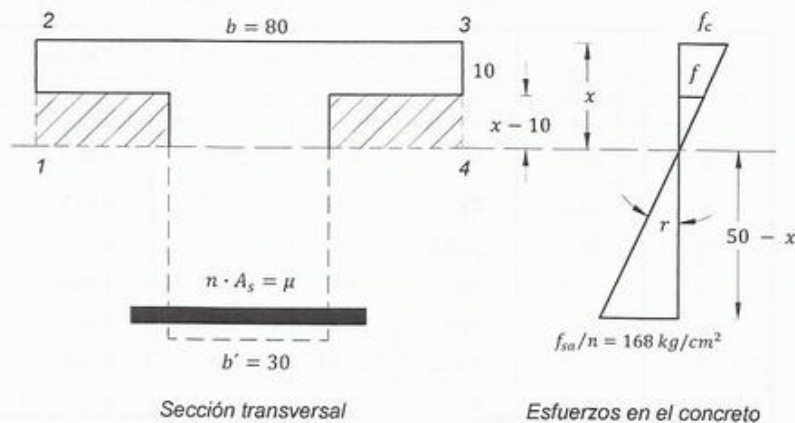


Fig. 4.13 Viga del Ejemplo 4.2

Se pide,

Calcular los valores de f_c , z , A_s y M para distintos valores de x si el acero trabaja al máximo $f_s = 1680 \text{ kg/cm}^2$ para tracción abajo (Figura 4.2) y tracción arriba..... $f_s/n = 168 \text{ kg/cm}^2$ de la Figura 4.13,

$$r = \frac{168}{(50 - x)}$$

Luego,

$$f_c = r \cdot x \quad \text{y} \quad f = r \cdot (x - 10)$$

• Para tracción abajo

Descomponemos la sección en dos rectángulos: uno de ancho $b = 80 \text{ cm}$ y altura x , (1-2-3-4) y el otro de ancho $b - b' = 50 \text{ cm}$ y altura $x - 10$ (área sombreada), (Figura 4.13) así tenemos,

Para el rectángulo de ancho $b = 80 \text{ cm}$,

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \widetilde{80} \cdot f_c \cdot x \quad \dots \quad z_1 = 50 - \frac{x}{3} \quad \dots \quad M_1 = C_1 \cdot \frac{z_1}{100} \text{ en kg} \cdot \text{m}$$

Para el rectángulo de ancho $b = 50 \text{ cm}$,

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \widetilde{50} \cdot f \cdot (x - 10) \quad \dots \quad z_2 = 40 - \frac{(x - 10)}{3} \quad \dots \quad M_2 = C_2 \cdot \frac{z_2}{100} \text{ en kg} \cdot \text{m}$$

Totales,

$$C = C_1 - C_2 \quad \dots \quad z = \frac{M}{C} \quad \dots \quad M = M_1 - M_2 \text{ si } x > t$$

El área de acero la calcularemos empleando la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales, $A_s = C/f_{sa}$

• Para tracción arriba

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot f_c \cdot \widetilde{30} \cdot x \quad A_s = \frac{C_1}{f_{sa}} \quad M = C_1 \cdot \left[d - \frac{x}{3} \right]$$

Los resultados se resumen en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5 Resumen de resultados del Ejemplo 4.2

x	f'_c (kg/cm^2)	Tracción abajo (ala comprimida)			Tracción arriba (ala traicionada)		
		z (m)	A_s (cm^2)	M ($kg \cdot m$)	z (m)	A_s (cm^2)	M ($kg \cdot m$)
6	22.9	0.480	3.27	2639	0.480	1.23	990
8	32.0	0.473	6.10	4847	0.473	2.29	1818
10	42.0	0.467	10	7840	0.467	3.75	2940
12	53.1	0.461	14.89	11540	0.460	5.68	4393
14	65.3	0.457	20.67	15864	0.453	8.17	6220
16	79.1	0.453	27.47	20910	0.447	11.29	8475
18	94.5	0.449	35.50	26802	0.440	15.19	11227

Los esfuerzos admisibles para el concreto se han asumido tradicionalmente como $f_{ca} = 0.45 \cdot f'_c$ y en este caso de acero de $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ (el más utilizado) el esfuerzo admisible toma $f_{sa} = 0.40 \cdot F_y$. Esto corresponde a factores de seguridad de 2.2 para el concreto y de 2.5 para el acero. En cambio, para el método de rotura el factor de seguridad definido por la relación (momento último / momento de trabajo multiplicada por 1/0.90) no alcanza el valor de 1.80. ■

Observaciones

- f_c aumenta con x hasta llegar al máximo admisible (94.5 kg/cm^2) que corresponde a la sección balanceada, para la cual los dos materiales trabajan al máximo.
- z ó sea el brazo de palanca del par resistente $C = T$, disminuye al aumentar x . Para el caso de tracción arriba con sección comprimida rectangular o para tracción abajo y además $x = t$, tenemos $z = d - x/3$. Para la sección en T el valor de z puede aproximarse utilizando $z = d - x/2$ y para la rectangular podemos tomar aproximadamente $z = 0.88 \cdot d$.
- M , es decir el momento y A_s , aumentan con x ; a medida que M aumenta crecen C y T , (las fuerzas del par), y por lo tanto $A_s = T/f_{sa}$ y el área comprimida de concreto y con ella x .
- En el caso de tracción abajo, $x = t = 10 \text{ cm}$ determina un valor límite del momento $M = 7840 \text{ kg} \cdot m$. Si el momento exterior es mayor que 7840 se cumple $x > t$ (zona comprimida en forma de T) y si es menor que 7840 tendremos x menor que $t = 10$ (zona comprimida rectangular de ancho igual a $b = 80$).

EJEMPLO 4.3

Calcular A_s para $M_{CM} = 22500 \text{ kg} \cdot m$ $M_{CV} = 5625 \text{ kg} \cdot m$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \quad f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad d' = 8 \text{ cm}, \quad n = 10, \quad b = 30 \text{ cm}, \quad d = 60 \text{ cm}$$

$$M_{CM} + M_{CV} = 28125 \text{ kg} \cdot m \quad f_{sadm} = 0.4 \cdot F_y = 1680 \text{ kg/cm}^2 \quad f_{cadm} = 0.45 \cdot f'_c = 112 \text{ kg/cm}^2$$

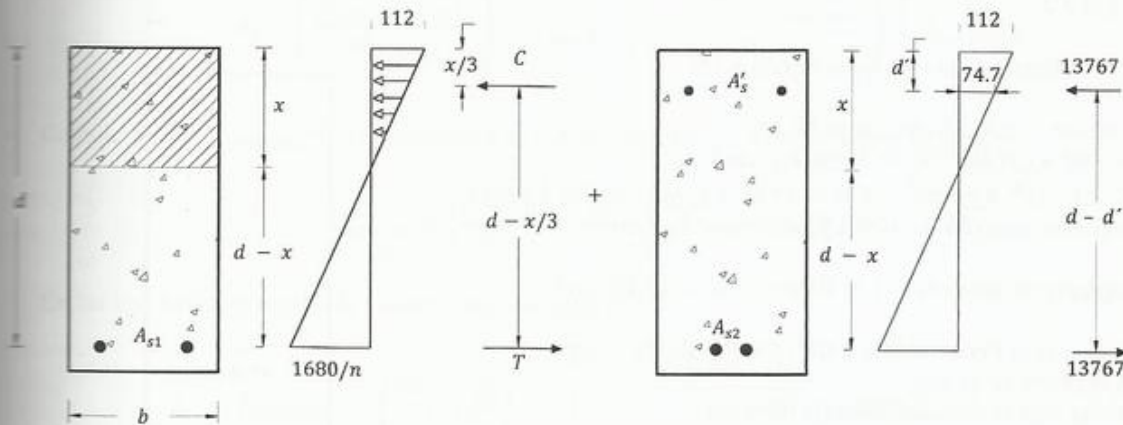


Fig. 4.14 Viga del Ejemplo 4.3

- El valor de x lo calcularemos tomando los momentos estáticos de la sección comprimida y el acero en tracción.
 El área de acero equivalente en concreto es de, $n \cdot A_s$

$$b \cdot x \cdot \frac{x}{2} = n \cdot A_s \cdot (d - x) \quad C = \frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot f_c \quad T = C \quad A_s = T / f_s \quad M = T \cdot (d - x/3)$$

Al asumir $x = 24 \text{ cm}$ tendremos: $A_{s1} = 24 \text{ cm}^2$ $f_s = f_{s \text{ adm}}$ $f_c = f_{c \text{ adm}}$ y $M = 20966 \text{ kg} \cdot \text{m}$. A esta condición la llamaremos balanceada. Debido a que hemos alcanzado los esfuerzos admisibles en el concreto, es necesario añadir acero en tracción A_{s2} y compensarlo con acero en compresión A'_s para resistir el remanente de momento. El concreto no se esforzará más allá de $f_{c \text{ adm}}$. Faltan por resistir,

$$28125 - 20966 = 7159 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Este momento será resistido por el par de fuerzas $T_2 = C_s$ producido por A_{s2} y A'_s respectivamente (Figura 4.14),

$$C_s = T_2 = 7159 / \left(\frac{d}{60} - \frac{d'}{8} \right) = 13767 \text{ kg}$$

El concreto comprimido "cede" esfuerzos de compresión al acero al no permitir éste que el concreto se contraiga. Por tanto la sección transformada se tomará usando un relación modular de $2 \cdot n$. El esfuerzo de acero en compresión es de,

$$f'_s = \left[\frac{74.7 \text{ kg/cm}^2}{112 \cdot \frac{\left(\frac{x}{24} - \frac{d'}{8} \right)}{\frac{24}{x}}} \right] \cdot 2 \cdot n = 1493 \text{ kg/cm}^2 \quad \therefore A'_s = \frac{13767}{1493} = 9.22 \text{ cm}^2$$

A_{s1} Trabaja a un esfuerzo $f_{s \text{ adm}}$

$$A_{s2} = \frac{13767}{1680} = 8.19 \text{ cm}^2$$

Totales,

Compresión: 9.22 cm^2

Tracción: $24 + 8.19 = 32.18 \text{ cm}^2$ Compare con el Ejercicio 5.9 ■

EJEMPLO 4.4

Cálculo de la flecha de la viga de la Figura 4.15

$$\begin{aligned} b &= 30 \text{ cm} & d &= 55 \text{ cm} & h &= 60 \text{ cm} \\ f'_c &= 180 \text{ kg/cm}^2 & F_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ E_s &= 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 & CM &= 1450 \text{ kg/m} = 14.50 \text{ kg/cm} \\ \text{Permanente (real) } CV &= 400 \text{ kg/m} = 4.00 \text{ kg/cm} \end{aligned}$$

Viga simplemente apoyada $L = 8.00 \text{ m}$ $A_s = 17.14 \text{ cm}^2$

Se pide calcular la flecha debido a CM , CV y la flecha a largo plazo en el centro de la viga.

Debajo de la viga se colocará una reja metálica.

- Calcularemos la relación modular

$$E_c = 15100 \cdot \sqrt{f'_c} = 202600 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 10$$

- Momentos de trabajo

$$M_{CM} = \frac{(1450) \cdot (8)^2}{8} = 11600 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_{CV} = \frac{(400) \cdot (8)^2}{8} = 3200 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

- Cálculo de x , tomando momentos estáticos del área comprimida y en tracción (Figura 4.16)

$$b \cdot x \cdot \frac{x}{2} = n \cdot A_s \cdot (d - x),$$

$$\text{nos viene } 30 \cdot \frac{x^2}{2} = 10 \cdot 17.14 \cdot (55 - x) \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

- Calcularemos las flechas en el centro,

La flecha máxima bajo carga repartida w en vigas continuas con tramos de luces similares puede aproximarse según,

$$\delta_i = \left(\frac{\beta}{384} \right) \cdot \left(\frac{w \cdot L^4}{E_c \cdot I_e} \right) \begin{cases} \beta = 5 \dots \text{en vigas simplemente apoyadas} \\ \beta = 1 \dots \text{en vigas continuas (ambos extremos)} \\ \beta \cong 2.5 \sim 2.0 \dots \text{un extremo simplemente apoyado y el otro continuo} \end{cases}$$

- Calcularemos la Inercia efectiva I_e con la Ecuación 4.1,

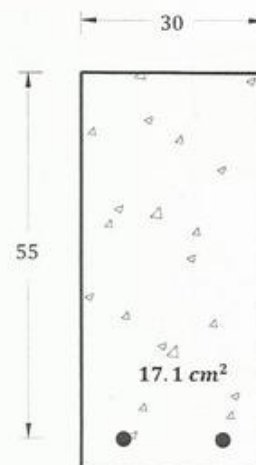


Fig. 4.15 Viga del Ejemplo 4.4

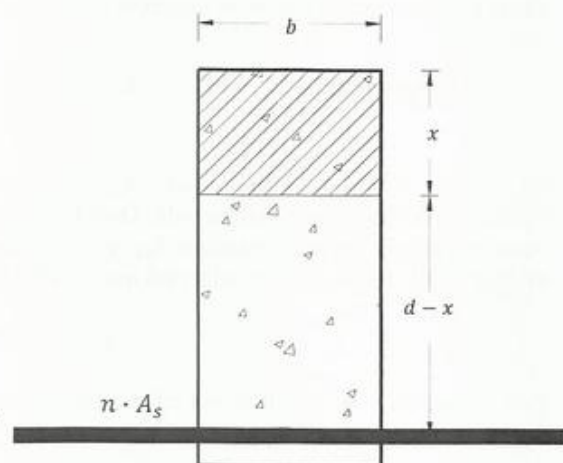


Fig. 4.16 Sección transformada

$$I_e = \left(\frac{R}{\frac{M_{agrietamiento}}{M_{trabajo}}} \right)^3 \cdot I_{gruesa} + \left[1 - \left(\frac{R}{\frac{M_{agrietamiento}}{M_{trabajo}}} \right)^3 \right] \cdot I_{agrietada}$$

- Calcularemos ($I_{agrietada}$) y la inercia para la sección total de concreto sin acero (I_{gruesa})

$$I_{gruesa} = \left(\frac{b \cdot h^3}{12} \right) = \frac{(30) \cdot (60)^3}{12} = 540000 \text{ cm}^4$$

En las secciones agrietadas la inercia toma un valor de,

$$I_{agrietada} = \left(\frac{30}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{20} \right)^3 + \frac{\text{Teorema de Steiner } (A \cdot d^2)}{(171.4) \cdot (55 - 20)^2} = 289960 \text{ cm}^4$$

$$I_{agrietamiento} = 0.54 \cdot I_{gruesa}$$

- Momento de agrietamiento de la sección de concreto (sin acero) y cálculo de I_{eCM+CV}

$$f_t = 2\sqrt{f'_c} = 26.8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad M_{agrietada} = f_t \cdot \left(\frac{I_{gruesa}}{h/2} \right)$$

El $M_{agrietamiento}$ es el que produce en la fibra interior $f_a = 26.8$

$$M_{agrietamiento} = \frac{(26.8) \cdot (540000)}{30} = 482400 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

El término $R = (M_{agrietamiento}/M_{trabajo})^3$ bajo la acción de cargas muertas únicamente y la inercia efectiva,

$$R = \left(\frac{4824}{11600} \right)^3 = 0.0719$$

$$I_{eCM} = (0.0719) \cdot (540000) + (1 - 0.0719) \cdot (289960) = 307938 \text{ cm}^4$$

Bajo la acción combinada de cargas muertas y vivas,

$$\left(\frac{4824}{11600 + 3200} \right)^3 = 0.0346$$

$$I_{eCM+CV} = (0.0346) \cdot (540000) + (1 - 0.0346) \cdot (289960) = 289611 \text{ cm}^4$$

- La flecha elástica debido a carga muerta,

$$\delta_{CM} = \delta_i = \frac{5}{384} \cdot \left[\frac{14.5 \cdot (800)^4}{202600 \cdot 307938} \right] = 1.24 \text{ cm} = L/645$$

- La flecha elástica debida a cargas muertas más carga viva,

$$\delta_{CM+CV} = \frac{5}{384} \cdot \left[\frac{(14.5 + 4.0) \cdot (800)^4}{202600 \cdot 289611} \right] = 1.63 \text{ cm} = L/491$$

La flecha debido a carga viva, $\delta_{CV} = \delta_{CM+CV} - \delta_{CM} = 1.63 - 1.24 = 0.39 \text{ cm} = L/2051$

- La flecha a largo plazo, o diferida, causada por el flujo plástico del concreto, alcanzará un valor δ_{LP} . Usaremos la Ecuación 4.2

$$\gamma = \frac{\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} = \frac{2}{1 + 50 \cdot 0} = 2.0 \quad \delta_{LP} = \gamma \cdot \delta_i = 2.0 \cdot 1.24 = 2.48 \text{ cm} = L/322$$

La presencia obligatoria de A'_s reduce el valor de γ .

Verificaremos las flechas obtenida con la Tabla 4.2. Nuestro caso es,

“Techos o entrepisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que no sean susceptibles a ser dañados por grandes flechas”. Debemos verificar aquella parte de la flecha total que se produce después de la fijación de elementos no estructurales (Suma de las flechas adicionales a largo plazo y flecha instantánea debido a carga variable) no supere $L/240$.

$$\delta_{CV} + \delta_{LP} = 0.39 + 2.48 = 2.87 \text{ cm} = \frac{L}{278} < \frac{L}{240} \text{ O.K.} \blacksquare$$

Comentario

Observaciones de campo del autor indican que el coeficiente γ puede alcanzar valores bastante mayores a 2 en muchas situaciones prácticas. Por ello recomendamos ser conservadores en la selección de h en vigas de concreto armado con el fin de reducir al máximo δ_{LP} y evitar daños o problemas en elementos no estructurales, tales como paredes, ventanales, instalaciones sanitarias entre otros.

CAPÍTULO 5 FLEXIÓN-ROTURA

En este Capítulo estudiaremos el comportamiento y la resistencia última de secciones de concreto armado a flexión, es decir cuando estas están próximas a la falla.

Para el diseño de secciones a flexión la resistencia última se minorará al multiplicarla por un factor menor que la unidad (**0.90** generalmente) y se comparará con la demanda que en este caso es la carga real mayorada o amplificada y que se obtienen al multiplicarla por coeficientes generalmente mayores que la unidad (Por ejemplo $1.2 CM + 1.6 CV$). Esta metodología se conoce como método de los estados límites o últimos (Sección 2.9) y arroja factores de seguridad alrededor de 1.5 (ver Tabla 2.2).

5.1 HIPÓTESIS

- La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta. Se asume que no hay deslizamiento entre las cabillas y el concreto que las rodea.
- Toda la tracción la resiste el acero.
- Las secciones planas se conservan planas después de la flexión, es decir que las deformaciones unitarias ϵ son directamente proporcionales a sus distancias al eje neutro.
- Más allá del punto cedente, el diagrama de esfuerzos-deformaciones del acero es horizontal, es decir que para deformaciones mayores que ϵ_y se tiene $f_s = F_y$ (Figura 5.1).
- La deformación de rotura última del concreto es igual a tres milésimas **0.003**.

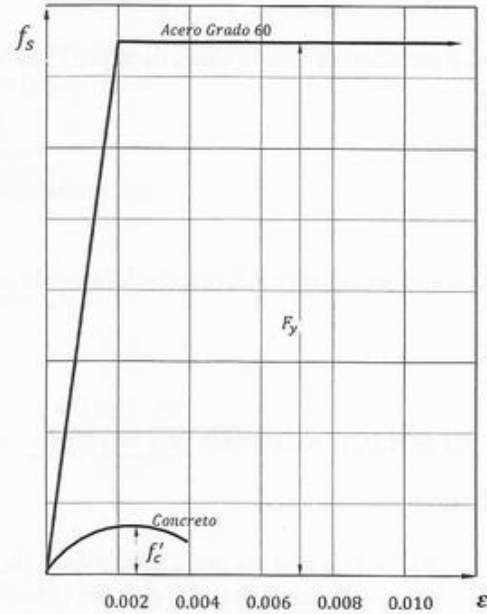


Fig. 5.1 Curvas de esfuerzo deformación para el concreto y el acero

5.2 DEFORMACIONES EN EL CONCRETO Y ACERO EN EL INSTANTE DE FALLA

Llamaremos falla al instante en que la fibra más comprimida de concreto alcance una deformación unitaria de,

$$\epsilon_c = 0.003 \text{ cm/cm} \dots \dots (\text{adimensional})$$

La deformación unitaria del acero más traccionado (ϵ_s) para el instante de la falla cuando $\epsilon_c = 0.003$ puede ser,

$$\begin{aligned} \epsilon_s < \epsilon_y &\rightarrow \text{falla por compresión. El acero no alcanza a fluir o ceder en el momento de la falla} \therefore f_s < F_y \\ \epsilon_s = \epsilon_y &\rightarrow \text{falla balanceada. Ocurre la falla en el instante en que el acero empieza a ceder} \therefore f_s = F_y \\ \epsilon_s > \epsilon_y &\rightarrow \text{falla por tracción. El acero cede significativamente antes que ocurra la falla} \therefore f_s = F_y \end{aligned}$$

Las fallas por compresión y balanceada se inician por aplastamiento del concreto sin que el acero alcance a ceder por lo que poseen limitada capacidad de deformación o rotación. Por ello, todas las secciones las diseñaremos para fallar en tracción garantizando que el acero más traccionado fluya mucho antes de que en el concreto se tenga $\epsilon_c = 0.003$. El diagrama de deformaciones unitarias para la falla balanceada y por tracción se muestra en las figuras 5.4 y 5.5, respectivamente.

5.3 FACTORES DE SEGURIDAD

Los efectos de las solicitaciones reales se multiplican por factores de mayoración para obtener las fuerzas últimas que producen la rotura (ver Sección 2.9). Por ejemplo para la combinación de carga básica,

$$\underbrace{M_u}_{\text{Momento último obtenido de un análisis estructural}} = \underbrace{1.2}_{\text{Factor de mayoración para la carga muerta}} \cdot \underbrace{M_{CM}}_{\text{Momento debido a carga muerta}} + \underbrace{1.6}_{\text{Factor de mayoración para carga viva}} \cdot \underbrace{M_{CV}}_{\text{Momento debido a carga viva}} \quad [5.1]$$

La ecuación de diseño viene dada por (Sección 2.9),

$$\underbrace{\phi}_{\text{Factor de minoración de resistencias}} \cdot \underbrace{M_n}_{\text{Capacidad nominal de la sección.}} \geq \underbrace{M_u}_{\text{Momento último}} \quad [5.2a]$$

Convenientemente la Ecuación 5.2a puede escribirse así,

$$M_n \geq \frac{M_u}{\phi} = \bar{M}_u \quad [5.2b]$$

5.4 SOLICITACIONES

Sean,

CM = Efecto de la carga permanente (*muerta*)

CV = Efecto de la carga variable (*viva*)

W = Efecto del viento

S = Efecto del sismo

H = Empuje del suelo

Tendremos [A.C.I. 318-08 9.2.1],

- Cargas verticales únicamente,

$$U = U_0 = 1.20 \cdot CM + 1.60 \cdot CV \quad [5.3a]$$

$$U = 1.4 \cdot CM \quad [5.3b]$$

- Cargas verticales y sismo,

$$U = 1.20 \cdot CM + CV \pm S \quad [5.4]$$

$$U = 0.90 \cdot CM \pm S + 1.60 \cdot H \quad [5.5]$$

- Cargas verticales y viento,

$$U = 1.20 \cdot CM + CV + 1.60 \cdot W \quad [5.6]$$

$$U = 0.90 \cdot CM + 1.60 \cdot W + 1.60 \cdot H \quad [5.7]$$

- Otras combinaciones (ver ACI 318-08 sección 9.2).

En edificios de vivienda la relación CM/CV es casi siempre mayor que 3. La Ecuación 5.3b domina sobre 5.3a si la relación CM/CV es mayor que 8, lo que ocurre muy poco en la práctica del diseño de edificios.

EJEMPLO 5.1

Calcular los valores del momento último (M_u) en la sección de apoyo de una viga de un edificio ubicado en zona sísmica. Los resultados del análisis estructural se resumen a continuación,

Nota:

Momentos negativos (tracción arriba).

Momentos positivos (tracción abajo).

$$\begin{aligned} M_{CM} &= -10 \text{ ton} \cdot \text{m} & M_{CV} &= -4 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_s &= -14 \text{ ton} \cdot \text{m} & M_s &= +12 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

De 5.3a

$$M_u = 1.2 \cdot M_{CM} + 1.6 \cdot M_{CV} = -18.4 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

De 5.3b

$$M_u = 1.4 \cdot M_{CM} = -14.0 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

De 5.4

$$\begin{aligned} M_u = U &= 1.20 \cdot CM + CV + S = -4.0 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_u = U &= 1.20 \cdot CM + CV - S = \underline{-30.0 \text{ ton} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

De 5.5

$$\begin{aligned} M_u = U &= 0.90 \cdot CM + S + 1.60 \cdot H = \underline{3.0 \text{ ton} \cdot \text{m}} \\ M_u = U &= 0.90 \cdot CM - S + 1.60 \cdot H = -23 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Si asumimos $\phi = 0.90$ la sección se diseñará para un momento negativo (tracción arriba) de $\bar{M}_u = -30.0 / 0.90 = 33.33 \cdot \text{ton} \cdot \text{m}$ y para tracción abajo deberá resistir un momento de $\bar{M}_u = 3.0 / 0.90 = 3.33 \text{ ton} \cdot \text{m}$. En los apoyos las normas exigen que la cantidad de acero en la parte inferior de la viga sea por lo menos igual a la mitad del acero en la parte superior (ver Ejemplo 5.21) ■

5.5 DIAGRAMA RECTANGULAR DE COMPRESIONES

El diagrama de esfuerzos de compresión en el concreto inmediatamente antes de la rotura o falla ($\epsilon_c = 0.003$), es una curva que puede aproximarse con una recta AD , tal que (Figuras 5.2 y 5.3),

- Área $ABCE = \text{Área } ADFE$ o sea que no varíe la compresión en el concreto (C_c).
- No cambie la posición de la línea de acción de (C_c) -ver Figura 5.3-.

Estas condiciones se satisfacen razonablemente para,

$$\text{Esfuerzo promedio } E - A = 0.85 \cdot f'_c \dots a = \beta_1 \cdot c \quad [5.8]$$



Fig. 5.2 Diagramas de esfuerzo en el concreto

El valor de c (figuras 5.2 y 5.3) es la profundidad del eje neutro en el instante que se tiene $\epsilon_c = 0.003$. Cuando se trate de la profundidad del eje neutro para otros valores de $\epsilon_c (\neq 0.003)$ esta se denotará como x (capítulos 3, 4 y 18). El valor de a se conoce como la profundidad del bloque de compresiones equivalentes. β_1 se define en la página siguiente. Al Asumir que el esfuerzo es constante ($0.85 \cdot f'_c$) se facilitan mucho los cálculos puesto que la compresión C_c actúa en el centroide del área comprimida. En el caso de sección comprimida rectangular de ancho b se tiene (Figura 5.3).

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$C_c = T$$

$$C_c = \overbrace{0.85 \cdot f'_c}^{\text{Esf. promedio}} \cdot \overbrace{b \cdot a}^{\text{área comprimida}} \dots \dots [5.9]$$

Si se define,

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b \dots \dots \dots [5.10]$$

$$C_c = K \cdot a \dots \dots \dots [5.11]$$

$$z = d - a/2 \dots \dots \dots [5.12]$$

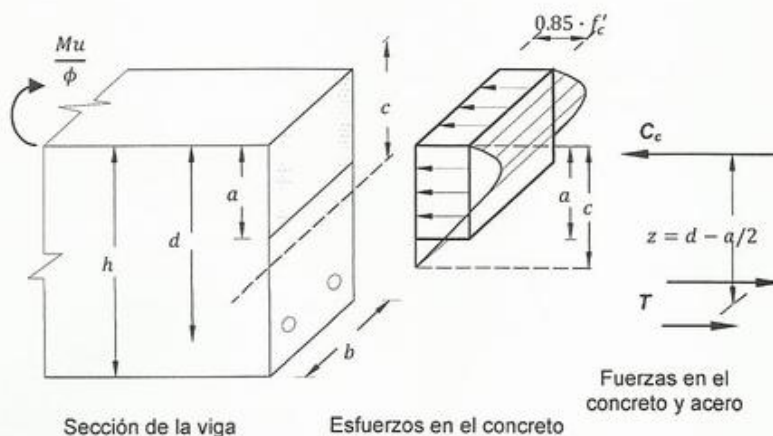


Fig. 5.3 Diagrama de cuerpo libre y equilibrio de momentos para una sección de concreto armado

Por equilibrio de momentos (Figura 5.3)

$$\frac{M_u}{\phi} = \overbrace{K \cdot a}^{C_c} \cdot \overbrace{\left[d - \frac{a}{2}\right]}^z [5.13a]$$

$$\frac{M_u}{\phi} = \overbrace{\tilde{T}}^{T=C_c} \cdot \overbrace{\left[d - \frac{a}{2}\right]}^z [5.13b]$$

Cuando el diagrama rectangular *ADFE* se aplica al caso anterior de áreas comprimidas rectangulares ($b \cdot a$), los resultados difieren muy poco de los obtenidos con el diagrama curvo *ABCE*. En el caso de áreas comprimidas triangulares (común en columnas con doble excentricidad) las diferencias pueden resultar apreciables.

a) VALOR DE β_1

Depende de la forma del diagrama esfuerzo deformación del concreto, el cual varía con f'_c , achatándose a medida que f'_c disminuye como se muestra en la Figura 1.7 (ver Mattock, Kriz y Hognestad, 1961). El ACI 318-08 (Sección 10.2.7.3) toma,

$$\beta_1 = 1.05 - \frac{f'_c}{1400} \dots \dots \dots 0.65 \leq \beta_1 \leq 0.85 [5.14]$$

5.6 FALLA BALANCEADA

En el mismo instante (Figura 5.5),

$$\epsilon_c = 0.003 \quad y \quad \epsilon_s = \epsilon_y = F_y/E$$

Ocurre en vigas con elevadas cantidades de acero longitudinal, a las que llamaremos acero balanceado ($A_{s\,bal}$). La falla ocurre por aplastamiento del concreto antes de que el acero fluya.

EJEMPLO 5.2

Calcular la cantidad de acero $A_{s\,bal}$ que originará una falla balanceada al ser sobrecargada una viga,

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 60 \text{ cm}$$

$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Dibujaremos el diagrama de deformaciones unitarias obligando a $\epsilon_s = \epsilon_y$ y $\epsilon_c = 0.003$.

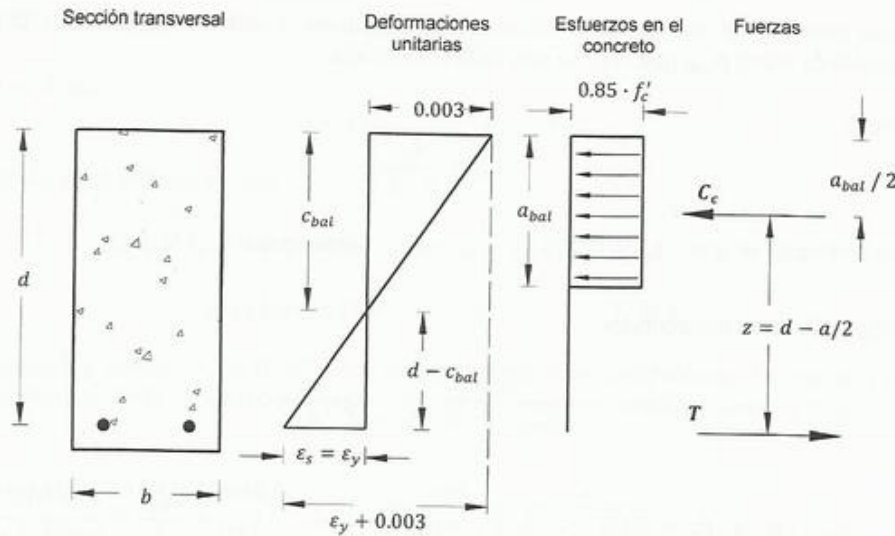


Fig. 5.4 Sección rectangular en condiciones balanceadas
Nota: La escala del dibujo corresponde con la solución encontrada

$$\varepsilon_s = \varepsilon_y = \frac{F_y}{E_s} = 0.002$$

- De los triángulos semejantes de la Figura 5.4,

$$k_{bal} = \frac{c_{bal}}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \varepsilon_y}$$

- Si multiplicamos por $E_s = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$$k_{bal} = \frac{c_{bal}}{d} = \frac{6300}{6300 + F_y} = 0.60$$

$$c_{bal} = k_{bal} \cdot d = 0.60 \cdot 60 = 36 \text{ cm}$$

$$\beta_1 = 1.05 - \left(\frac{f'_c}{1400} \right) = 0.87 \dots \dots \dots \therefore \beta_1 = 0.85 \quad [5.14]$$

$$a_{bal} = \beta_1 \cdot c_{bal} = 30.6 \text{ cm} \quad [5.8]$$

- Nótese que el valor de c balanceado es independiente de la forma de la figura.

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 6375 \text{ kg/cm} \quad [5.10]$$

$$C_c = K \cdot a_{bal} = 195075 \text{ kg} \quad [5.11]$$

por equilibrio de fuerzas horizontales se tiene: $C_c = T$

$$A_{s\text{ bal}} \cdot F_y = 195075 \text{ kg}$$

$$A_{s\text{ bal}} = 46.45 \text{ cm}^2 \quad \blacksquare$$

Para el ejercicio anterior, en que se tiene secciones rectangulares, podríamos generalizar la expresión para encontrar la cuantía de acero ρ_{bal} que origina una falla balanceada,

- Del Capítulo 2,

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad [2.3]$$

- Para el caso particular en que $\varepsilon_c = 0.003$ y $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ llamaremos $\rho = \rho_{bal}$

- Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\begin{aligned} \frac{\overbrace{A_{s\,bal}}^T}{\rho_{bal} \cdot b \cdot d} \cdot F_y &= \frac{c_c}{K \cdot a_{bal}} \\ \rho_{bal} \cdot b \cdot d \cdot F_y &= \frac{K}{0.85 \cdot f'_c} \cdot b \cdot \frac{a_{bal}}{\beta_1 \cdot k_{bal} \cdot d} \rightarrow k_{bal} = \frac{c_{bal}}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \varepsilon_y} \\ \rho_{bal} &= 0.85 \cdot k_{bal} \cdot \beta_1 \cdot \frac{f'_c}{F_y} \end{aligned} \quad [5.15]$$

- Aplicando la Ecuación 5.15 al problema anterior,

$$\rho_{bal} = 0.0258 \quad \therefore A_{s\,bal} = \rho_{bal} \cdot b \cdot d = 46.45 \text{ cm}^2 \quad \blacksquare$$

La falla balanceada posee limitada curvatura o capacidad de deformación. En flexión las normas obligan a utilizar un porcentaje de acero menor que el balanceado, garantizando así la falla por tracción.

Generalmente diseñaremos vigas rectangulares, con resistencias de concreto de 210 kg/cm^2 y acero con $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ lo que corresponde a cuantías balanceadas por el orden del 2.16 %.

5.7 FALLA POR TRACCIÓN

Se presenta en vigas en las que se tiene,

$$\rho < \rho_{bal} \quad \therefore A_s < A_{s\,bal}$$

La falla se inicia en la viga para un momento que llamaremos M_y cuando se tiene,

$$\text{En el acero: } \varepsilon_s = \varepsilon_y \quad \therefore f_s = F_y$$

$$\text{En el concreto: } \varepsilon_c < 0.003 \quad \therefore f_c < f'_c$$

La falla final se produce para un momento \bar{M}_u ligeramente mayor que M_y , cuando se tiene,

$$\text{En el acero: } \varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \therefore f_s = F_y$$

$$\text{En el concreto: } \varepsilon_c = 0.003 \quad \therefore f_c \cong f'_c$$

Todas las secciones sometidas a flexión se diseñarán para fallas por tracción, permitiendo que el acero fluya antes de producirse el aplastamiento del concreto en la fibra más comprimida, en el instante que $\varepsilon_c = 0.003$.

5.8 FALLA POR COMPRESIÓN

Ocurre cuando se tiene,

$$\rho > \rho_{bal} \quad \therefore \quad A_s > A_{s\,bal}$$

La falla se produce en el instante en que,

$$\text{En el acero: } \varepsilon_s < \varepsilon_y \quad \therefore \quad f_s < F_y$$

$$\text{En el concreto: } \varepsilon_c = 0.003 \quad \therefore \quad f_c \cong f'_c$$

El concreto se aplasta y alcanza $\varepsilon_c = 0.003$ antes de que el acero comience a ceder. Es una falla que acusa poca curvatura o deformación de la sección transversal y ocurre en vigas con excesivo acero en tracción.

5.9 SECCIONES RECTANGULARES

Llamaremos secciones rectangulares a aquellas en las cuales la zona comprimida es rectangular de dimensiones $b \cdot a$ y su centroide dista $z = d - a/2$ del centro de gravedad del acero de tracción (Figura 5.3). Como veremos más adelante son prácticamente las únicas que se consiguen en la práctica.

5.10 REVISIÓN DE SECCIONES DE CONCRETO ARMADO

Conocidas las dimensiones de la viga y el refuerzo se quiere investigar la resistencia de la viga \bar{M}_u . El problema a resolver consiste en encontrar la posición del eje neutro (c) para que se satisfaga el equilibrio de fuerzas horizontales $C_c = T$. Conocido (c) calcularemos \bar{M}_u y la curvatura ϕ .

La metodología para encontrar la solución de los siguientes problemas se basa en procesos iterativos. El lector experimentado podrá encontrar atajos para hallar las soluciones y verá cálculos o pasos que pueden ser obviados. Se espera que los procesos iterativos presentados en este Capítulo sirvan para facilitar el entendimiento del comportamiento a flexión de las secciones de concreto armado a los lectores que se inician o refrescan la materia.

EJEMPLO 5.3

Para la viga de la Figura 5.5 calcular la capacidad nominal \bar{M}_u , la curvatura ϕ e identificar el tipo de falla.

$$\begin{aligned} f'_c &= 250 \text{ kg/cm}^2, \\ F_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ b &= 30 \text{ cm} \\ d &= 60 \text{ cm} \\ A_s &= 20.24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Este valor de A_s corresponde a una cantidad de acero de aproximadamente el 44% del acero balanceado ($0.44 \cdot A_{s\,bal}$).

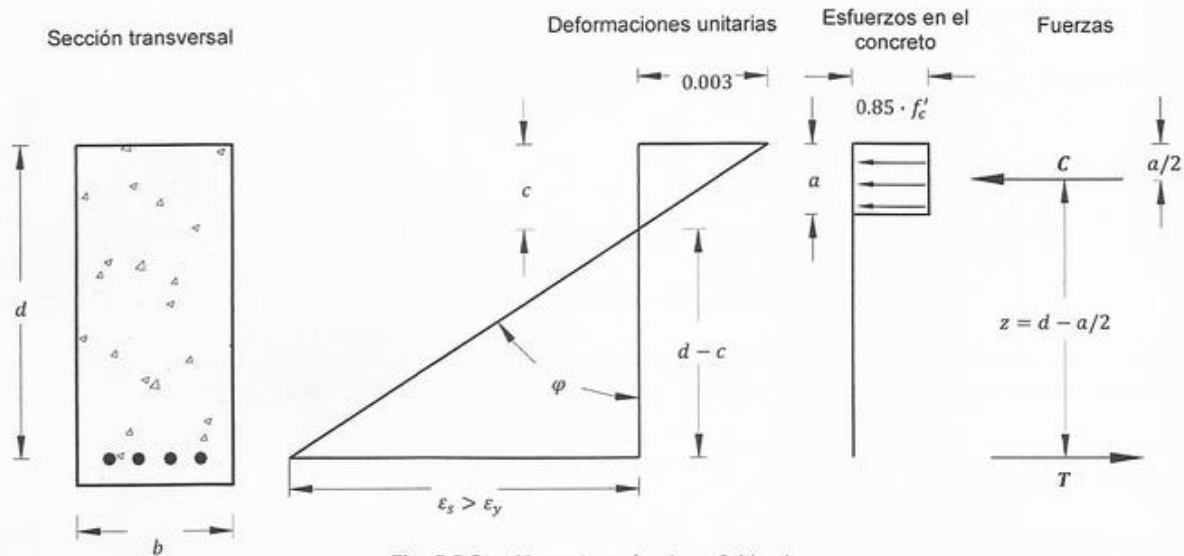


Fig. 5.5 Sección rectangular $A_s = 0.44 \cdot A_{s\text{ bal}}$

Valores preliminares de 5.10 y 5.14

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 6375 \text{ kg/cm}$$

$$\beta_1 = 1.05 - \left(\frac{f'_c}{1400} \right) = 0.87 \rightarrow \beta_1 = 0.85$$

Tomaremos $\beta_1 = 0.85$. De la Ecuación 5.8

$$a = \beta_1 \cdot c$$

Por relación de triángulos de la Figura 5.5

$$\epsilon_s = \frac{0.003}{c} \cdot (d - c) \quad [5.16]$$

- **Acero en tracción**

Aplicando la ley de Hooke nos queda,

$$f_s = \epsilon_s \cdot E_s \leq F_y$$

$$T = A_s \cdot f_s$$

- **Concreto en compresión**

De la Ecuación 5.11,

$$C_c = K \cdot a$$

Utilizaremos el procedimiento de tanteos variando c hasta encontrar el equilibrio.

Tabla 5.1 Valores de T y C_c (Ejemplo 5.3)

Asumido	[5.8]	[5.16]	f_s (kg/cm ²)	T (kg)	[5.11]
c (cm)	a (cm)	ε_s			C_c (kg)
8.00	6.80	0.0195	4200	85008	43350
<i>C es menor que $T \rightarrow$ aumentaremos c</i>					
10.00	8.50	0.0150	4200	85008	63750
15.00	12.75	0.0090	4200	85008	81281
15.80	13.43	0.0084	4200	85008	85402

Para $c = 15.80$ cm tenemos $C_c \cong T$

La capacidad de la sección a flexión al sumar momentos alrededor de C_c (Ecuación 5.13) viene dada por,

$$\bar{M}_u = T \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$\bar{M}_u = 4529651 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\bar{M}_u = 45296.51 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_u = 45.297 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Siendo el orden de magnitud de la curvatura φ muy pequeño, podemos aproximar $\tan(\varphi) = \varphi$ (Figura 5.5) nos viene,

$$\tan(\varphi) = \varphi = \frac{0.003}{c}$$

$$\varphi = 1,899 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_s = 0.0084 \sim 4.2 \cdot \varepsilon_y \quad \therefore \text{Falla por tracción}$$

Pudimos haber asumido que $f_s = F_y$ puesto que la viga en estudio posee una cantidad de acero menor al balanceado (ver Ejemplo 5.2 -las vigas son idénticas salvo por la cantidad de acero-) y haber calculado el valor exacto de a con la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\overbrace{K \cdot a}^{C_c} = \overbrace{A_s \cdot F_y}^T$$

$$a = \frac{A_s \cdot F_y}{K} = \frac{20.24 \cdot 4200}{6375} = 13.33 \text{ cm} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.4

El caso de armadura sencilla, es decir el acero solo en el borde traccionado de la viga, se presenta muy poco en la práctica, generalmente solo en losas o zapatas de fundación. Aunque el diseño requiera acero únicamente para resistir tracción, en la mayoría de los casos tenemos acero en las cercanías al borde comprimido. A este caso con acero en los bordes superiores e inferiores lo llamaremos armadura doble (Figura 5.6).

En este ejemplo partiremos de la viga del ejemplo anterior y le agregaremos $A'_s = 10.12 \text{ cm}^2$ y $d' = 5 \text{ cm}$. Tendremos acero en ambos bordes de la viga, es decir, armadura doble. $K = 6374 \text{ kg/cm}$, $\beta_1 = 0.85$. Al igual que el ejercicio anterior, el problema consiste en encontrar la posición del eje neutro c hasta que se satisfaga el equilibrio,

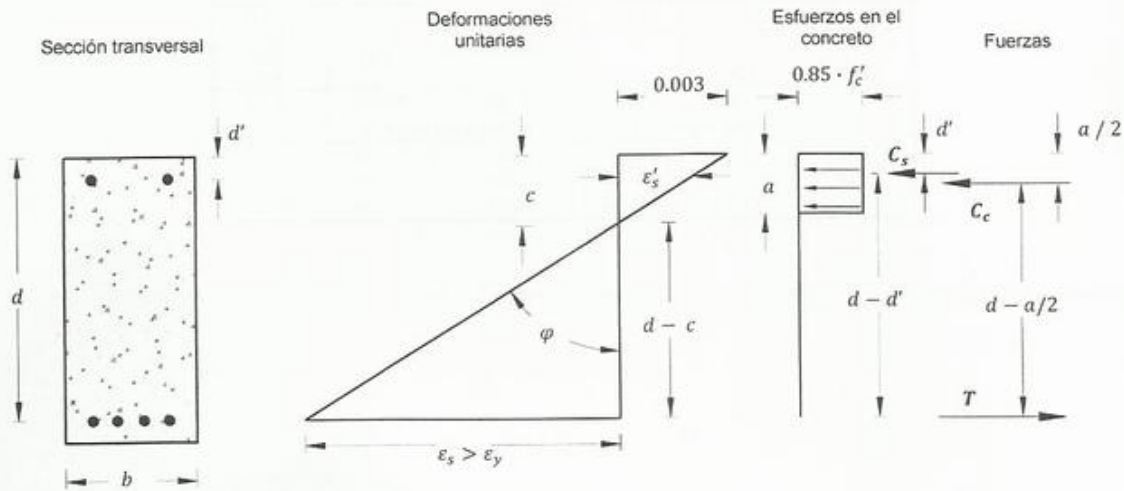


Fig. 5.6 Sección rectangular armadura doble

Por equilibrio de fuerzas horizontales (Figura 5.6),

$$C_c + \overset{\text{compresion. del acero}}{\widehat{C}_s} = T \quad [5.17]$$

Asumiremos el valor de c y luego calcularemos a de la Ecuación 5.8,

$$a = \beta_1 \cdot c$$

Para el acero en tracción aplicaremos la Ecuación 5.16 o una relación de triángulos (Figura 5.6),

$$\varepsilon_s = \frac{0.003}{c} \cdot (d - c)$$

$$f_s = \varepsilon_s \cdot E_s \leq F_y$$

$$T = A_s \cdot f_s$$

Para el acero en compresión por relación de triángulos (Figura 5.6), nos viene,

$$\varepsilon'_s = \frac{0.003}{c} \cdot (c - d') \quad [5.18]$$

Aplicando la ley de Hooke nos queda,

$$f'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s \leq F_y$$

$$C_s = f'_s \cdot A'_s$$

Observación

ε'_s negativo indicaría que el eje neutro está por encima de d' por lo que las barras A'_s estarían en tracción. Esto ocurrirá si $c < d'$. Escenario discutible debido a la potencial pérdida del recubrimiento de la viga en condiciones últimas.

La fuerza de compresión en el concreto, empleando la Ecuación 5.11, $C_c = K \cdot a$

Tabla 5.2 Cálculo de valores de T y C_c y C_s (Ejemplo 5.4)

Asumido	[5.8]	[5.16]	f_s (kg/cm ²)	T (kg)	[5.18]	f'_s (kg/cm ²)	C_s (kg)	[5.11]	$C_s + C_c$ (kg)
c (cm)	a (cm)	ε_s			ε'_s			C_c (kg)	
15.8	13.4	0.0084	4200	85008	0.0021	4200	42504	85616	128120
12.0	10.2	0.0120	4200	85008	0.0018	3675	37191	65025	102216
10.0	8.5	0.0150	4200	85008	0.0015	3150	31878	54188	86066
9.9	8.4	0.0152	4200	85008	0.0015	3118	31556	53646	85202

Para $c = 9.9$ cm tenemos $C_s + C_c \cong T$

Por equilibrio, sumando momentos alrededor de la Fuerza de tracción T , la Ecuación 5.13 se modifica y queda,

$$\bar{M}_u = C_c \cdot z + C_s \cdot (d - d')$$

$$z = (d - a/2)$$

$$\bar{M}_u = 47.286 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\varphi = \frac{0.003}{c} = 3.030 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_s = 0.0152 \sim 7.6 \varepsilon_y \quad \therefore \text{Falla por tracción} \blacksquare$$

EJEMPLO 5.5

Igual al Ejemplo 5.3 pero con $f'_c = 450 \text{ kg/cm}^2$. Iteraremos con c hasta conseguir el equilibrio $C_c = T$. Valores preliminares de 5.10 y 5.14,

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 11475 \text{ kg/cm}$$

$$\beta_1 = 1.05 - (f'_c/1400) = 0.73 \leq 0.85 \dots \beta_1 = 0.73$$

Tabla 5.3 Valores de T y C_c (Ejemplo 5.5)

Asumido	[5.8]	[5.16]	f_s (kg/cm ²)	T (kg)	[5.11]
c (cm)	a (cm)	ε_s (cm)			C_c (kg)
18.36	13.4	0.0068	4200	85008	154109
13.97	10.2	0.0099	4200	85008	117045
11.64	8.5	0.0124	4200	85008	97538
9.32	6.8	0.0163	4200	85008	78030
10.27	7.5	0.0145	4200	85008	85833

Para $c = 10.27$ cm tenemos $C_c \cong T$

Sumando momentos alrededor de la Fuerza de compresión C_c ó aplicando la Ecuación 5.13b,

$$\bar{M}_u = C_c \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) \dots \bar{M}_u = 48.289 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\varphi = \frac{0.003}{c} = 2.92 \cdot 10^{-4} \dots \varepsilon_s = 0.0175 \sim 7.3 \cdot \varepsilon_y \quad \therefore \text{Falla por tracción} \blacksquare$$

Alternativamente pudimos haber planteado la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales para encontrar a

$$A_s < A_{bal} \rightarrow f_s = F_y \dots \text{nos viene} \dots a = \frac{A_s \cdot F_y}{K} = 7.41 \text{ cm}$$

EJEMPLO 5.6

Igual al Ejemplo 5.3 pero agregaremos 39.74 cm^2 para un total de $A_s = 60 \text{ cm}^2$ de acero en tracción. Tendríamos $1.29 \cdot A_{s \text{ bal}}$. (Esta cantidad de acero sobrepasa al permitido por norma de 2.5% -ver Sección 2.4-). $K = 6375 \text{ kg/cm}$, $\beta_1 = 0.85$.

Tabla 5.4 Valores de T y C_c (Ejemplo 5.6)

Asumido	[5.8]	[5.16]	$f_s \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$T \text{ (kg)}$	[5.11]
$c \text{ (cm)}$	$a \text{ (cm)}$	$\epsilon_s \text{ (cm)}$			$C_c \text{ (kg)}$
15.0	12.8	0.0090	4200	252000	81281
20.0	17.0	0.0060	4200	252000	108375
35.0	29.8	0.0021	4200	252000	189656
36.0	30.6	0.0020	4200	252000	195075
38.6	32.8	0.0017	3493	209565	209164

Para $c = 38.6 \text{ cm}$ tenemos $C_c \cong T$

La ecuación de equilibrio de momentos 5.13b,

$$\bar{M}_u = C_c \cdot \left[d - \frac{a}{2} \right] \quad \bar{M}_u = 91.185 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\phi = \frac{0.003}{c} = 0.777 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_s = 0.0017 \sim 0.85 \cdot \epsilon_y \quad \therefore \text{Falla por compresión} \quad \blacksquare$$

A este tipo de vigas en que $\epsilon_s < \epsilon_y$ se les conoce como vigas **sobre-reforzadas**

EJEMPLO 5.7

Igual al Ejemplo 5.3 pero agregaremos 39.74 cm^2 en la zona en compresión y en la zona en tracción. Tendríamos $A_s = 60 \text{ cm}^2$, y $A'_s = 39.74 \text{ cm}^2$. El problema planteado es idéntico al 5.6 pero con acero en la parte de compresión. $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$, $K = 6375 \text{ kg/cm}$, $\beta_1 = 0.85$.

Tabla 5.5 Valores de T y C_c (Ejemplo 5.7)

Asumido	[5.8]	[5.16]	$f_s \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$T \text{ (kg)}$	[5.18]	$f'_s \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$C_s \text{ (kg)}$	[5.11]	$C_s + C_c \text{ (kg)}$
$c \text{ (cm)}$	$a \text{ (cm)}$	ϵ_s			ϵ'_s			$C_c \text{ (kg)}$	
12.0	10.2	0.0120	4200	252000	0.0018	3675	146045	65025	211070
13.0	11.1	0.0108	4200	252000	0.0018	3877	154069	70444	224513
14.0	11.9	0.0099	4200	252000	0.0019	4050	160947	75863	236810
15.0	12.8	0.0090	4200	252000	0.0020	4200	166908	81281	248189
15.8	13.4	0.0084	4200	252000	0.0021	4200	166908	85616	252524

Para $c = 15.8 \text{ cm}$ tenemos $C_c \cong T$

$$\bar{M}_u = 138.020 \text{ ton} \cdot \text{m}; \quad \phi = \frac{0.003}{c} = 1.899 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_s = 0.0084 \sim 4.2 \epsilon_y \quad \therefore \text{Falla por tracción} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.8

Igual al Ejercicio 5.3 pero aumentaremos d en un 50%, es decir $d = 90 \text{ cm}$

Tabla 5.6 Valores de T y C_c (Ejemplo 5.8)

Asumido	[5.8]	[5.16]	$f_s \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$T \text{ (kg)}$	[5.11]
$c \text{ (cm)}$	$a \text{ (cm)}$	$\varepsilon_s \text{ (cm)}$			$C_c \text{ (kg)}$
12.0	10.2	0.0195	4200	85008	65025
13.0	11.1	0.0178	4200	85008	70444
13.0	11.1	0.0178	4200	85008	70444
14.0	11.9	0.0163	4200	85008	75863
15.8	13.4	0.0141	4200	85008	85616

Para $c = 15.8 \text{ cm}$ tenemos $C_c \cong T$

Aplicado la Ecuación 5.13b,

$$\bar{M}_u = 71.305 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\varphi = \frac{0.003}{c} = 1,899 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_s = 0.0141 \sim 7.05 \varepsilon_y \quad \therefore \text{Falla por tracción} \quad \blacksquare$$

5.11 COMPARACIÓN DE RESULTADOS DEL EJEMPLO 5.3 AL 5.8

Los resultados de los ejemplos se resumen en la Tabla 5.7. Las cuatro últimas columnas corresponden a los valores normalizados de \bar{M}_u , ε_s y φ con respecto al Ejemplo 5.3.

Tabla 5.7 Resumen ejercicios 5.3 al 5.8

Ejercicio	b	d	f'_c	A_s	A'_s	$\frac{\bar{M}_u}{\bar{M}_u(5.3)}$	$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s(5.3)}$	$\frac{\varphi}{\varphi(5.3)}$	Falla
5.3 (base)	30	60	250	20.24	0	1.00	1.00	1.00	T
5.4	30	60	250	20.24	10.12	1.04	1.81	1.60	T
5.5	30	60	450	20.24	0	1.06	1.73	1.55	T
5.6	30	60	250	60.00	0	2.01	0.20	0.41	C
5.7	30	60	250	60.00	39.76	3.05	1.00	1.00	T
5.8	30	90	250	20.24	0	1.57	1.67	1.00	T

Observaciones

Al comparar el Ejemplo 5.3 con el 5.4 y 5.5: La adición o incremento del acero en compresión o del valor de f'_c en vigas que fallan por tracción conlleva a,

- Poco incremento de la resistencia de la viga \bar{M}_u .
- Aumento importante de ε_s y φ que se traduce en ganancia de ductilidad o capacidad de deformación.

Al comparar el Ejemplo 5.3 con el 5.6: El incremento del acero en tracción conlleva a,

- Aumento importante de la resistencia de la viga \bar{M}_u .
- Disminución significativa de ε_s y φ y por tanto pérdida de ductilidad.

Al comparar el Ejemplo 5.6 con acero mayor al balanceado y fallando por compresión, con el 5.7 donde se añadió acero en la parte comprimida observamos,

- Incremento importante de la resistencia del elemento. Lo mismo ocurrirá al aumentar f'_c .
- Aumento de ε_s y ϕ .
- Cambio en el tipo de falla, de compresión a tracción, para este caso.

Al comparar el Ejemplo 5.3 con el 5.8

- Al aumentar d , también lo hará \bar{M}_u y ε_s .
- ϕ permanecerá inalterado.
- En resumen incrementamos la capacidad de la viga sin perder capacidad de deformación. ■

En el Capítulo 18 (Figura 18.6) se presenta las relaciones momento curvatura para las vigas de la Tabla 5.7.

5.12 EL FACTOR DE MINORACIÓN DE RESISTENCIAS ϕ

Dependerá del valor de ε_s del acero más traccionado para el instante de falla en que $\varepsilon_c = 0.003$. Siendo $k = c/d$ tendremos para miembros con estribos -ACI-08, 9.3.2- (ver Figura 7.37, para interpretación gráfica),

$$\phi = 0.65 + 0.25 \cdot \left[\frac{1}{k} - \frac{5}{3} \right] = 0.65 + (\varepsilon_s - 0.003) \cdot \left[\frac{250}{3} \right] \quad [5.19]$$

En cualquier caso debe cumplirse $0.65 \leq \phi \leq 0.90$. Diseñemos todas las vigas para $\varepsilon_s > 0.007$ en el instante en que $\varepsilon_c = 0.003 \therefore \phi = 0.90$. Un análisis detallado de los factores ϕ y su obtención se encuentra en Mast (1992) y Nowak y Szerszen (2001).

5.13 RELACIÓN DE ACERO COLOCADO AL BALANCEADO ($\zeta = A_{s \text{ colocado}} / A_{s \text{ balanceado}}$)

La relación ζ define la máxima cantidad de acero A_s que se le puede colocar a una viga sin refuerzo a compresión ($A'_s = 0$) para garantizar falla por tracción. Para vigas en zona sísmica se recomienda $\zeta \leq 1/2$.

$$A_{s \text{ (colocado)}} \leq \zeta \cdot A_{s \text{ balanceado}}$$

a) CASO GENERAL DE SECCIÓN COMPRIMIDA DE CUALQUIER FORMA

$$\rho_{\max} = \zeta \cdot \rho_{\text{bal}} \rightarrow \zeta < 1.0 \therefore \text{tendríamos } A_{s \text{ colocado}} < A_{s \text{ bal}} \text{ y } \overbrace{\varepsilon_s > \varepsilon_y}^{\text{falla por tracción}} \quad [5.20a]$$

El valor recomendado de ζ es 0.50. Sin embargo las normas permiten diseñar secciones con cantidades de acero equivalentes a $\zeta = 0.75$ en losas por ejemplo, o en vigas localizadas en zonas no sísmicas. Partiendo del acero balanceado tendremos,

$$\rho_{\text{bal}} = \frac{A_{s \text{ bal}}}{b \cdot d}$$

$$T_{\text{bal}} = A_{s \text{ bal}} \cdot F_y \rightarrow T_{\text{bal}} = \rho_{\text{bal}} \cdot b \cdot d \cdot F_y$$

Al introducir el factor de relación al balanceado (ζ) para forzar la falla por tracción, tendríamos que la máxima cuantía de acero permisible es,

$$\rho_{\max} = \zeta \cdot \rho_{\text{bal}} \therefore A_{s \text{ max}} = \zeta \cdot A_{s \text{ bal}}$$

$$T_{\max} = \rho_{\max} \cdot b \cdot d \cdot F_y \rightarrow T_{\max} = \zeta \cdot \rho_{\text{bal}} \cdot b \cdot d \cdot F_y$$

$$T_{\max} = \zeta \cdot A_{s \text{ bal}} \cdot F_y \quad [5.20b]$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$C_{c \text{ max}} = T_{\max}$$

En el caso general de sección comprimida no rectangular, se tiene,

$$C_{c \max} = 0.85 \cdot f'_c \cdot \overbrace{\{A_{c \max} [f(a_{\max})]\}}^{\text{área comprimida que es función de } a_{\max}}$$

En función de áreas comprimidas podemos escribir,

$$A_{c \max} = \zeta \cdot A_{c \text{ bal}} \quad [5.20c]$$

Los ejemplos 5.19 y 5.22 ilustran el caso en que el área comprimida no es rectangular. Este se encuentra muy poco en la práctica.

b) CASO PARTICULAR DE SECCIÓN COMPRIMIDA RECTANGULAR

$$\frac{C_{c \max}}{K \cdot a_{\max}} = \frac{T_{\max}}{\zeta \cdot A_{s \text{ bal}} \cdot F_y} \quad \therefore \quad a_{\max} = \frac{\zeta \cdot A_{s \text{ bal}} \cdot F_y}{\underbrace{K}_{0.85 \cdot f'_c \cdot b}}$$

Al sustituir,

$$A_{s \text{ bal}} = \overbrace{\rho_{\text{bal}} \cdot b \cdot d}^{\rho_{\text{bal}}} = 0.85 \cdot \underbrace{k_{\text{bal}}}_{c_{\text{bal}}/d} \cdot \beta_1 \cdot \left[\frac{f'_c}{F_y} \right] \cdot b \cdot d \quad [5.21a]$$

$$a_{\max} = \zeta \cdot \underbrace{k_{\text{bal}} \cdot d \cdot \beta_1}_{a_{\text{bal}}} \quad a_{\max} = \zeta \cdot a_{\text{bal}} \quad \therefore \quad c_{\max} = \zeta \cdot c_{\text{bal}} \quad [5.21b]$$

c) RELACIÓN ENTRE ζ y ε_s PARA SECCIONES RECTANGULARES. El más frecuente.

$$\varphi_{\text{bal}} = \frac{0.003}{c_{\text{bal}}} = \frac{(0.003 + \varepsilon_y)}{d}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{0.003}{c_{\max}} = \frac{(0.003 + \varepsilon_s)}{d}$$

De la ecuación 5.21 b sabemos que,

$$\frac{c_{\max}}{c_{\text{bal}}} = \zeta$$

$$\frac{\varphi_{\text{bal}}}{\varphi_{\max}} = \frac{c_{\max}}{c_{\text{bal}}} = \frac{(0.003 + \varepsilon_y)}{(0.003 + \varepsilon_s)} = \zeta$$

Arreglando y reescribiendo,

$$\varepsilon_s = \frac{(0.003 + \varepsilon_y)}{\zeta} - 0.003 \quad [5.22]$$

La Ecuación 5.22 relaciona la cantidad de acero en tracción expresada en función del parámetro ζ , con la deformación unitaria que este sufrirá. Los resultados para diversos valores de relación al balanceado (ζ) con aceros de límite a la fluencia $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ y $\varepsilon_y \cong 0.002$, se resumen en la Tabla 5.8.

Tabla 5.8 Valores de ε_s y ϕ para aceros de $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ y $\varepsilon_y = 0.002$

$\zeta \rightarrow$	1.0	0.75	0.50	0.25
$A_s \rightarrow$	$A_{s\text{ bal}}$	$0.75 \cdot A_{s\text{ bal}}$	$0.50 \cdot A_{s\text{ bal}}$	$0.25 \cdot A_{s\text{ bal}}$
ε_s Ec. 5.22	0.0020 (ε_y)	0.0037 ($1.85 \cdot \varepsilon_y$)	0.0070 ($3.50 \cdot \varepsilon_y$)	0.017 ($8.50 \cdot \varepsilon_y$)
ϕ Ec. 5.19	0.65	0.74	0.90	0.90

En ningún caso diseñaremos vigas en las que $\varepsilon_s < 0.004$, que corresponde a $\zeta \cong 0.75$

En zonas sísmicas recomendamos diseñar vigas para relaciones al balanceado (ζ) < 0.50 ■

5.14 DISEÑO CON ARMADURA SENCILLA $\rightarrow A'_s = 0$

El problema que se plantea consiste en encontrar la cantidad de acero longitudinal A_s para que la viga resista un momento \bar{M}_u y se garantice la falla por tracción sin que sea necesario colocar acero en la parte comprimida, $\therefore A'_s = 0$. Podremos diseñar con armadura sencilla si,

$$\bar{M}_u \leq M_1 \quad [5.23]$$

El valor de M_1 lo calcularemos de la siguiente forma,

- Dibujaremos el diagrama de deformaciones unitarias
- Calcularemos: c_{bal} , a_{bal} y $A_{c\text{ bal}}$
- Calcularemos el área en compresión máxima: $A_{c\text{ max}} = \zeta \cdot A_{c\text{ bal}}$
- Conocida $A_{c\text{ max}}$, calcularemos a_{max} , C_c y $A_{s1} = C_c/F_y$
- Calcularemos $M_1 = C_c \cdot z$

En el caso de secciones comprimidas rectangulares, los pasos se simplifican,

- Dibujaremos los diagramas de deformaciones unitarias
- Calcularemos c_{bal} , a_{bal} ,
- Calcularemos $a_{max} = a_{bal} \cdot \zeta$
- $C_{c\text{ max}} = K \cdot a_{max} \dots A_{s1} = C_{c\text{ max}}/F_y$
- $M_1 = C_{c\text{ max}} \cdot (d - a_{max}/2)$

M_1 es el máximo momento que resiste una sección con armadura sencilla, es decir, sin acero en la parte comprimida, para garantizar la falla por tracción con el valor de ζ seleccionado. Como veremos más adelante, si el momento actuante \bar{M}_u es mayor que M_1 diseñaremos con armadura doble añadiendo a A_{s1} , una cantidad de acero A_{s2} en tracción y en compresión colocaremos A'_s .

EJEMPLO 5.9

- a) Calcular el M_1 para la viga del Ejemplo 5.3.
 b) Calcular A_s para $M_{CM} = 22500 \text{ kg} \cdot \text{m}$ $M_{CV} = 5625 \text{ kg} \cdot \text{m}$ $d' = 8 \text{ cm}$ (ver Ejemplo 4.3 y compare)

Valores preliminares,

$$b = 30 \text{ cm}, d = 60 \text{ cm}, f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2, F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2, \beta_1 = 0.85, \zeta = 0.5, K = 6375 \text{ kg/cm}$$

- a) Del Ejemplo 5.2 sabemos que $A_{s\text{ bal}} = 46.45 \text{ cm}^2$, $K = 6375 \text{ kg/cm}$

Por relación de triángulos de la Figura 5.3,

$$c_{bal} = \frac{d}{\varepsilon_y + 0.003} \cdot 0.003$$

$$c_{bal} = \frac{d}{0.002 + 0.003} \cdot 0.003$$

$$c_{bal} = 0.6 \cdot d = 36 \text{ cm}$$

Por ser sección rectangular podemos usar la Ecuación 5.21b para calcular a_{max} ,

$$c_{max} = \zeta \cdot c_{bal} = 18 \text{ cm} \quad \text{y} \quad a_{max} = \zeta \cdot c_{bal} \cdot \beta_1$$

Es decir,

$$a_{max} = \frac{a_{bal}}{c_{bal} \cdot \beta_1} \cdot \zeta = 36 \cdot 0.85 \cdot 0.50 = 15.30 \text{ cm}$$

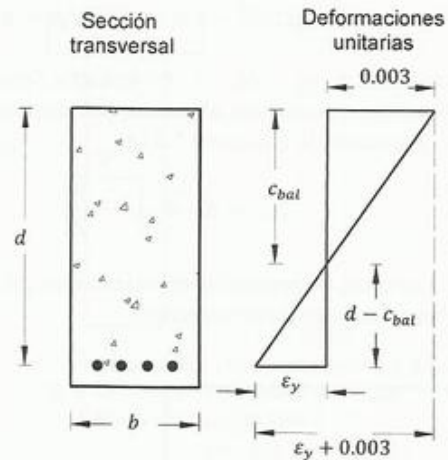


Fig. 5.7a Cálculo de c_{bal} (Ejemplo 5.9)

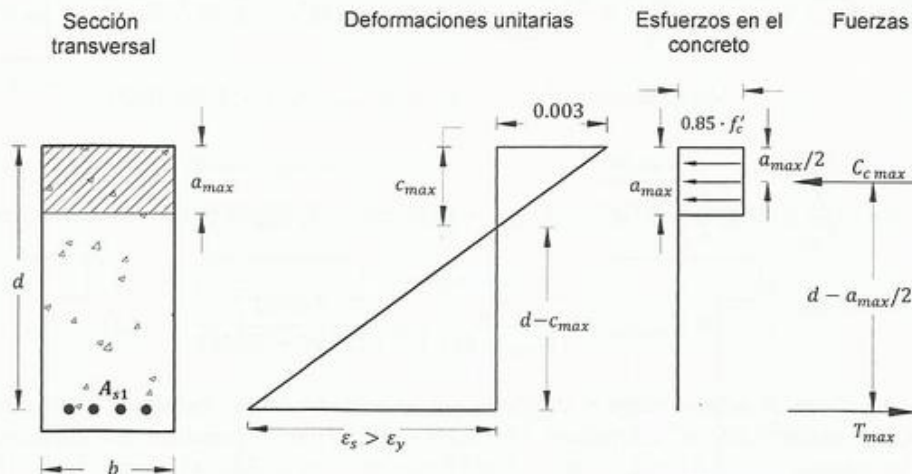


Fig. 5.7b Cálculo de M_1 y A_{s1} (Ejemplo 5.9)

Aplicando la Ecuación 5.9 para conseguir la fuerza de compresión en el concreto nos viene,

$$C_{c\text{ max}} = \overbrace{0.85 \cdot f'_c \cdot b}^K \cdot a_{max} = K \cdot a_{max} = 6375 \cdot 15.30 = 97538 \text{ kg}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales y despejando A_{s1} ,

$$A_{s1} = \frac{C_{c \max}}{F_y} = 23.22 \text{ cm}^2$$

Sumando momentos alrededor del acero en tracción (Ecuación 5.13a)

$$M_1 = C_{c \max} \cdot \left[d - \frac{a_{\max}}{2} \right] = 97538 \cdot \left[60 - \frac{15.30}{2} \right] = 5106088 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

b) $\bar{M}_u = (1.2 \cdot 22500 + 1.6 \cdot 5625) / \phi = 40000 \text{ kg} \cdot \text{m}$

40000 kg · m < $M_1 \therefore$ Armadura Sencilla

Sumando momentos alrededor del acero en tracción o aplicando la Ecuación 5.13a,

$$\bar{M}_u = \overbrace{K \cdot a}^{c_c} \cdot \overbrace{\left[d - \frac{a}{2} \right]}^z$$

Usaremos un procedimiento de tanteos, variando a , hasta conseguir convergencia,

Tabla 5.9 Valores de a y \bar{M}_u (Ejemplo 5.9)

a (cm)	\bar{M}_u (kg · m)
10.0	35063
12.0	41310
11.6	40081

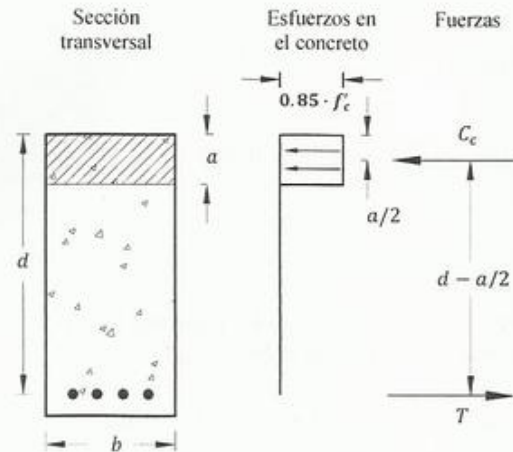


Fig. 5.7c Cálculo de \bar{M}_u y A_s (Ejemplo 5.9)

De la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\overbrace{A_s \cdot F_y}^T = \overbrace{K \cdot a}^{c_c} \quad A_s = \frac{\overbrace{K \cdot a}^{c_c}}{F_y} = \frac{6375 \cdot 11.60}{4200} = 17.60 \text{ cm}^2 \quad \begin{array}{l} \text{falla por tracción} \\ \varepsilon_s = 5.06 \cdot \varepsilon_y \quad \phi = 2.19 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

Verificaremos $A_{s \min} < A_s < A_{s \max}$ (ACI-318-08, 10-3)

$$\underbrace{A_{s \min}}_{\text{Ec. 2.1}} = 0.8 \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{f_c}}{F_y}}^{5.42 \text{ cm}^2} \cdot b \cdot d \geq \overbrace{\frac{14}{F_y}}^{6.00 \text{ cm}^2} \cdot b \cdot d \therefore A_{s \min} = 6.00 \text{ cm}^2 \dots A_{s \max} = 0.025 \cdot b \cdot d = 45 \text{ cm}^2 \quad O.K \quad \blacksquare$$

$$F.S_{\text{rotura}} = \frac{\bar{M}_u}{(M_{CM} + M_{CV})} = \frac{40000}{(22500 + 5625)} = 1.42$$

La misma viga, con la misma carga y diseñada por el método de los esfuerzos admisibles (Ejemplo 4.3) requiere, Compresión: 9.22 cm^2 ... Tracción: $24 + 8.19 = 32.18 \text{ cm}^2$. Al analizar esta última viga por el método de rotura se obtiene, $c = 18.5 \text{ cm}$ $\bar{M}_u = 69372 \text{ kg} \cdot \text{m}$ $\varepsilon_s = 3.5 \cdot \varepsilon_y$ $\phi = 1.62 \cdot 10^{-4}$. El factor de seguridad al aplicar el método de los esfuerzos admisible para el caso en estudio es de,

$$F.S_{\text{esf.admisibles}} = \frac{69372}{22500 + 5625} = 2.47 \rightarrow \text{comparando } \left(\frac{2.47}{1.42} \sim 1.68 \text{ es decir un } 68\% \uparrow \right) \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.10

- a) Calcular el M_1 para la viga en T. (Figura 5.8)
 b) Calcular A_s para $\bar{M}_u = 6000 \text{ kg} \cdot \text{m}$.

Valores preliminares

$$b = 20 \text{ cm}, b_o = 10 \text{ cm}, d = 40 \text{ cm}, t = 5 \text{ cm}, f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2, F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2, \\ \beta_1 = 0.85, \zeta = 0.5.$$

- a) Calcularemos M_1 (sección no rectangular)

$$c_{bal} = \frac{d}{\epsilon_y + 0.003} \cdot 0.003 = 0.60 \cdot 40 = 24 \text{ cm}$$

$$a_{bal} = \beta_1 \cdot c_{bal} = 0.85 \cdot 24 = 20.4 \text{ cm} > t = 5 \text{ cm}$$

$$A_{c\text{ bal}} = 20 \cdot 5 + (20.4 - 5) \cdot 10 = 254 \text{ cm}^2$$

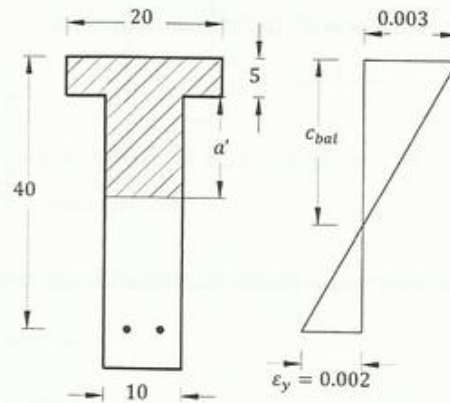
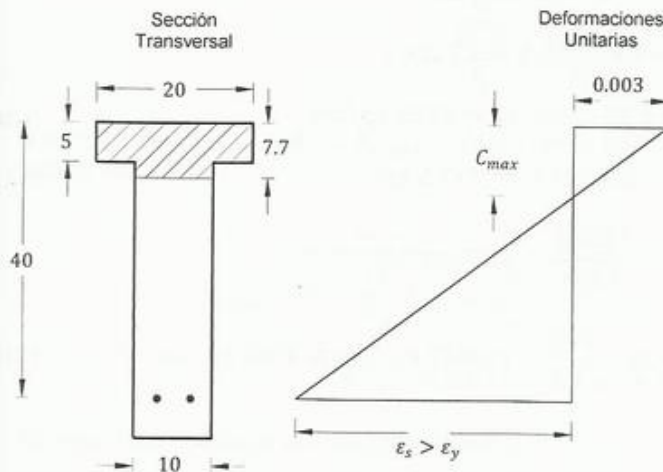


Fig. 5.8a Sección T. Armadura Sencilla. Cálculo de c_{bal} (Ejemplo 5.10)

$$A_{c\text{ max}} = \zeta \cdot A_{c\text{ bal}} = 254 \cdot 0.5 = 127 \text{ cm}^2$$

$$A_{c\text{ max}} > b \cdot t = 20 \cdot 5 = 100 \text{ cm}^2$$

$$a_{\text{max}} = \frac{127 - 100}{10} + 5 = 7.7 \text{ cm}$$

Fig. 5.8b Área de compresión máxima (Ejemplo 5.10)

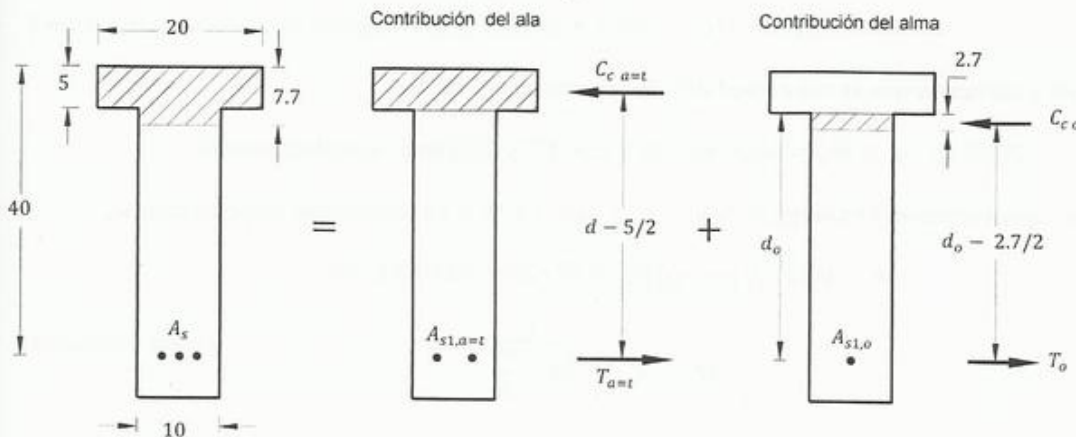


Fig. 5.8c Fuerzas en el concreto y acero (Ejemplo 5.10)

Calcularemos el momento producido por el ala y la correspondiente área de acero con las ec. 5.10, 5.11 y 5.13,

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 250 \cdot 20 = 4250 \text{ kg/cm}$$

$$C_{ca=t} = K \cdot a_{a=t} = 4250 \cdot 5 = 21250 \text{ kg}$$

$$M_{1, a=t} = C_{ca=t} \cdot \left[d - \frac{a_{a=t}}{2} \right] = 21250 \cdot \left[40 - \frac{5}{2} \right] = 796875 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cong 7969 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\frac{T}{A_{s1, a=t} \cdot F_y} = \frac{C_{ca=t}}{K \cdot a}$$

$$A_{s1, a=t} = \frac{C_{ca=t}}{F_y} = \frac{21250}{4200} = 5.06 \text{ cm}^2$$

Calcularemos el momento producido por el alma y la correspondiente área de acero,

$$d_o = d - t = 40 - 5 = 35 \text{ cm}$$

$$a_o = a_{\max} - t = 7.7 - 5 = 2.7 \text{ cm}$$

$$K_o = 0.85 \cdot f'_c \cdot b_o = 0.85 \cdot 250 \cdot 10 = 2125 \text{ kg/cm} \quad [5.10]$$

$$C_o = K_o \cdot a_o = 2125 \cdot 2.7 = 5737.5 \text{ kg} \quad [5.11]$$

$$A_{s1, o} = \frac{C_o}{F_y} = \frac{5737.5}{4200} = 1.37 \text{ cm}^2$$

$$M_{1, o} = C_o \cdot \left[d_o - \frac{a_o}{2} \right] = 5737.5 \cdot \left[35 - \frac{2.7}{2} \right] = 193067 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cong 1931 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad [5.13]$$

Calcularemos A_{s1} y M_1

$$A_{s1} = A_{s1, a=t} + A_{s1, o} = 5.06 + 1.37 = 6.43 \text{ cm}^2$$

$$M_1 = M_{1, a=t} + M_{1, o} = 7969 + 1931 = 9900 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

b) De la parte a) sabemos que la capacidad del ala, cuando $a = t$ es de,

$$7969 \text{ kg} \cdot \text{m} > \bar{M}_u = 6000 \text{ kg} \cdot \text{m} \therefore a < t \text{ y tendremos armadura sencilla.}$$

La sección comprimida será rectangular de área $b \cdot a$. De 5.10 y 5.13 tendríamos, respectivamente,

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 250 \cdot 20 = 4250 \text{ kg/cm}$$

$$\bar{M}_u = \frac{C_c}{K \cdot a} \cdot \left[d - \frac{a}{2} \right]$$

Usaremos el procedimiento de tanteos, variando a , hasta conseguir convergencia,

Tabla 5.10 Valores de a y \bar{M}_u (Ejemplo 5.10)

a (cm)	\bar{M}_u (kg · m)
4.5	7220
4.0	6460
3.8	6153
3.7	5999

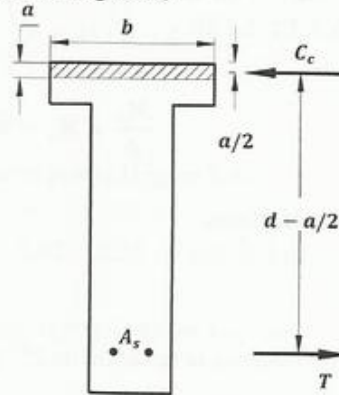


Fig. 5.8d Valores de \bar{M}_u y A_s (Ejemplo 5.10)

De la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\overbrace{A_s \cdot F_y}^T = \overbrace{K \cdot a}^{C_c}$$

$$A_s = \frac{\overbrace{K \cdot a}^{C_c}}{F_y} = \frac{4250 \cdot 3.7}{4200} = 3.74 \text{ cm}^2$$

Verificaremos $A_{s \min} < A_s < A_{s \max}$ (ACI 318-08, 10-3 y) usaremos $b_o = 10 \text{ cm}$, que es la parte que está en tracción.

$$A_{s \min} = \overbrace{0.8 \cdot \frac{\sqrt{f'_c}}{F_y} b \cdot d}^{1.20 \text{ cm}^2} \geq \overbrace{\frac{14}{F_y} \cdot b \cdot d}^{1.33 \text{ cm}^2} \quad \therefore \quad A_{s \min} = 1.33 \text{ cm}^2 \quad O.K$$

$$A_{s \max} = 0.025 \cdot b \cdot d = 10 \text{ cm}^2 \quad O.K \quad \blacksquare$$

En vigas bien diseñadas casi siempre se tiene $a < t$ como veremos más adelante.

5.15 SECCIONES RECTAGULARES. SIMPLIFICACIONES

- Partiremos de la ecuación de equilibrio de fuerzas,

$$\overbrace{\overbrace{K}^{C_c} \cdot a}^{0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a} = \overbrace{\overbrace{A_s}^T \cdot d}^{\rho \cdot b \cdot d \cdot F_y} \cdot F_y$$

$$\therefore \quad \overbrace{\rho \cdot \frac{F_y}{f'_c}}^{\omega \text{ (Ec.2.6)}} = 0.85 \cdot \left[\frac{a}{d} \right]$$

- Al sustituir queda,

$$\omega = 0.85 \cdot \left[\frac{a}{d} \right] \quad \text{ó} \quad a = \frac{d}{0.85} \cdot \omega \rightarrow \frac{a}{d} = 1.18 \cdot \omega \quad [5.24]$$

- Nos apoyaremos en la ecuación de equilibrio. Sumando momentos alrededor de la fuerza T , tendríamos, (Figura 5.3, Ec. 5.13):

$$\frac{M_u}{\phi} = \bar{M}_u = \overbrace{K \cdot a}^{c_c} \cdot \overbrace{\left(d - \frac{a}{2}\right)}^z = K \cdot a \cdot d - K \cdot \frac{a^2}{2} \quad [a]$$

Arreglando términos,

$$\frac{a^2}{2} - d \cdot a + \frac{\bar{M}_u}{K} = 0$$

Al resolver tenemos la ecuación de 2^{do} grado,

$$a = d - \sqrt{d^2 - 2 \cdot \bar{M}_u / K} \quad [5.25]$$

La ecuación a puede reescribirse así,

$$\bar{M}_u = K \cdot d^2 \cdot \frac{a}{d} \left[1 - \frac{a}{2 \cdot d}\right] \rightarrow \text{sustituyendo 5.24} \dots \bar{M}_u = \overbrace{0.85 \cdot f'_c \cdot b}^K \cdot d^2 \cdot 1.18 \cdot \omega \cdot [1 - 0.59 \cdot \omega]$$

Simplificando,

$$\bar{M}_u = R \cdot b \cdot d^2 \quad [5.26a]$$

$$d = \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{R \cdot b}} \quad [5.26b]$$

Donde,

$$R = f'_c \cdot \omega \cdot (1 - 0.59 \cdot \omega)$$

La Ecuación 5.26b puede emplearse en secciones rectangulares para determinar la altura mínima requerida para diseñar con armadura sencilla. ■

EJEMPLO 5.11

Viga rectangular. Calcular la altura mínima de la viga para diseñar con armadura sencilla ($d = d_{min}$) y la cantidad de acero requerida.

$$\begin{aligned} \zeta_{max} &= 0.50 \\ \phi &= 0.90 \\ f'_c &= 250 \text{ kg/cm}^2 \\ F_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ b &= 30 \text{ cm} \\ K &= 6375 \text{ kg/cm} \\ \beta_1 &= 0.85 \\ \bar{M}_u &= 47124 \text{ kg} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

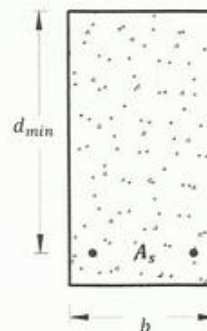


Fig. 5.9 Sección rectangular (Ejemplo 5.11)

De la Ecuación 5.24,

$$\omega = 0.85 \cdot \left(\frac{\frac{a_{max}}{\zeta \cdot a_{bal}}}{d_{min}} \right) = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \left(\frac{\frac{c_{max}}{\zeta \cdot c_{bal}}}{d_{min}} \right) = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \zeta \cdot k_{bal}$$

$$\therefore \omega = 0.85 \cdot \beta_1 \cdot (\zeta \cdot k_{bal})$$

Por relación de triángulos, asumiendo que secciones planas permanecen planas (Figura 5.4)

$$k_{bal} = \frac{c_{bal}}{d_{min}} = \frac{0.003}{0.003 + 0.002} = 0.6 \dots \omega = 0.85 \cdot 0.85 \cdot (0.50 \cdot 0.60) = 0.22$$

$$R = f'_c \cdot \omega \cdot (1 - 0.59 \cdot \omega) = 250 \cdot 0.22 \cdot (1 - 0.59 \cdot 0.22) = 47.86 \text{ kg/cm}^2$$

Al aplicar 5.26 b:

$$d_{min} = \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{R \cdot b}} = \sqrt{\frac{47124 \cdot 10^2}{47.86 \cdot 30}} = 57.28 \text{ cm}$$

Si diseñáramos la viga para $d = 57.28 \text{ cm}$, tendríamos $\zeta = 0.50 \therefore \epsilon_s = 3.50 \cdot \epsilon_y$

$d > 57.28 \text{ cm}$, tendríamos $\zeta < 0.50 \therefore \epsilon_s > 3.50 \cdot \epsilon_y$

$d < 57.28 \text{ cm}$, tendríamos $\zeta > 0.50 \therefore \epsilon_s < 3.50 \cdot \epsilon_y$ *

Ver Tabla 5.8

* Este es un caso indeseado pues tenemos $\epsilon_s < 0.007$. Para incrementar ϵ_s necesitaremos de armadura doble, como veremos más adelante.

Asumiremos $d = 60 \text{ cm}$, calcularemos el área de acero,

$$a = d - \sqrt{d^2 - 2 \bar{M}_u / K} = 60 - \sqrt{60^2 - 2 (47124 \cdot 10^2 / 6375)} = 13.94 \text{ cm}$$

$$\frac{\tau}{A_s \cdot F_y} = \frac{c c}{K \cdot a} \therefore A_s = \frac{K \cdot a}{F_y} = \frac{6375 \cdot 13.94}{4200} = 21.16 \text{ cm}^2$$

Verificaremos $A_{s \min} < A_s < A_{s \max}$ (ACI 10-3)

$$A_{s \min} = 0.8 \cdot \frac{\overbrace{5.42 \text{ cm}^2}^{\sqrt{f'_c}}}{F_y} \cdot b \cdot d \geq \frac{\overbrace{6.00 \text{ cm}^2}^{14}}{F_y} \cdot b \cdot d \therefore A_{s \min} = 5.42 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

$$A_{s \max} = 0.025 \cdot b \cdot d = 45 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

Por curiosidad verificaremos los valores de ζ y ϵ_s . $A_{s \text{ bal}}$. Del Ejercicio 5.2 se obtiene (las secciones son idénticas), $b = 30 \text{ cm}$ y $d = 60 \text{ cm}$. De 5.20,

$$\zeta = \frac{\rho_{max}}{\rho_{bal}} = \frac{A_s}{A_{s \text{ bal}}} = \frac{21.16 \text{ cm}^2}{46.45 \text{ cm}^2} = 0.46$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{13.94}{0.85} = 16.40$$

Por relación de triángulos, ó según la Ecuación 5.16,

$$\epsilon_s = \frac{0.003}{c} \cdot (d - c) = \frac{0.003}{16.40} \cdot (60 - 16.40) = 0.00797 = 3.99 \cdot \epsilon_y \quad \blacksquare$$

5.16 CASO PARTICULAR. MIEMBROS CON $f'_c < 280 \text{ kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ y $\zeta = 0.50$

El más común encontrado en la práctica. Al sustituir estos valores encontramos,

$$\omega = 0.22 \quad R = \frac{f'_c}{5.29}$$

Lo que permite simplificar la expresión para calcular d_{min} para diseñar con armadura sencilla:

$$d_{min} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{f'_c \cdot b}} \quad \blacksquare \quad [5.27]$$

Para diseños preliminares, en vigas con $\rho < \rho_{bal}$

De 5.13b,

$$\bar{M}_u = \overbrace{A_s \cdot F_y}^T \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right)$$

Podemos aproximar,

$$\left(d - \frac{a}{2}\right) \cong \frac{7}{8} \cdot d$$

Sumando momento alrededor de C_c (Figura 5.10)

$$\bar{M}_u = \overbrace{A_s \cdot F_y}^T \cdot \overbrace{\frac{7}{8} \cdot d}^{\sim z} \quad [5.28a]$$

$$A_s = \frac{\bar{M}_u}{F_y \cdot \frac{7}{8} \cdot d} \quad [5.28b]$$

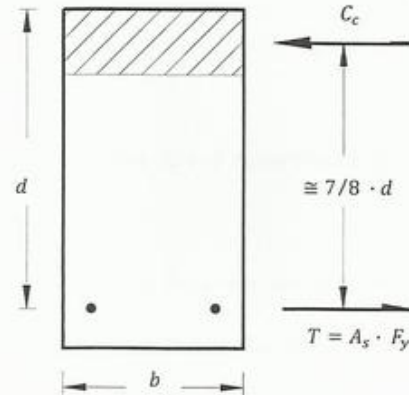


Fig. 5.10 Sección rectangular. Brazo de palanca aproximado para secciones que fallan por tracción

Lo que simplifica considerablemente el cálculo de la cantidad de acero requerido. ■

EJEMPLO 5.12

Resolver el Ejemplo 5.11 usando las fórmulas aproximadas (5.27)

$$d_{min} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{f'_c \cdot b}} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{40000 \cdot 10^2}{250 \cdot 30}} = 53.11 \text{ cm}$$

Para ser consistentes con el ejercicio anterior asumiremos $d = 60 \text{ cm}$. Al aplicar 5.28b nos viene,

$$A_{s1} = \frac{\bar{M}_u}{F_y \cdot \frac{7}{8} \cdot d} = \frac{40000 \cdot 10^2}{4200 \cdot \frac{7}{8} \cdot 60} = 18.14 \text{ cm}^2$$

Un 3% más que con la Ecuación 5.26b. Debido a que en secciones con $\rho < \rho_{bal}$ la adición de acero en compresión A'_s tiene muy poco efecto en la resistencia de elementos, la Ecuación 5.27 puede usarse en miembros con armadura doble. ■

Observaciones

En la práctica, d se fija en la etapa del predimensionado, mucho antes de calcular la cantidad de acero, lo que simplifica considerablemente los cálculos. Recomendaciones para pre-dimensionar las vigas de edificaciones residenciales y comerciales,

$$d \sim \frac{\text{Luz Libre}}{\alpha} \geq 30 \text{ cm} \quad 25 \text{ cm} < b < 40 \text{ cm} \\ \alpha = 10 \sim 16$$

Para viviendas de hasta 2 niveles con luces entre 4 y 5 metros, se puede usar como mínimo, $b = 20 \text{ cm}$ y $d = 30 \text{ cm}$ y columnas de no menos de $25 \times 25 \text{ cm}$ y preferiblemente $30 \times 30 \text{ cm}$.

5.17 DISEÑO CON ARMADURA DOBLE $\rightarrow A'_s > 0$

Será necesaria si,

$$\bar{M}_u > M_1$$

El remanente de demanda M_2 es,

$$M_2 = \bar{M}_u - M_1 \quad [5.29]$$

M_2 será cubierto al agregar A_{s2} en tracción y colocar A'_s en compresión. Al colocar A'_s y añadir A_{s2} en una viga bien diseñada la posición del eje neutro no cambia, tampoco lo hará la curvatura ϕ (ver Sección 5.10).

a) ÁREA COMPRIMIDA DE CONCRETO A_c

El valor exacto del área comprimida $A_{c \max}$ es igual al área total de concreto en compresión menos la ocupada por el acero A'_s .

Área comprimida de concreto (Figura 5.11)

$$A_{cc} = A_{c \max} - A'_s \quad (\text{Área sombreada})$$

$$A_{cc} = b \cdot a_{\max} - A'_s$$

$$C = 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a_{\max} - 0.85 \cdot f'_c \cdot A'_s + A'_s \cdot f'_s$$

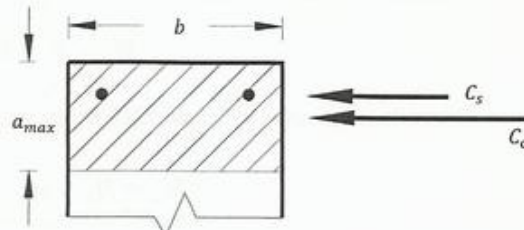


Fig. 5.11 Área comprimida en armadura doble

$$C = \overbrace{K \cdot a_{\max}}^{C_{c \max}} + \overbrace{A'_s \cdot (f'_s - 0.85 \cdot f'_c)}^{C_s} = k \cdot a + A'_s \cdot f'_s \quad [a]$$

El valor aproximado de A_c , sin descontar los vacíos de concreto ocupado por las cabillas,

$$C = K \cdot a_{\max} + A'_s \cdot f'_s \quad [b]$$

La diferencia entre las ecuaciones [a] y [b] es de,

$$A'_s \cdot 0.85 \cdot f'_c$$

Por el orden de $200 \cdot A'_s$. Esta diferencia influye muy poco en el resultado final.

b) ECUACIONES SIN DESCONTAR VACÍOS

La compresión será compartida por el concreto y A'_s (Figura 5.13),

$$C = \overbrace{K \cdot a_{max}}^{C_c} + \overbrace{A'_s \cdot f'_s}^{C_s}$$

La ecuación de equilibrio queda,

$$\overbrace{A_s}^{A_{s1}+A_{s2}} \cdot F_y = \overbrace{K \cdot a_{max}}^{C_c} + \overbrace{A'_s \cdot f'_s}^{C_s} \quad [5.30]$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$A'_s \cdot f'_s = A_{s2} \cdot F_y \quad [5.31]$$

Por relación de triángulos de la Figura 5.12 encontramos la Ecuación 5.18..... $\epsilon'_s = (c - d') \cdot 0.003 / c$

Multiplicando ambos lados de la Ecuación 5.18 por E_s

$$f'_s = (c - d') \cdot 6300 / c \leq F_y \quad \text{ó} \quad f'_s = \overbrace{\epsilon'_s \cdot E_s}^{\text{Ley de Hooke}} \leq F_y$$

De la ecuación 5.30 nos viene,

$$a_{max} = \frac{(A_s \cdot F_y - A'_s \cdot f'_s)}{K}$$

Sumando momentos tendríamos,

$$M_2 = A_{s2} \cdot F_y \cdot (d - d') = A'_s \cdot f'_s \cdot (d - d') \quad [5.32a]$$

Sumando momentos alrededor del acero en tracción nos queda,

$$\bar{M}_u = M_1 + M_2 = C_{c \max} \cdot \left[d - \frac{a_{max}}{2} \right] + C_s \cdot [d - d'] \quad [5.33]$$

La Ecuación 5.32a se puede escribir así,

$$A_{s2} = \frac{M_2}{F_y \cdot (d - d')} \dots \dots A'_s = \frac{M_2}{f'_s \cdot (d - d')} \quad \blacksquare \quad [5.32b]$$

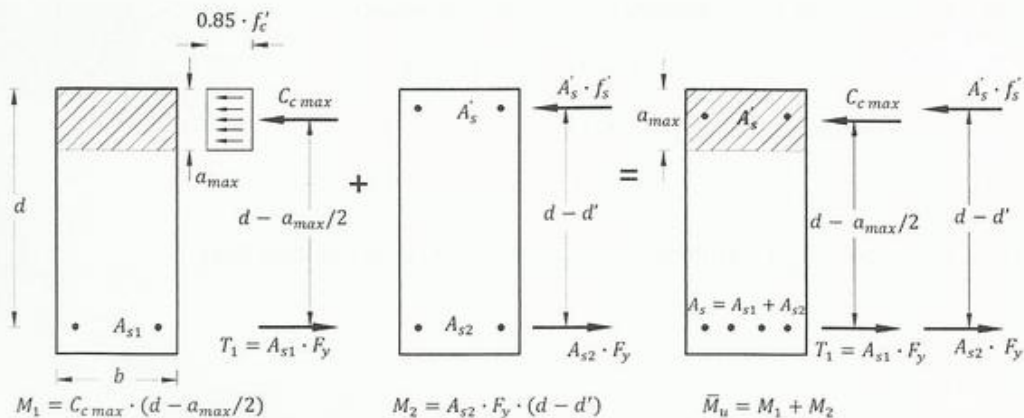


Fig. 5.13 Armadura doble. Fuerzas en el concreto y acero

EJEMPLO 5.13

Calcular la cantidad de acero para la viga del ejemplo en estudio,

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 60 \text{ cm}$$

$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\beta_1 = 0.85$$

$$\bar{M}_u = 60000 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$d' = 7 \text{ cm}$$

Del problema 5.9 sabemos que $M_1 = 51061 \text{ kg} \cdot \text{cm} < \bar{M}_u$. Tendremos Armadura Doble.

También sabemos que: $A_{s1} = 23.22 \text{ cm}^2$ y que $a_{max} = 15.30 \text{ cm} \therefore c_{max} = a_{max}/\beta_1 = 18.00 \text{ cm}$

De 5.29,

$$M_2 = \bar{M}_u - M_1 = 60000.00 - 51053.81 = 8946.19 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Al aplicar 5.18,

$$\epsilon'_s = (c - d') \cdot \frac{0.003}{c} = (18 - 7) \cdot \frac{0.003}{18} = 0.00183$$

Aplicando la ley de Hooke,

$$f'_s = \frac{3850 \text{ kg/cm}^2}{\epsilon'_s \cdot E_s} \leq \frac{4200 \text{ kg/cm}^2}{F_y}$$

$$\therefore f'_s = 3850 \text{ kg/cm}^2$$

De acuerdo con 5.32b,

$$A_{s2} = \frac{M_2}{F_y \cdot (d - d')} = \frac{8946.19 \cdot 10^2}{4200 \cdot (60 - 7)} = 4.02 \text{ cm}^2$$

$$A'_s = \frac{M_2}{f'_s \cdot (d - d')} = \frac{8946.19 \cdot 10^2}{3850 \cdot (60 - 7)} = 4.38 \text{ cm}^2$$

Tendríamos abajo: Acero en tracción,

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 23.22 + 4.02 = 27.24 \text{ cm}^2$$

Arriba: Acero en compresión,

$$A'_s = 4.38 \text{ cm}^2$$

Abajo colocaremos 7 cabillas de 7/8" para un total de 27.16 cm^2 . *

Arriba colocaremos 2 barras de 3/4" para un total de 5.70 cm^2 .

* Se necesita un ancho de aproximadamente 45 cm para colocar 7 cabillas de 7/8" en una sola capa de acero (ver Apéndice A, Tabla A.24). Tendremos que colocar acero en dos capas. Los diseños con armadura doble requieren de gran cantidad de acero en tracción que generalmente es difícil de colocar en el ancho usual de la viga (entre 25 y 40 cm) en una capa, como es preferible. Optaremos por usar secciones con armadura sencilla, si los requerimientos constructivos lo permiten. ■

EJEMPLO 5.14

Usando las fórmulas aproximadas redimensionar la viga del ejemplo anterior pero con armadura sencilla. $b = 30 \text{ cm}$, $d = ?$, $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$, y $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. $\beta_1 = 0.85$, $K = 6375 \text{ kg/cm}$, $\zeta = 0.5$, $\bar{M}_u = 60000 \text{ kg} \cdot \text{m}$. Calcular el área de acero requerida.

De la Ecuación 5.27,

$$d = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{f'_c \cdot b}} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{60000 \cdot 10^2}{250 \cdot 30}} = 65.00 \text{ cm}$$

Asumiremos: $d = 65 \text{ cm}$ (y tendremos garantía de que se cumplirá la armadura sencilla). Por equilibrio de momentos al aplicar la Ecuación 5.13a,

$$\bar{M}_u = \overbrace{K \cdot a}^{c_c} \cdot \overbrace{\left(d - \frac{a}{2}\right)}^z$$

Usaremos el procedimiento de tanteos, variando a , hasta conseguir convergencia:

Tabla 5.11 Valores de a y \bar{M}_u (Ejemplo 5.14)

a (cm)	\bar{M}_u (kg · cm)
15.00	54984.38
16.00	58140.00
16.50	59693.91

Como la sección comprimida es rectangular podemos también usar la Ecuación 5.25 para encontrar a ,

$$a = d - \sqrt{d^2 - 2 \cdot \bar{M}_u / K} = 65 - \sqrt{65^2 - 2 \cdot 60000 \cdot 10^2 / 6375} = 16.59 \text{ cm} \quad O.K$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\overbrace{A_s \cdot F_y}^r = \overbrace{K \cdot a}^{c_c} \dots \dots \dots A_s = \frac{6375 \cdot 16.59}{4200} = 25.18 \text{ cm}^2$$

Alternativamente podemos calcular A_s con la ecuación de equilibrio de momentos (Ecuación 5.13b),

$$\bar{M}_u = \overbrace{A_s \cdot F_y}^r \cdot \overbrace{\left(d - \frac{a}{2}\right)}^z$$

$$A_s = \frac{\bar{M}_u}{F_y \cdot (d - a/2)} = \frac{60000 \cdot 10^2}{4200 \cdot (65 - 16.6/2)} = 25.17 \text{ cm}^2 \dots OK$$

Verificaremos $A_{s \min} < A_{s1} < A_{s \max}$ (ACI 10.3)

$$A_{s \min} = \overbrace{0.8 \cdot \frac{\sqrt{f'_c}}{F_y} \cdot b \cdot d}^{5.87 \text{ cm}^2} \geq \overbrace{\frac{14}{F_y} \cdot b \cdot d}^{6.50 \text{ cm}^2} \quad \therefore \quad A_{s \min} = 6.50 \text{ cm}^2 \quad O.K$$

$$A_{s \max} = 0.025 \cdot b \cdot d = 48.75 \text{ cm}^2 \quad O.K \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.15

Deducir el valor del porcentaje mínimo de acero para una sección rectangular. Asumir f_{tr} como la resistencia del concreto a tracción por flexión.

El porcentaje mínimo ρ de acero de tracción debe ser tal que el momento último (\bar{M}_u) sea por lo menos igual al momento de agrietamiento (M_{agr}) (Figura 5.14).

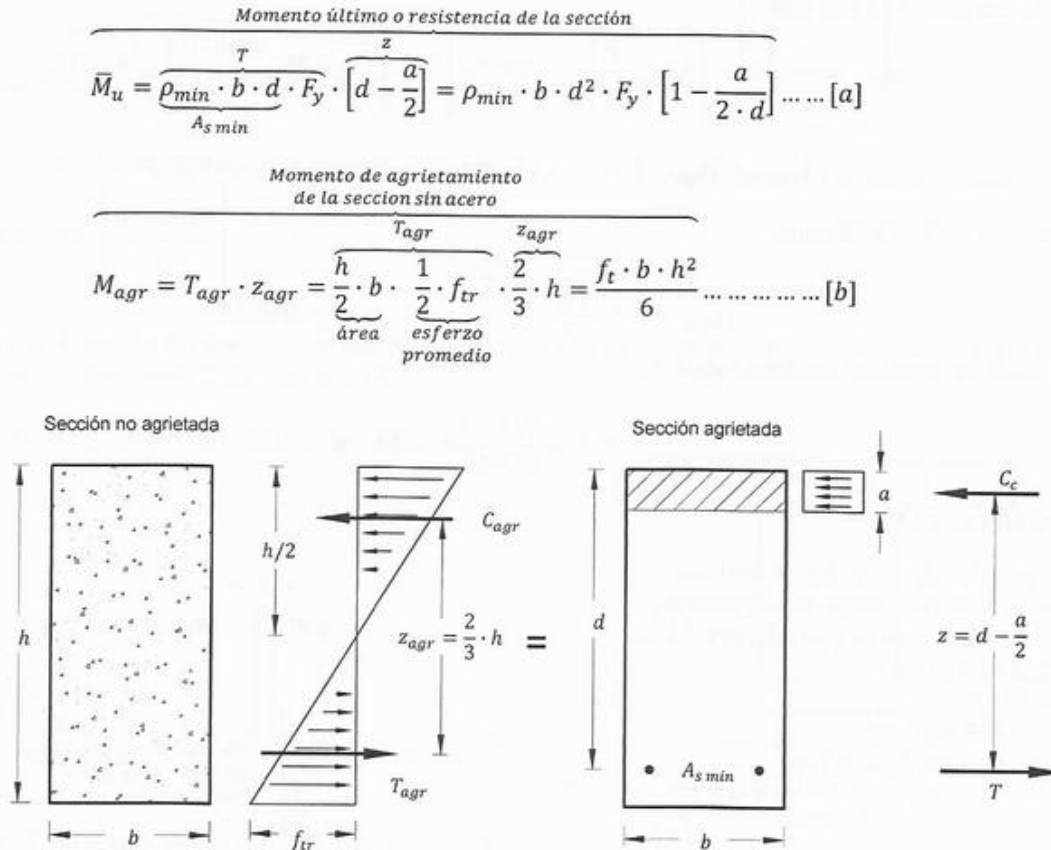


Fig. 5.14 Fuerzas en el concreto y acero inmediatamente antes y después del agrietamiento

Igualando a y b ,

$$\bar{M}_u = M_{agr} = \rho_{min} \cdot b \cdot d^2 \cdot F_y \cdot \left[1 - \frac{a}{2 \cdot d}\right] = \frac{f_{tr} \cdot b \cdot h^2}{6} \dots \dots [c]$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a = \rho_{min} \cdot b \cdot d \cdot F_y \therefore \frac{a}{d} = \frac{\rho_{min}}{m} \quad \text{donde} \quad m = 0.85 \cdot f'_c / F_y \dots \dots [d]$$

$$\rho_{min} \cdot b \cdot d^2 \cdot F_y \cdot \left[1 - \frac{\rho_{min}}{2 \cdot m}\right] = \frac{f_{tr} \cdot b \cdot h^2}{6} \dots \dots \text{Si definimos} \quad g = \frac{d}{h} \dots \dots q = \frac{f_{tr}}{f'_c}$$

Al resolver,

$$\rho_{min} = m \cdot \left[1 - \sqrt{0.40 \cdot \frac{q}{g^2}}\right] \quad \blacksquare \quad [5.34]$$

EJEMPLO 5.16

Calcular $A_{s\ min}$ para la siguiente viga: $F_y = 4200\ kg/cm^2$, $f'_c = 280\ kg/cm^2$, $f_{tr} = 30\ kg/cm^2$, $b = 30\ cm$, $d = 45\ cm$ y $h = 50\ cm$.

$$m = 0.85 \cdot \frac{f'_c}{F_y} = 0.85 \cdot \frac{280}{4200} = 0.0567 \dots g = \frac{d}{h} = \frac{45}{50} = 0.90 \dots q = \frac{f_{tr}}{f'_c} = \frac{30}{280} = 0.1070$$

De la Ecuación 5.34 nos viene,

$$\rho_{min} = m \cdot \left[1 - \sqrt{0.40 \cdot \frac{q}{g^2}} \right] = 0.0567 \cdot \left[1 - \sqrt{1 - 0.40 \cdot \frac{0.1070}{0.90^2}} \right] = 0.0015$$

$$A_{s\ min} = \rho_{min} \cdot b \cdot d = 2.05\ cm^2 \text{ (sin factor de seguridad)}$$

El código ACI-318-08 toma,

$$\rho_{min} = 0.8 \cdot \frac{\sqrt{f'_c}}{F_y} \geq \frac{14}{F_y} \quad \therefore \rho_{min} = 0.0033$$

El factor de seguridad resultante sería de,

$$F.S. = \frac{0.0033}{0.0015} \cong 2.20 \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.17

Calcular A_s , \bar{M}_u , ϵ_s y ϕ para distintos valores de a , en el tramo (en C) central y en la cara del apoyo (en A). Figura 5.15a

$$f'_c = 210\ kg/cm^2$$

$$d = 50\ cm$$

$$F_y = 4200\ kg/cm^2$$

$$\text{Ancho efectivo } b_e = 80\ cm$$

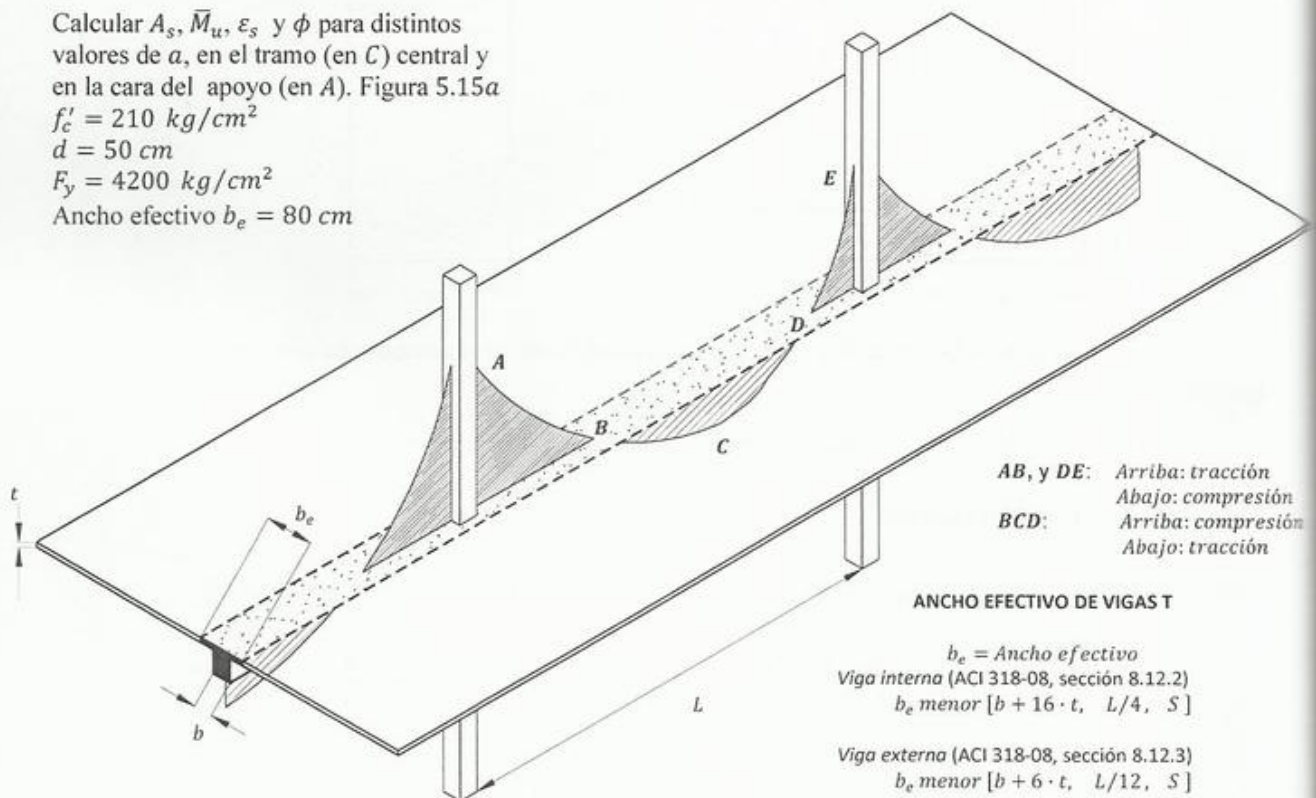


Fig. 5.15a Viga continua en estudio y definición de ancho efectivo (Ejemplo 5.17)

Valores preliminares

Al aplicar la Ecuación 5.14,

$$\beta_1 = 1.05 - f'_c/1400 \leq 0.85 \quad \therefore \quad \beta_1 = 0.85$$

$$A_{s \max} = 0.025 \cdot b' \cdot d = 33.75 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \min} = 0.8 \cdot \frac{\overbrace{4.14 \text{ cm}^2}^{\sqrt{f'_c}}}{F_y} \cdot b' \cdot d \geq \frac{\overbrace{5.00 \text{ cm}^2}}{F_y} \cdot b' \cdot d \quad \therefore \quad A_{s \min} = 5.00 \text{ cm}^2$$

Al aplicar 5.16 nos viene,

$$\varepsilon_s = 0.003 \cdot \left[\frac{d - \frac{c}{\beta_1}}{\frac{a/\beta_1}{c}} \right]$$

En el apoyo A. Tracción arriba. Sección comprimida rectangular de ancho $b' = 30 \text{ cm}$. (Figura 5.15c). Al aplicar las ecuaciones 5.10, 5.11 y 5.13:

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 210 \cdot 30 = 5355 \text{ kg/cm}$$

$$C_c = K \cdot a$$

$$\bar{M}_u = C_c \cdot (d - a/2)$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$A_s = C_c / F_y$$

Los resultados se resumen en la Tabla 5.12

En el tramo C. Tracción abajo. Sección T. (Figura 5.15d)

Al aplicar las ecuaciones 5.10, 5.11 y 5.13:

Para $a < t = 10 \text{ cm}$ (Figura 5.15d)

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 210 \cdot 80 = 14280 \text{ kg/cm}$$

$$C = K \cdot a$$

$$\bar{M}_u = C_c \cdot (d - a/2)$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$A_s = C_c / F_y$$

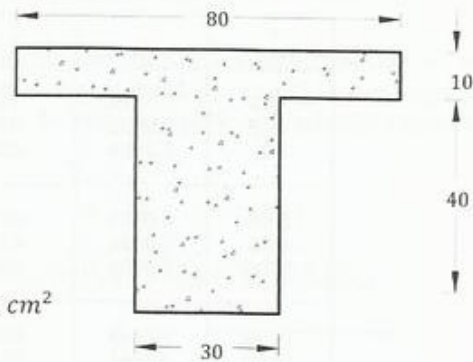


Fig. 5.15b Viga T en estudio (Ejemplo 5.17)

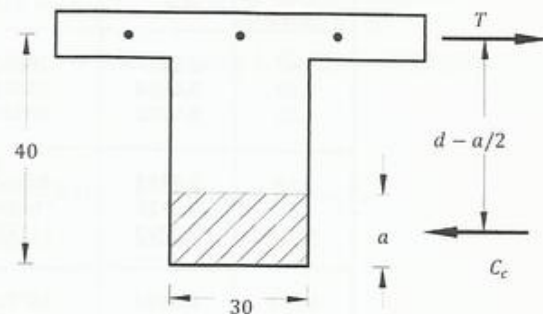


Fig. 5.15c Fuerzas en el concreto y acero sobre el apoyo (Ejemplo 5.17)

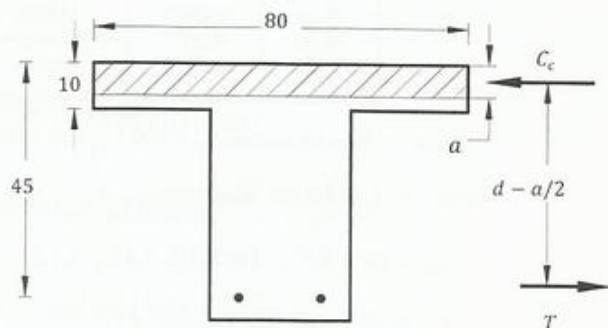


Fig. 5.15d Fuerzas en el concreto y acero en el tramo cuando $a < t$ (Ejemplo 5.17)

Tabla 5.12 Valores de C_c , A_s y M_u . En el apoyo A: Tracción Arriba

a (cm)	ε_s	$C_c = T$ (kg)	A_s (cm ²)	\bar{M}_u (kg.m)	ϕ	$\phi \cdot \bar{M}_u = M_u$ (kg.m)
1.50	0.0820	8033	1.91	3956	0.90	3560
2.00	0.0608	10710	2.55	5248	0.90	4723
3.92	0.0295	20992	5.00	10084	0.90	9076
6.00	0.0183	32130	7.65	15101	0.90	13591
8.00	0.0129	42840	10.20	19706	0.90	17736
10.00	0.0098	53550	12.75	24098	0.90	21688
15.00	0.0055	80325	19.13	34138	0.86	29302
18.00	0.0041	96390	22.95	39520	0.74	29256
18.20	0.0040	97461	23.21	39862	0.73	29250
20.00	0.0034	107100	25.50	42840	0.68	29185
22.00	0.0028	117810	28.05	45946	0.65	29865
24.00	0.0023	128520	30.60	48838	0.65	31744

Para $a < 3.92$ tendremos $A_s < A_{s \min} = 5.00 \text{ cm}^2$

Para $a > 18.80$ tendremos $\varepsilon_t < 0.004$ lo que está prohibido por norma.

Tabla 5.13 Valores de C_c , A_s y M_u . En el tramo B: Tracción Abajo

a (cm)	ε_s	$C_c = T$ (kg)	A_s (cm ²)	\bar{M}_u (kg.m)	ϕ	$\phi \cdot \bar{M}_u = M_u$ (kg.m)
1.47	0.0837	20992	5.00	10342	0.90	9307
2.00	0.0608	28560	6.80	13994	0.90	12595
4.00	0.0289	57120	13.60	27418	0.90	24676
6.00	0.0183	85680	20.40	40270	0.90	36243
8.00	0.0129	114240	27.20	52550	0.90	47295
10.00	0.0098	142800	34.00	64260	0.90	57834
12.75	0.0070	157526	37.51	68721	0.90	61849
14.00	0.0061	164220	39.10	70615	0.90	63553
16.00	0.0050	174930	41.65	73471	0.73	53560
18.00	0.0041	185640	44.20	76112	0.71	53869
19.00	0.0037	190995	45.48	77353	0.68	52281
20.00	0.0034	196350	46.75	78540	0.67	52249

Para $a < 1.47$ tendremos $A_s < A_{s \min} = 5.00 \text{ cm}^2$

Para $a > 10 \text{ cm}$ tendremos $A_s > 0.025 b \cdot d = 33.75 \text{ cm}^2$ (ACI 318-08 Sección 21.5.2.1 lo que está prohibido por norma).

Para $a = t = 10 \text{ cm}$ llamaremos... $A_s = A_{s,a=t}$... $\bar{M}_u = \bar{M}_{u,a=t}$... $a \geq t = 10 \text{ cm}$ (Figura 5.15e)

$$a_o = (a - t) \dots \text{De 5.10, 5.11 y 5.13,}$$

$$K_o = 0.85 \cdot f'_c \cdot b_o = 0.85 \cdot 210 \cdot 30 = 5355 \text{ kg/cm}$$

$$C_{c_o} = K_o \cdot a_o \dots \bar{M}_{u_o} = C_{c_o} \cdot (d_o - a_o/2)$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales

$$A_{s_o} = C_{c_o} / F_y \dots \text{Totales } A_s = A_{s_o} + A_{s,a=t}$$

$$\bar{M}_u = \bar{M}_{u,a=t} + \bar{M}_{u_o}. \text{ Los resultados se presentan en la Tabla 5.13.}$$

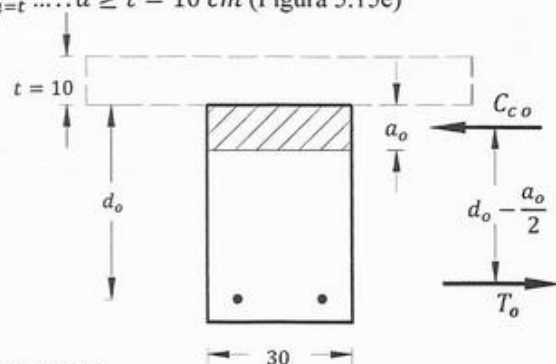


Fig. 5.15e Fuerzas en el concreto y acero en el tramo cuando $a > t$

Observaciones

La capacidad resistente del ala ($a = t = 10$) es tan grande, aún en este caso de ala pequeña, que en la práctica es muy difícil que ocurra $a > t$ por lo que siempre vamos a tener sección comprimida rectangular sobretodo en el caso de vigas continuas, trátase de mini-vigas Te, de losas nervadas, o de grandes vigas de puentes.

EJEMPLO 5.18

$b = 35 \text{ cm}$, $\beta_1 = 0.85$, $d = 50 \text{ cm}$, $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, $\zeta = 0.50$ (Figura 5.16a)

a) Calcular el área de acero para $\bar{M}_u = 38984 \text{ kg} \cdot \text{m}$

b) Para $A_s = 17.85 \text{ cm}^2$, calcular M_u

Parte a)

$$A_{s \min} = 0.8 \cdot \frac{\sqrt{f'_c}}{F_y} \cdot b \cdot d \geq \frac{14}{F_y} \cdot b \cdot d \quad \therefore \quad A_{s \min} = 5.83 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \max} = 0.025 \cdot b \cdot d = 43.75 \text{ cm}^2$$

$$\text{De 5.10, } K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 280 \cdot 35 = 8330 \text{ kg/cm}$$

Debido a que es una sección rectangular, $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ y $\zeta_{\max} = 0.5$, usaremos la Ecuación 5.27 para verificar si tenemos armadura sencilla o doble,

$$d = 50 \text{ cm} > 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{f'_c \cdot b}} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{38984 \cdot 10^2}{280 \cdot 35}} = 45 \text{ cm} \quad \therefore \quad \text{Armadura sencilla}$$

El valor de a lo calcularemos con la Ecuación 5.25,

$$a = d - \sqrt{d^2 - 2 \cdot \frac{\bar{M}_u}{K}} = 50 - \sqrt{50^2 - 2 \cdot 38984 \cdot 10^2 / 8330} = 10.45 \text{ cm}$$

Calcularemos A_s usando la Ecuación de equilibrio de momentos 5.13b,

$$A_s = \frac{\bar{M}_u}{F_y \cdot (d - a/2)} = \frac{38984 \cdot 10^2}{4200 \cdot (50 - 10.45/2)} = 20.73 \text{ cm}^2$$

Verificaremos los cálculos anteriores usando la Ecuación de equilibrio de fuerzas,

$$\frac{\tau}{A_s \cdot F_y} = \frac{c_c}{K \cdot a} \quad \therefore \quad A_s = \frac{8330 \cdot 10.45}{4200} = 20.73 \text{ cm}^2 \quad \text{O.K.}$$

Haremos una segunda verificación usando la Ecuación aproximada 5.28b y obtendremos,

$$A_s = \frac{\bar{M}_u}{F_y \cdot \frac{7}{8} \cdot d} = \frac{38984 \cdot 10^2}{4200 \cdot \frac{7}{8} \cdot 50} = 21.22 \text{ cm}^2 \quad (2\% \text{ más acero})$$

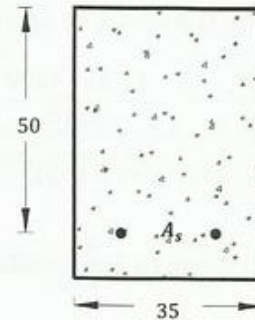


Fig. 5.16a Sección transversal (Ejemplo 5.18)

Parte b)

Partiendo de la Ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\overbrace{K \cdot a}^{c_c} = \overbrace{A_s \cdot f_s}^T$$

De la parte a) sabemos que con $A_s = 20.73 \text{ cm}^2$ tendremos $\zeta \leq 0.50 \therefore f_s = F_y$. Como la cantidad de acero en b es menor, estamos seguros que $f_s = F_y$ y no tendremos necesidad de hacer tanteos para encontrar a . También sabemos que $\phi = 0.90$.

Usando la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales nos viene,

$$a = \frac{A_s \cdot F_y}{K} = \frac{17.85 \cdot 4200}{8330} = 9.00 \text{ cm}$$

De 5.13a (Figura 5.16b),

$$\bar{M}_u = \overbrace{K \cdot a}^{c_c} \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) = 8330 \cdot 9 \cdot [50 - 9/2]$$

$$\bar{M}_u = 34111 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

La curvatura,

$$\phi = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{9} = 3.33 \cdot 10^{-4}$$

Solución Alternativa

Pudimos haber usado la ecuación aproximada 5.28a obteniendo,

$$\bar{M}_u = A_s \cdot F_y \cdot 7/8 \cdot d = 3279938 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 32800 \text{ kg} \cdot \text{m} \text{ (4\% menor } \therefore \text{ conservador) } \blacksquare$$

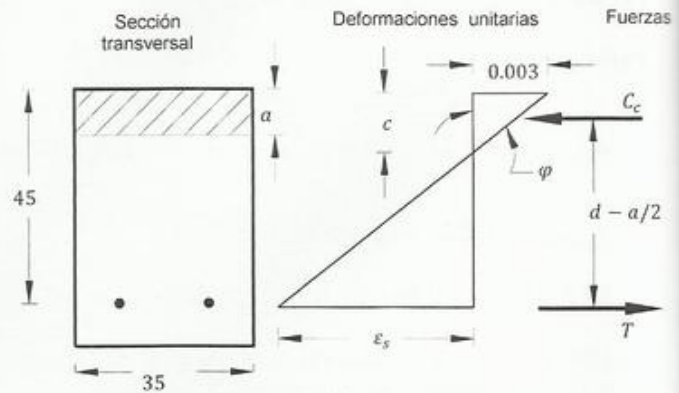


Fig. 5.16b Deformaciones unitarias y fuerzas en la sección. (Ejemplo 5.18)

EJEMPLO 5.19

Sección en forma de T idéntica a la del Ejemplo 5.17. $\zeta = 0.75$
Calcular,

- a_{max}
- A_s para $\bar{M}_u = 70000 \text{ kg} \cdot \text{m}$
- M_u para $A_s = 36.55 \text{ cm}^2$, $d = 50 \text{ cm}$

$$\text{a) } a_{max} \text{ si } \zeta = 0.75$$

$$\rho_{max} = \zeta \cdot \rho_{bal}$$

Puede escribirse en función de áreas comprimidas (Ecuación 5.20c) así,

$$A_{c \max} = \zeta \cdot A_{c \text{ bal}}$$

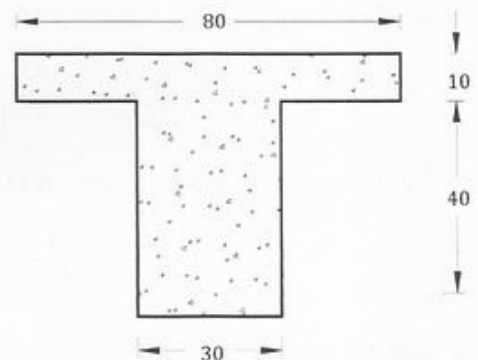


Fig. 5.17a Sección transversal de los ejemplos 5.17 y 5.19

En condiciones balanceadas tenemos,

$$T_{bal} = C_{c\ bal}$$

$$\rho_{bal} = \frac{A_{s\ bal}}{b \cdot d}$$

$$\overbrace{\rho_{bal} \cdot b \cdot d}^{A_{s\ bal}} \cdot F_y = 0.85 \cdot f'_c \cdot [A_{c\ bal}]$$

Por relación de triángulos (Figura 5.17b),

$$c_{bal} = \frac{0.003}{0.003 + 0.002} \cdot d = 0.60 \cdot (50) = 30\text{ cm}$$

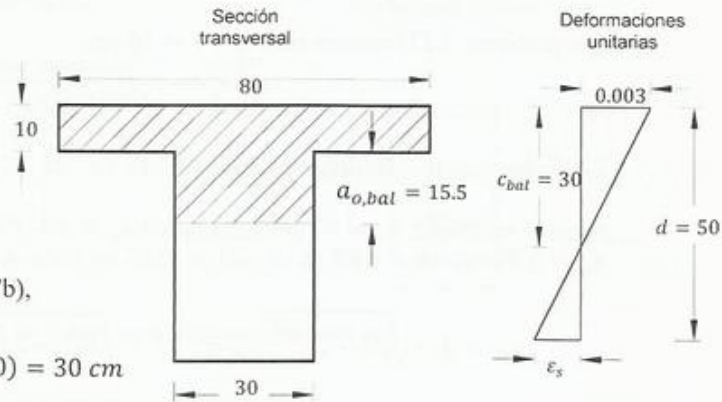


Fig. 5.17b Área comprimida balanceada (sombreada) y deformaciones unitarias (Ejemplo 5.19)

De la Ecuación 5.8, nos viene,

$$a_{bal} = \beta_1 \cdot c_{bal} = 0.85 \cdot 30 = 25.5\text{ cm}$$

Debido a que $a_{bal} > t = 10\text{ cm}$, tendríamos una sección comprimida en forma de T. (Figura 5.17b). En condiciones balanceadas,

$$a_{o, bal} = a - 10 = 25.5 - 10 = 15.5\text{ cm}$$

$$A_{c\ bal} = 80 \cdot 10 + \overbrace{15.5}^{a_{o, bal}} \cdot 30 = 1265\text{ cm}^2$$

$$A_{c\ max} = \zeta \cdot A_{c\ bal} = 0.75 \cdot 1265\text{ cm}^2 = 948.75\text{ cm}^2$$

Siendo $A_{c\ max} > b \cdot t$ tendríamos $a_{max} > t$ e igual a,

$$a_{o, max} = \frac{948.75 - (80 \cdot 10)}{30} = 4.96$$

$$a_{max} = \overbrace{4.96}^{a_{o, max}} + \overbrace{10}^t = 14.96\text{ cm}$$

Este es el máximo valor de a para poder diseñar con armadura sencilla.

b) A_s para $\bar{M}_u = 70000 \text{ kg} \cdot \text{m}$, y para $\zeta = 0.75$

Del problema 5.17 tenemos para $a = t = 10 \text{ cm}$

$$\overbrace{A_{s,a=t} = 34 \text{ cm}^2, \bar{M}_{u,a=t} = 64260 \text{ kg} \cdot \text{m}}^{\text{Tabla 5.13}}$$

Faltan por resistir, $70000 - 64260 = 5740 \text{ kg} \cdot \text{m}$

Sección resistente, $b_o = 30 \text{ cm}$ y altura útil $d_o = d - t = 40 \text{ cm}$. (Rectangular, Figura 5.17c) De 5.10, $K_o = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 210 \cdot 30 = 5355 \text{ kg/cm}$. Al aplicar la Ecuación 5.25 nos viene,

$$a_o = d - \sqrt{d^2 - 2 \cdot \bar{M}_u / K} = 40 - \sqrt{40^2 - 2 \cdot 5740 \cdot 10^2 / 5355} = 2.78 \text{ cm} < a_{o,max}$$

\therefore Armadura Sencilla

De la Ecuación 5.11,

$$C_{co} = K_o \cdot a_o = 14866 \text{ kg}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$A_{so} = \frac{C_{co}}{F_y} = \frac{14866}{4200} = 3.54 \text{ cm}^2$$

$$\text{Acero total en tracción, } A_s = A_{s,a=t} + A_{so} = \overbrace{34}^{\text{Tabla 5.13}} + 3.54 = 37.54 \text{ cm}^2$$

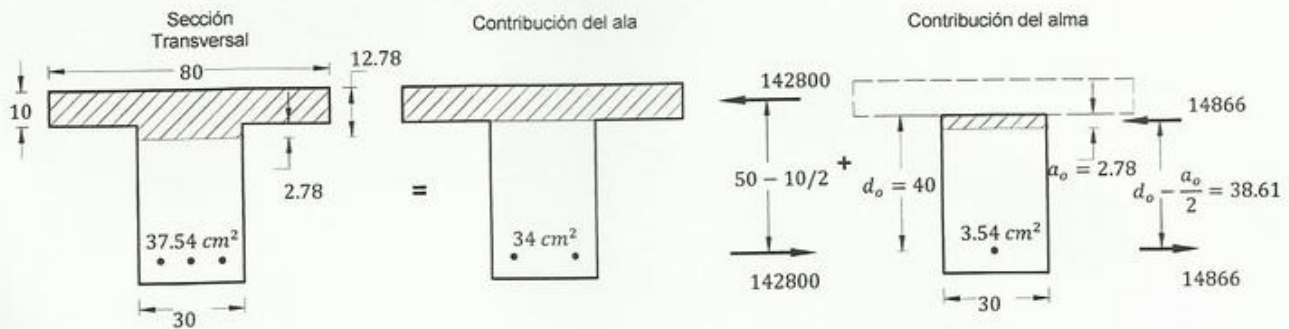


Fig. 5.17c Fuerzas en el ala y alma (Ejemplo 5.19, parte b)

c) Cálculo del momento para,

$$A_s = 36.55 > A_{s,a=t} = 34 \text{ cm}^2 \therefore a > t = 10 \text{ cm} \text{ y } \bar{M}_u > \bar{M}_{u,a=t} = 64260 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

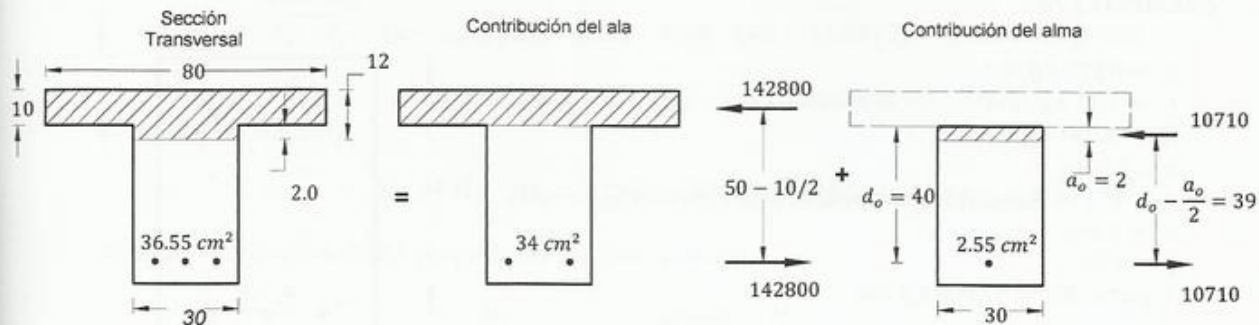
$$A_{so} = 36.55 - 34 = 2.55 \text{ cm}^2$$

Sección de altura útil $d_o = 40 \text{ cm}$ y ancho $b_o = 30 \text{ cm}$, aplicando la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales (Figura 5.17d),

$$T_o = C_{co} = 4200 \cdot 2.55 = 10710 \text{ kg}$$

De la Ecuación 5.11 nos viene,

$$C_{co} = K_o \cdot a_o \therefore a_o = \frac{10710}{5355} = 2 \text{ cm} \text{ y } a = a_o + t = 12 \text{ cm}$$



EJEMPLO 5.20

$$\begin{aligned}
 K &= 8330 \text{ kg/cm} \\
 f'_c &= 280 \text{ kg/cm}^2 \\
 F_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\
 b &= 35 \text{ cm} \\
 d &= 45 \text{ cm} \text{ Requerido por razones constructivas (Figura 5.18).} \\
 d' &= 5 \text{ cm} \\
 \zeta &= 0.50 \\
 A_s \text{ para } \bar{M}_u &= 52180 \text{ kg} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

$$A_{s \min} = 0.8 \cdot \frac{\sqrt{f'_c}}{F_y} \cdot b \cdot d \geq \frac{14}{F_y} \cdot b \cdot d \quad \therefore \quad A_{s \min} = 5.25 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \max} = 0.025 \cdot b \cdot d = 39.38 \text{ cm}^2$$

- Calcularemos M_1 , A_{s1} y a_{\max}

De la Figura 5.4 sabemos que,

$$c_{bal} = \frac{0.003}{(0.003 + \epsilon_y)} \cdot d = \frac{0.003}{(0.003 + 0.002)} \cdot 45 = 0.60 \cdot 45 = 27 \text{ cm}$$

De la Ecuación 5.8,

$$a_{bal} = \beta_1 \cdot c_{bal} = 22.95 \text{ cm}$$

Como la sección comprimida es rectangular, de acuerdo a la Ecuación 5.21b,

$$a_{\max} = \zeta \cdot a_{bal} = 0.50 \cdot 22.95 = 11.47 \text{ cm}$$

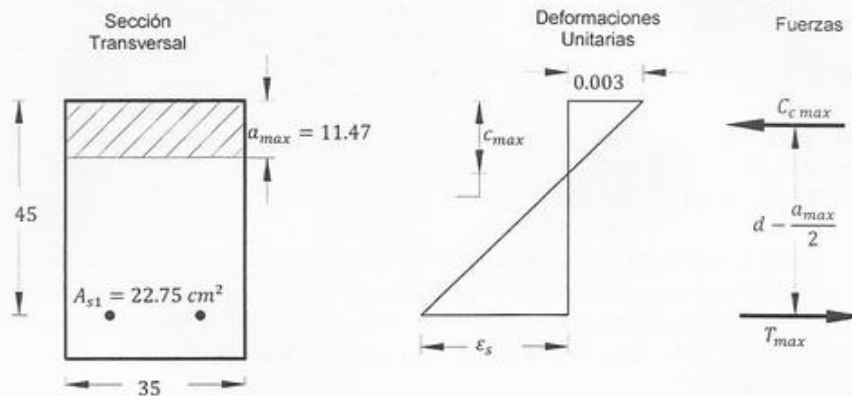


Fig. 5.18b Deformaciones unitarias y fuerzas en el concreto y acero bajo condiciones máximas (Ejemplo 5.20)

Por equilibrio de fuerzas horizontales (Figura 5.18b),

$$T_{\max} = C_{c \max}$$

$$A_{s1} \cdot F_y = K \cdot a_{\max} \quad \therefore \quad A_{s1} = 8330 \cdot 11.47 / 4200 = 22.75 \text{ cm}^2$$

Por equilibrio de momentos (Ecuación 5.13b)

$$M_1 = \frac{T_{max} \cdot c_{max}}{A_{s1} \cdot F_y} \cdot (d - a_{max}/2) = 22.75 \cdot 4200 \cdot (45 - 11.47/2) = 3751770 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_1 = 37512 \text{ kg} \cdot \text{m} < \bar{M}_u \therefore \text{Armadura doble}$$

Calcularemos A_{s2} y A'_s ,

$$M_2 = \bar{M}_u - M_1 = 52180 - 37512 = 14668 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Al aplicar la Ecuación 5.32b para calcular las áreas de acero,

$$A_{s2} = \frac{M_2}{F_y \cdot (d - d')} = \frac{14668 \cdot 10^2}{4200 \cdot (45 - 11.47/2)} = 8.89 \text{ cm}^2$$

Acero total en tracción,

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 22.75 + 8.89 = 31.64 \text{ cm}^2$$

- Calcularemos $A'_s \dots \dots c_{max} = a_{max}/\beta_1 = 11.47/0.85 = 13.50 \text{ cm}$

Por relación de triángulos de la Figura 5.18c ó por la Ecuación 5.18,

$$\epsilon'_s = (c_{max} - d') \cdot 0.003 / c_{max} = (13.50 - 5) \cdot 0.003 / 13.50 = 1.889 \cdot 10^{-3}$$

Aplicando la ley de Hooke al acero en compresión,

$$f'_s = \epsilon'_s \cdot E_s = 1.889 \cdot 10^{-3} \cdot 2.1 \cdot 10^6 = 3967 \text{ kg/cm}^2 \leq F_y \dots O.K$$

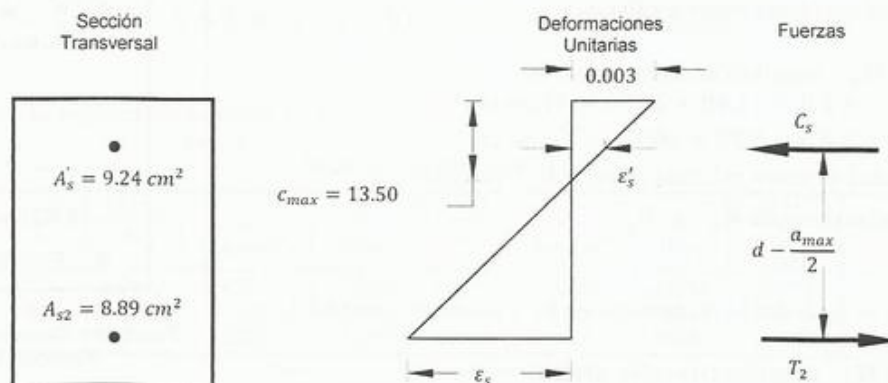


Fig. 5.18c Deformaciones unitarias y fuerzas en el acero en compresión y tracción (Ejemplo 5.20)

Aplicando la Ecuación 5.32b de equilibrio de momentos (Figura 5.18c),

$$A'_s = \frac{M_2}{f'_s \cdot (d - d')} = \frac{14664 \cdot 10^2}{3697 \cdot (45 - 5)} = 9.24 \text{ cm}^2 \quad \blacksquare$$

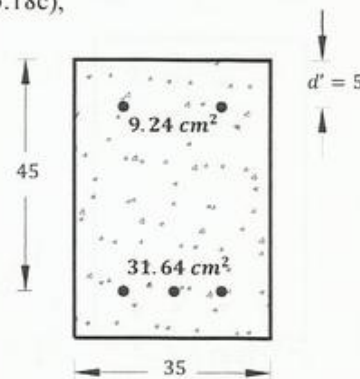


Fig. 5.18d Aceros totales (Ejemplo 5.20)

Solución alternativa para el cálculo de M_1

Debido a que es una sección rectangular pudimos haber verificado la necesidad de armadura doble con la Ecuación 5.27 y calcular d_{min} para armadura sencilla, en lugar de hacer la comparación entre M_1 y \bar{M}_u ;

$$d = 45 \text{ cm} < d_o = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{f'_c \cdot b}} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{52180 \cdot 10^2}{280 \cdot 35}} = 53.07 \therefore \text{Armadura doble}$$

Estimaremos A_{s1} con la Fórmula 5.21a multiplicada por ζ ,

$$A_{s1} = \underbrace{0.5 \cdot 0.85 \cdot k_{bal}}_{\zeta} \cdot \underbrace{\beta_1 \cdot \frac{f'_c}{F_y}}_{\rho_{bal}} \cdot b \cdot d = 0.5 \cdot 0.85 \cdot 0.60 \cdot 0.85 \cdot \frac{280}{4200} \cdot 35 \cdot 45 = 22.75 \text{ cm}^2$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales nos viene,

$$a_{max} = \frac{A_{s1} \cdot F_y}{K} = \frac{22.75 \cdot 4200}{8330} = 11.47 \text{ cm}$$

Al aplicar 5.13b nos queda,

$$M_1 = A_{s1} \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{a_{max}}{2}\right) = 22.75 \cdot 4200 \cdot \left(45 - \frac{11.47}{2}\right) \cong 3751200 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_1 = 37512 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \text{O.K.} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.21

Con los datos del problema anterior calcular

- El valor del M_u^- negativo (tracción arriba) si,
 $A_s = 4 \# 6 + 4 \# 8 = 11.40 + 20.24 = 31.64 \text{ cm}^2$
 $A'_s = 2 \# 6 + 2 \# 8 = 5.70 + 10.12 = 15.82 \text{ cm}^2$
- Con la cantidad de acero indicada calcular M_u^+ positivo
- Calcular la relación entre \bar{M}_u^- y \bar{M}_u^+

Nota

La altura útil d se mide desde el centroide de las 8 barras en tracción A_s .

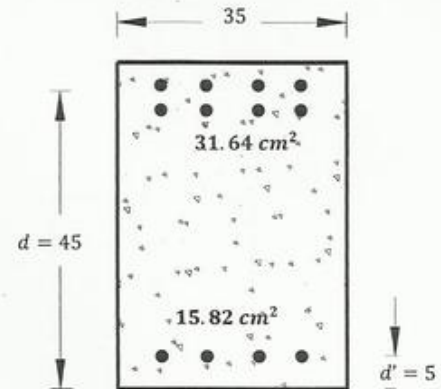


Fig. 5.19a Sección transversal (Ejemplo 5.21)

- El valor del M_n^- negativo (tracción arriba)

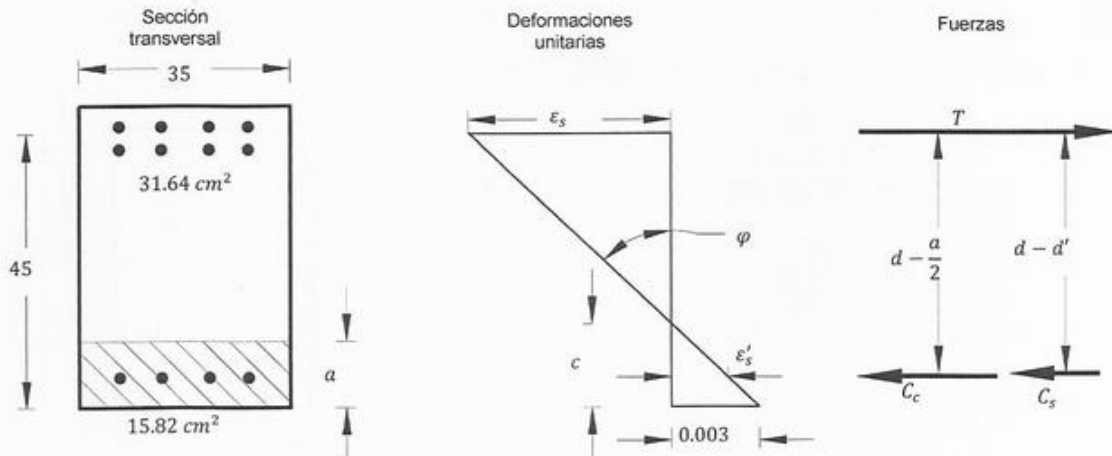


Fig. 5.19b Deformaciones unitarias y fuerzas en el concreto y acero para momento negativo (Ejemplo 5.21)

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$C_c + C_s = T$$

Asumiremos en valor de c y luego a usando la Ecuación 5.8,

$$a = \beta_1 \cdot c$$

Para el acero en tracción calcularemos ϵ_s con la relación de triángulos de la Figura 5.19b ó de acuerdo a la Ecuación 5.16,

$$\epsilon_s = \frac{0.003}{c} \cdot (d - c)$$

El esfuerzo y la fuerza en el acero en compresión lo calculamos con la ley de Hooke,

$$f_s = \epsilon_s \cdot E_s \leq F_y \dots T = A_s \cdot f_s$$

Las deformaciones unitarias del acero se calcularán con la Ecuación 5.18, o por la relación de triángulos de la Figura 5.19b,

$$\epsilon'_s = \frac{0.003}{c} \cdot (c - d')$$

El esfuerzo del acero comprimido con ayuda de la ley de Hooke,

$$f'_s = \epsilon'_s \cdot E_s \leq F_y \dots C_s = f'_s \cdot A'_s$$

Para calcular la fuerza que actúa en el concreto (sobre el área sombreada de la Figura 5.19b) usaremos las ecuaciones 5.10 y 5.11,

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 280 \cdot 35 = 8330 \text{ kg/cm}$$

$$C_c = K \cdot a$$

Los resultados se resumen en la Tabla 5.14,

Tabla 5.14 Valores de T , $C_c + C_s$

Asumido	[5.8]	[5.16]	f_s (kg/cm ²)	T (kg)	[5.18]	f'_s (kg/cm ²)	C_s (kg)	[5.11]	$C_c + C_s$ (kg)
c (cm)	a (cm)	ϵ_s			ϵ'_s			C_c (kg)	
9.0	7.7	0.0120	4200	132888	0.0013	2800	44296	63725	108021
10.0	8.5	0.0105	4200	132888	0.0015	3150	49833	70805	120638
11.0	9.4	0.0093	4200	132888	0.0016	3436	54363	77886	132249

Para $c = 11 \text{ cm}$ tenemos $C \cong T$

La ecuación de equilibrio sumando momentos alrededor del acero en tracción (Figura 5.19b) o empleando la Ecuación 5.33 nos queda,

$$\bar{M}_u^- = C_c \cdot (d - a/2) + \overbrace{A'_s \cdot f'_s}^{C_s} \cdot (d - d') = 77886 \cdot [45 - 9.4/2] + 54363 \cdot (45 - 5)$$

$$\bar{M}_u^- = 5313326 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 53133 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

La curvatura (Figura 5.19b),

$$\phi = \frac{\epsilon_s}{d - c} = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{11} = 2.72 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_s = 0.0093 > 0.007 \therefore \text{falla por tracción, } \phi = 0.90 \rightarrow \phi \cdot \bar{M}_u^- = M_u^- = 47969 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

b) El valor del \bar{M}_u^+ (positivo)

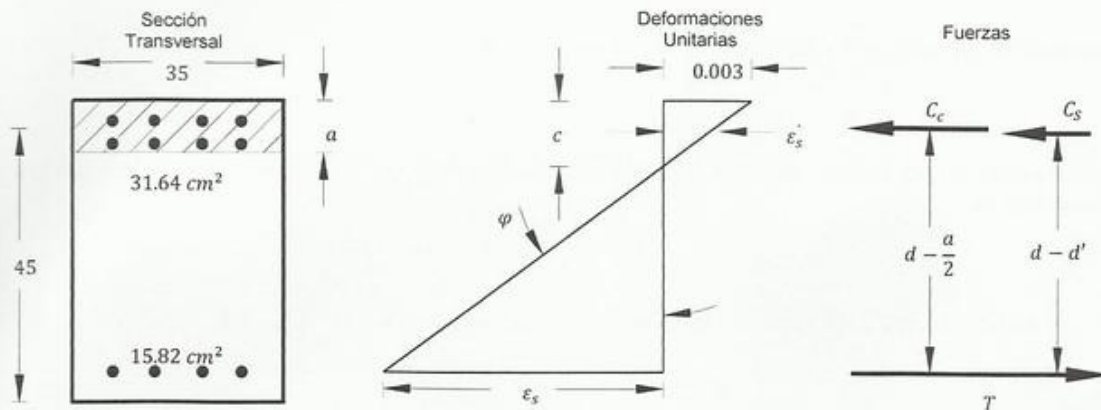


Fig. 5.19c Deformaciones unitarias y fuerzas en el concreto y acero para momento negativo (Ejemplo 5.21)

En este caso tendríamos (Figura 5.19c)

$$A'_s = 4 \# 6 + 4 \# 8 = 11.4 + 20.24 = 31.64 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 2 \# 6 + 2 \# 8 = 5.70 + 10.12 = 15.82 \text{ cm}^2$$

Tabla 5.15 Valores de T , C_c y C_s

Asumido	[5.8]	[5.16]	f_s (kg/cm²)	T (kg)	[5.18]	f'_s (kg/cm²)	C_s (kg)	[5.11]	$C_s + C_c$ (kg)
c (cm)	a (cm)	ϵ_s			ϵ'_s			C_c (kg)	
5.00	4.3	0.0240	4200	66444	0.0000	3	0	35403	35403
5.50	4.7	0.0215	4200	66444	0.0003	573	18121	38943	57064
5.60	4.8	0.0211	4200	66444	0.0003	675	21357	39651	61008
5.75	4.9	0.0205	4200	66444	0.0004	822	26000	40713	66713

Sumando momentos alrededor de la Fuerza de tracción T (Figura 5.19c) o empleando la Ecuación 5.33,

$$\bar{M}_u^+ = C_c \cdot (d - a/2) + \overbrace{A'_s \cdot f'_s}^{C_s} \cdot (d - d') = 40713 \cdot [45 - 5.75/2] + 26000 \cdot (45 - 5)$$

$$\bar{M}_u^+ = 2755035 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 27550.35 \text{ kg} \cdot \text{m}; \quad \varphi = \frac{\epsilon_s}{d - c} = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{5.75} = 5.21 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_s = 0.0205 \gg 0.007 \therefore \text{falla por tracción,}$$

c) Calcular la relación entre \bar{M}_u^- y \bar{M}_u^+

Por normas, siempre se tendrá en los apoyos que la capacidad positiva será de al menos, $\bar{M}_u^+ \geq 0.50 \cdot \bar{M}_u^-$

En términos prácticos este requerimiento implica que en los apoyos de vigas de pórticos en zonas sísmicas la cantidad de acero abajo debe ser al menos igual o mayor que la mitad del acero arriba. Si arriba tenemos 6 barras de 1" abajo deberemos tener al menos 3 barras de igual diámetro, o su equivalente en área, aunque los cálculos sugieran una cantidad menor. En nuestro caso tenemos,

$$\bar{M}_u^+ = 0.52 \cdot \bar{M}_u^- \text{ O.K. para } A'_s = 1/2 \cdot A_s$$

Solución Alternativa. Calcular \bar{M}_u^- y \bar{M}_u^+ usando la fórmula aproximada 5.28a,

$$\bar{M}_u^- = A_s \cdot F_y \cdot 7/8 \cdot d = 31.64 \cdot 4200 \cdot 7/8 \cdot 45 = 5232465 \text{ kg} \cdot \text{cm} \rightarrow \bar{M}_u^- = 52324.65 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_u^+ = A_s \cdot F_y \cdot 7/8 \cdot d = 15.82 \cdot 4200 \cdot 7/8 \cdot 45 = 2616233 \text{ kg} \cdot \text{cm} \rightarrow \bar{M}_u^+ = 26162.33 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Compare los resultados obtenidos con los procedimientos aproximados y "exactos" ■

EJEMPLO 5.22

$$\begin{aligned}
 f'_c &= 240 \text{ kg/cm}^2 \\
 F_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\
 h &= 50 \text{ cm} \\
 d &= 45 \text{ cm} \\
 \beta_1 &= 0.85
 \end{aligned}$$

- a) Para $M_n^+ = 31500 \text{ kg} \cdot \text{m}$, calcular A_s
 b) Para $A_s = 20.24 \text{ cm}^2$, $A'_s = 10.12 \text{ cm}^2$, calcular M_n^- y ϕ

a) Calcularemos M_1

Por relación de triángulos de la Figura 5.20b,

$$c_{bal} = \frac{0.003}{(0.003 + \epsilon_y)} \cdot d = 0.60 \cdot 45 = 27 \text{ cm}$$

Aplicando la Ecuación 5.8 nos viene: $a_{bal} = \beta_1 \cdot c_{bal} = 22.95 \text{ cm} \dots 12 \text{ cm} < a_{bal} < (12 + 14) = 26 \text{ cm}$

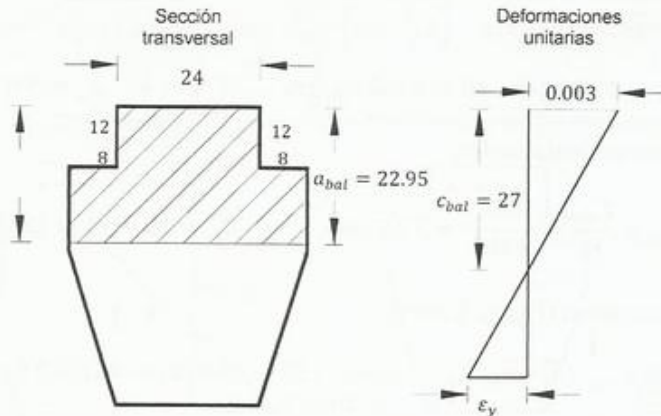


Fig. 5.20a Sección transversal del Ejemplo 5.22

Fig. 5.20b Deformaciones unitarias para la condición balanceada (Ejemplo 5.22)

$$\therefore A_{c\text{ bal}} = 24 \cdot 12 + 40 \cdot \frac{a_{bal}}{(22.95 - 12)} = 726 \text{ cm}^2$$

$$A_{c\text{ max}} = \zeta \cdot A_{c\text{ bal}} = 0.50 \cdot 726 = 363 \text{ cm}^2 \dots A_{c\text{ max}} = 363 \text{ cm}^2 > 24 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^2$$

En la Figura 5.20c se muestra $A_{c\text{ max}}$ como el área sombreada,

$$\therefore a_{\text{max}} = \frac{363 - 288}{40} + 12 = 13.88 \text{ cm}$$

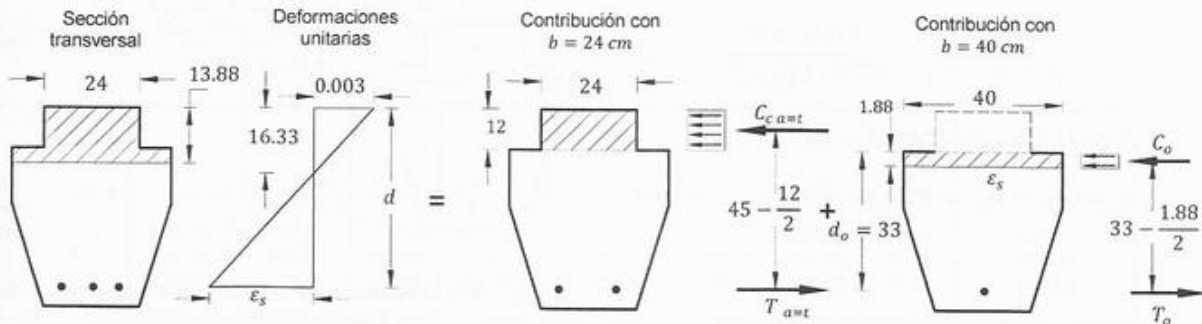


Fig. 5.20c Deformaciones unitarias, esfuerzos en el concreto y fuerzas en condiciones máximas (Ejemplo 5.22)

Al aplicar la Ecuación 5.8 nos viene,

$$c_{max} = \frac{a_{max}}{\beta_1} = \frac{13.88}{0.85} = 16.33 \text{ cm}$$

Para $a = t = 12 \text{ cm}$, al aplicar 5.10 y 5.11 nos viene,

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b_o = 0.85 \cdot 240 \cdot 24 = 4896 \text{ kg/cm} \dots C_{ca=t} = K \cdot a_{a=t} = 4896 \cdot 12 = 58752 \text{ kg}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$A_{s,a=t} = \frac{C_{ca=t}}{F_y} = \frac{58752}{4200} = 13.98 \text{ cm}^2$$

Por equilibrio de momentos (Figura 5.20c) o aplicando 5.13a,

$$M_{1,a=t} = C_{ca=t} \cdot (d - a/2) = 58752 \cdot (45 - 12/2) = 2291328 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_{1,a=t} = 22913 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Para $a \geq 12 \text{ cm}$,

$$a_o = (a_{max} - t) = 13.88 - 12 = 1.88 \text{ cm}$$

Nuevamente usaremos 5.10 y 5.11,

$$K_o = 0.85 \cdot f'_c \cdot b_o = 0.85 \cdot 240 \cdot 40 = 8160 \text{ kg/cm} \dots C_{co} = K_o \cdot a_o = 8160 \cdot 1.88 = 15341 \text{ kg}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$A_{so} = \frac{C_{co}}{F_y} = \frac{15341}{4200} = 3.65 \text{ cm}^2, \quad d_o = 45 - 12 = 33 \text{ cm}$$

Por equilibrio de momentos (Figura 5.20c),

$$M_{1,o} = C_{co} \cdot (d - a_o/2) = 15341 \cdot (33 - 1.88/2) = 491832 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_{1,o} = 4918 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

El valor de M_1 lo obtendremos así,

$$A_{s1} = A_{s,a=t} + A_{so} = 13.98 + 3.65 = 17.63 \text{ cm}^2 \dots M_1 = M_{1,a=t} + M_{1,o} = 22913 + 4918 = 27831 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_1 = 27831 \text{ kg} \cdot \text{m} < 35000 \text{ kg} \cdot \text{m} \therefore \text{Armadura Doble} \text{ Calcularemos } A_{s2} \text{ y } A'_s \text{ con la Ecuación 5.32b}$$

Ver Figura 5.20d

$$M_2 = \bar{M}_u - M_1 = 35000 - 27831 = 7169 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$A_{s2} = \frac{M_2}{F_y \cdot (d - d')} = \frac{7169 \cdot 10^2}{4200 \cdot (45 - 5)} = 4.26 \text{ cm}^2$$

Acero total en tracción (Figura 5.20f),

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 17.63 + 4.26 = 21.90 \text{ cm}^2$$

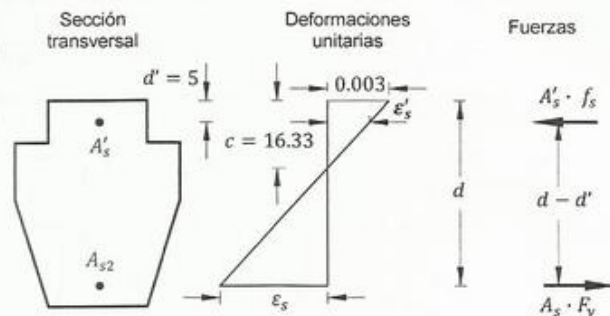


Fig. 5.20d Deformaciones unitarias y fuerzas en el concreto y acero (Ejemplo 5.22, parte a)

Calcularemos la deformación unitaria de A'_s usando la relación de triángulos de la Figura 5.20d o la Ecuación 5.18,

$$\varepsilon'_s = (c - d') \cdot \frac{0.003}{c} = (16.33 - 5) \cdot \frac{0.003}{16.33} = 2.081 \cdot 10^{-3}$$

El esfuerzo se obtiene con la ley de Hooke,

$$f'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s = 2.081 \cdot 10^{-3} \cdot 2.1 \cdot 10^6 = 4371 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \therefore f'_s = F_y$$

La cantidad de acero en compresión la calcularemos con la Ecuación de equilibrio 5.32b.

$$A'_s = \frac{M_2}{f'_s \cdot (d - d')} = \frac{7304 \cdot 10^2}{4200 \cdot (45 - 5)} = 4.26 \text{ cm}^2$$

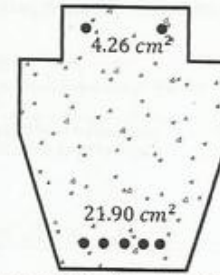


Fig. 5.20e Distribución del acero (Ejemplo 5.22)

b) Aplicaremos la ecuación de equilibrio, sumando momentos respecto al acero en tracción (Figura 5.20f)

$$\bar{M}_u = \overbrace{C_{c1} \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right)}^{\text{concreto (rectángulo)}} + \overbrace{C_{c2} \cdot \left(d - \frac{2}{3}a\right)}^{\text{concreto (triángulos)}} + \overbrace{C_s (d - d')}^{\text{acero en compresión}}$$

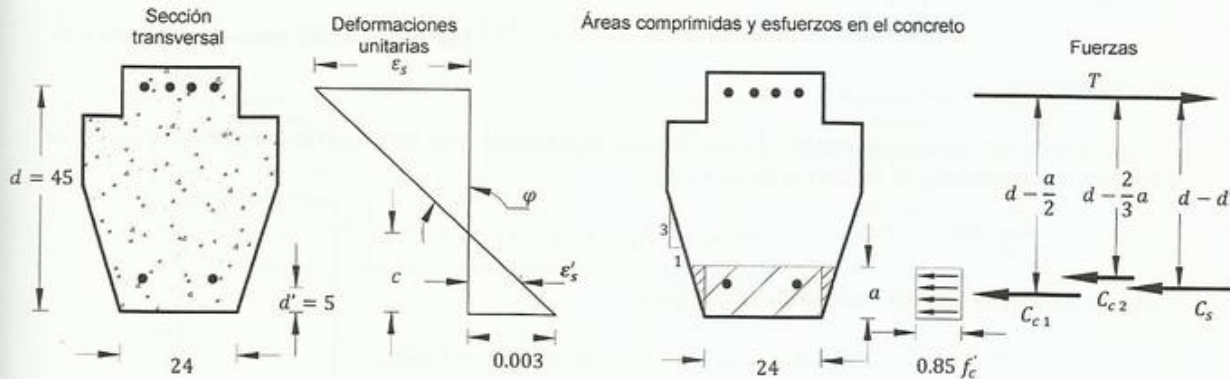


Fig. 5.20f Deformaciones unitarias, esfuerzos en el concreto y, fuerzas en el concreto y acero para momento negativo (Ejemplo 5.22)

Al descomponer el área comprimida en un rectángulo y dos triángulos tendríamos (Figura 5.20f).

Para el rectángulo... .. $A_{c1} = 24 \cdot a$ $C_{c1} = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_{c1}$

Para los dos triángulos... .. $A_{c2} = 2 \cdot \left[a \cdot \frac{a}{3} / 2\right]$ $C_{c2} = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_{c2}$

Los resultados se resumen en la Tabla 5.16.

Tabla 5.16 Valores de T , C_{c1} , C_{c2} y C_s (Ejemplo 5.22)

c (cm)	a (cm)	ε_s	f_s (kg/cm ²)	T (kg)	ε'_s	f'_s (kg/cm ²)	C_s (kg)	C_{c1} (kg)	C_{c2} (kg)	$C_s + C_{c1} + C_{c2}$ (kg)
5.0	4.3	0.0240	4200	85008	0.0000	0	0	20808	1228	22036
8.0	6.8	0.0139	4200	85008	0.0011	2363	23909	33293	3144	60346
10.8	9.2	0.0095	4200	<u>85008</u>	0.0016	3383	34239	44945	5731	<u>84915</u>

para $c = 10.8 \text{ cm}$ $\Sigma C \cong T$ $\varepsilon_s = 0.0095 > 0.007 \quad \therefore \phi = 0.90$

Al aplicar la ecuación de equilibrio de momentos nos viene,

$$\bar{M}_u^- = \underbrace{44945 \cdot \left(45 - \frac{9.2}{2}\right)}_{\text{momento resistido por el rectángulo}} + \underbrace{5731 \cdot \left(45 - \frac{2}{3} \cdot 9.2\right)}_{\text{momento resistido por los dos triángulos}} + \underbrace{34239 \cdot (45 - 5)}_{\text{momento resistido por el acero en compresión}} = 3408083 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\phi \cdot \bar{M}_u^- = M_u = 30673 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots \dots \phi = \frac{0.003}{c} = \frac{0.003}{10.8} = 2.77 \cdot 10^{-4} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5.23

$$f'_c = 220 \text{ kg/cm}^2 \dots \dots E_c = 2.1 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \dots \dots E_s = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$h = 60 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$A_s = 6 \text{ cm}^2$$

$$n = E_s/E_c = 10$$

Graficar ϕ vs. M para los siguientes puntos,

a) Agrietamiento: $f_{tr} = 2 \cdot \sqrt{f'_c} \cong 30 \text{ kg/cm}^2$

b) Trabajo de la sección: $f_c = 0.45 \cdot f'_c \cong 100 \text{ kg/cm}^2$

c) Momento de cedencia: $\epsilon_s = \epsilon_y$ y $\epsilon_c < \epsilon_{cu} = 0.003$

d) \bar{M}_u cuando $\epsilon_s > \epsilon_y$ y $\epsilon_c = \epsilon_{cu} = 0.003$

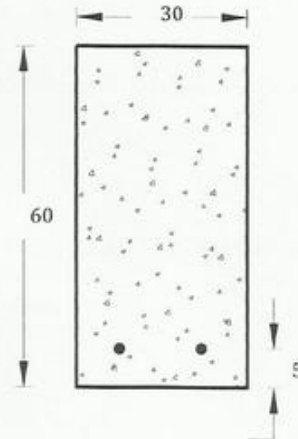


Fig. 5.21a Sección transversal Ejemplo 5.23

a) Agrietamiento

Usaremos la sección transformada. El área de acero equivalente u en concreto descontando los vacíos de concreto desplazados por las barras de acero es,

$$u = (n - 1) \cdot A_s = (10 - 1) \cdot 6 = 54 \text{ cm}^2$$

El área total de la sección transformada quedaría,

$$A = u + b \cdot h = 54 + 30 \cdot 60 = 1854 \text{ cm}^2$$

El centroide lo calcularemos en referencia a un eje horizontal que dista $h/2$ cm del borde inferior de la sección, que se muestra como la línea punteada superior en Figura 5.21b,

$$\bar{y} = \frac{\overbrace{30 \cdot 60 \cdot 0}^{\text{concreto}} + \overbrace{54 \cdot 25}^{\text{acero equivalente en concreto}}}{1854} = 0.73 \text{ cm}$$

El área comprimida se muestra sombreada.

La inercia de la sección con respecto a la línea punteada localizada a $h/2$,

$$I' = \frac{b \cdot h^3}{12} + u \cdot \left(\frac{h}{2} - 5\right)^2 = \frac{30 \cdot 60^3}{12} + 54 \cdot (30 - 5)^2 = 573750 \text{ cm}^4$$

Encontraremos I con respecto a \bar{y} . Aplicaremos teorema de Steiner. $I' = I + A \cdot \bar{y}^2 \quad \therefore \quad I = I' - A \cdot \bar{y}^2$

$$I = I' - A \cdot \bar{y}^2 = 573750 - 1854 \cdot 0.73^2 = 572762 \text{ cm}^4$$

$$y_i = \frac{h}{2} - \bar{y} = \frac{60}{2} - 0.73 = 29.27 \text{ cm}$$

$$M_{agr} = \frac{f_{tr} \cdot I}{y_i} = \frac{30 \cdot 572762}{29.27} = 587047 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_{agr} \cong 5870 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\varphi_{agr} \cong \frac{M_a}{E_c \cdot I} = \frac{5870 \cdot 10^2}{210000 \cdot 572762} = 4.88 \cdot 10^{-6}$$

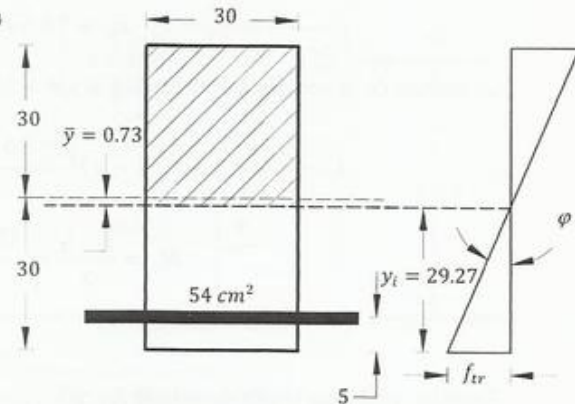


Fig. 5.21b Sección no agrietada transformada (Ejemplo 5.23)

b) Trabajo

Usaremos la sección transformada nuevamente. Debido a que la sección se encuentra agrietada no hay que descontar vacíos. El área de acero equivalente en concreto quedaría, $u = (n) \cdot A_s = (10) \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2$.

Encontraremos la posición del eje neutro igualando los momentos estáticos del acero en tracción y el concreto en compresión (Figura 5.21c),

$$30 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 60 \cdot (55 - x) \dots \dots \dots \text{resolviendo } x = 12.97 \text{ cm}$$

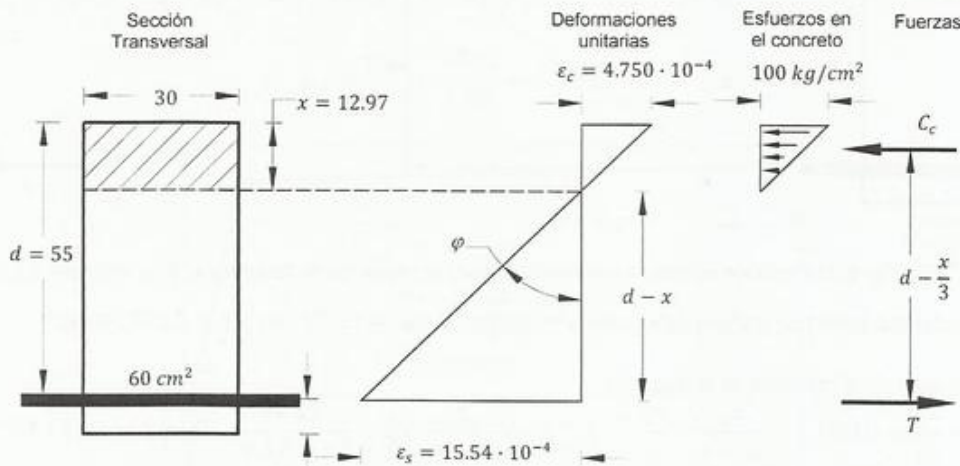


Fig. 5.21c Sección agrietada transformada. Cálculo del momento de trabajo para $f_c = 0.45 \cdot f'_c$ (Ejemplo 5.23)

Encontraremos ε_s por relación de triángulos,

$$\varepsilon_c = \frac{f_c}{E_c} = \frac{100}{210000} = 4.750 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\varepsilon_s}{d - x} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \therefore \quad \varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \cdot \varepsilon_c = \frac{55 - 12.97}{12.97} \cdot 4.75 \cdot 10^{-4} = 15.54 \cdot 10^{-4}$$

Aplicando la ley de Hooke al concreto,

$$f_s = \varepsilon_s \cdot E_s = 15.54 \cdot 10^{-4} \cdot 2.1 \cdot 10^6 = 3232 \text{ kg/cm}^2$$

La inercia de la sección con respecto al eje neutro o de flexión,

$$I_t = \frac{b \cdot x^3}{3} + u \cdot (d - x)^2 = \frac{30 \cdot 12.97^3}{3} + 60 \cdot (55 - 12.97)^2 = 127810 \text{ cm}^4$$

$$M_t = \frac{f_c \cdot I_t}{x} = \frac{100 \cdot 127810}{12.97} = 985424 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_t \cong 9854 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \varphi_t \cong \frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{4.75 \cdot 10^{-4}}{12.97} = 36.62 \cdot 10^{-6}$$

También pudimos haber calculado M_t así,

$$T = C_c = f_s \cdot A_s = 3232 \cdot 6 = 19392 \dots M_t = T \cdot \left[d - \frac{x}{3} \right] = 19392 \cdot \left[\frac{55 - \frac{12.97}{3}}{\underbrace{100}_{\text{para llevar a kg} \cdot \text{m}}} \right] = 9827 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

c) Cedencia

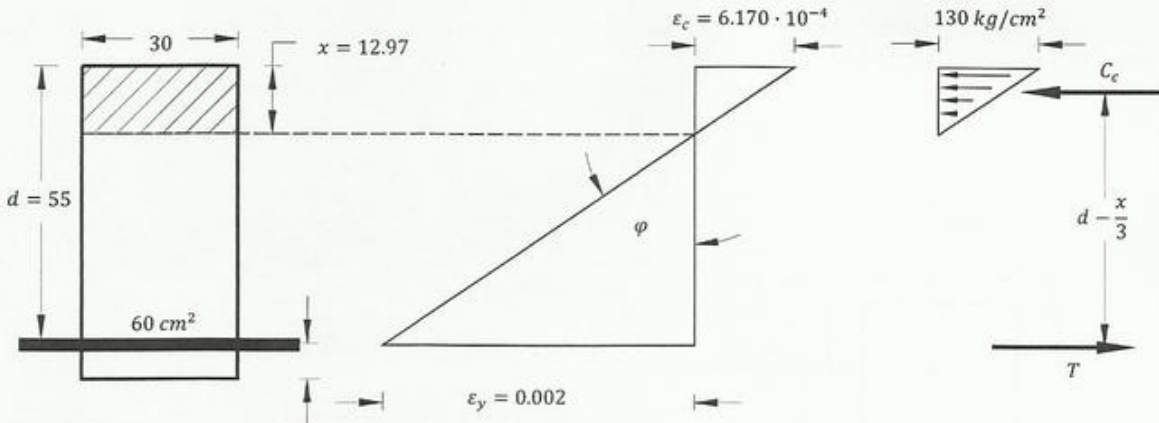


Fig. 5.21d Sección agrietada transformada para el momento de cedencia $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ (Ejemplo 5.23)

Del cálculo del momento de trabajo sabemos: $u = 60 \text{ cm}^2 \dots x = 12.97 \text{ cm} \dots I = 127810 \text{ cm}^4$

Encontraremos ε_s por relación de triángulos,

$$\varepsilon_y = \frac{F_y}{E_s} = 0.002 \dots \frac{\varepsilon_y}{d - x} = \frac{\varepsilon_c}{x} \quad \therefore \quad \varepsilon_c = \frac{x}{d - x} \cdot \varepsilon_y = \frac{12.97}{55 - 12.97} \cdot 0.002 = 6.17 \cdot 10^{-4}$$

$$f_c = \varepsilon_c \cdot E_c = 6.17 \cdot 10^{-4} \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cong 130 \text{ kg/cm}^2 \text{ O.K}$$

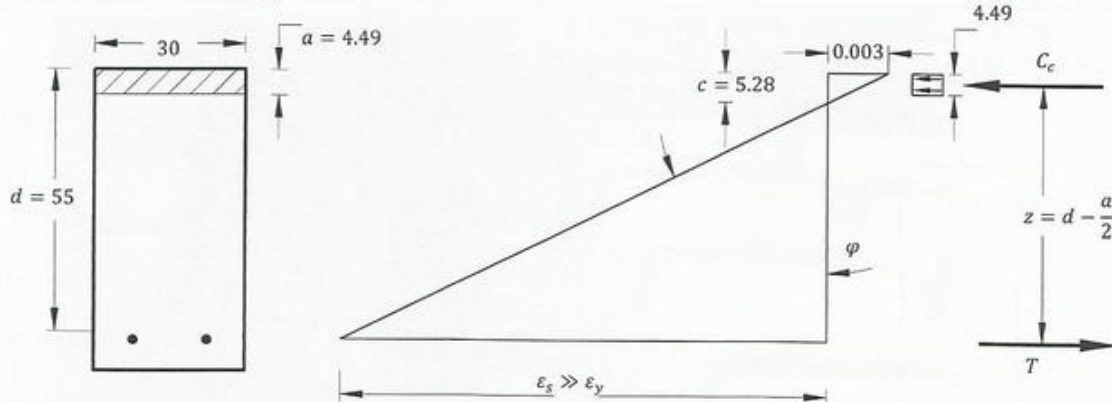
El momento de cedencia vendría dado por,

$$M_y = \frac{f_c \cdot I}{x} = \frac{130 \cdot 127810}{12.97} = 1277188 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_y \cong 12772 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \varphi_y \cong \frac{\varepsilon_y}{(d - x)} = \frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{6.17 \cdot 10^{-4}}{12.97} = 47.57 \cdot 10^{-6}$$

También pudimos haber calculado M_y así,

$$T = F_y \cdot A_s = 4200 \cdot 6 = 25200; M_y = T \cdot \left[d - \frac{x}{3} \right] = 25200 \cdot \left[\frac{55 - \frac{12.97}{3}}{\underbrace{100}_{\text{para llevar a kg} \cdot \text{m}}} \right] = 12771 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

d) Capacidad de la sección \bar{M}_u Fig. 5.21e Sección en condiciones últimas $\varepsilon_c = 0.003$ (Ejemplo 5.23)

Calcularemos K de la ecuación 5.10..... $K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 220 \cdot 30 = 5610 \text{ kg/cm}$

Podemos asegurar que $f_s = F_y$. Por equilibrio de fuerzas horizontales (Figura 5.21e)

$$\frac{T}{A_s \cdot f_y} = \frac{C_c}{K \cdot a} \quad \therefore \quad a = \frac{A_s \cdot f_s}{K} = \frac{6 \cdot 4200}{5610} = 4.49 \text{ cm} \quad \text{y} \quad c = a/\beta_1 = 5.28 \text{ cm}$$

Por equilibrio de momentos (Ecuación 5.13b)

$$\bar{M}_u = A_s \cdot F_y \cdot (d - a/2) = 6 \cdot 4200 \cdot (55 - 4.49/2) = 1329426 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad \bar{M}_u = 13294 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\varphi_y \cong \frac{\varepsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{5.28} = 567.93 \cdot 10^{-6} \quad \blacksquare$$

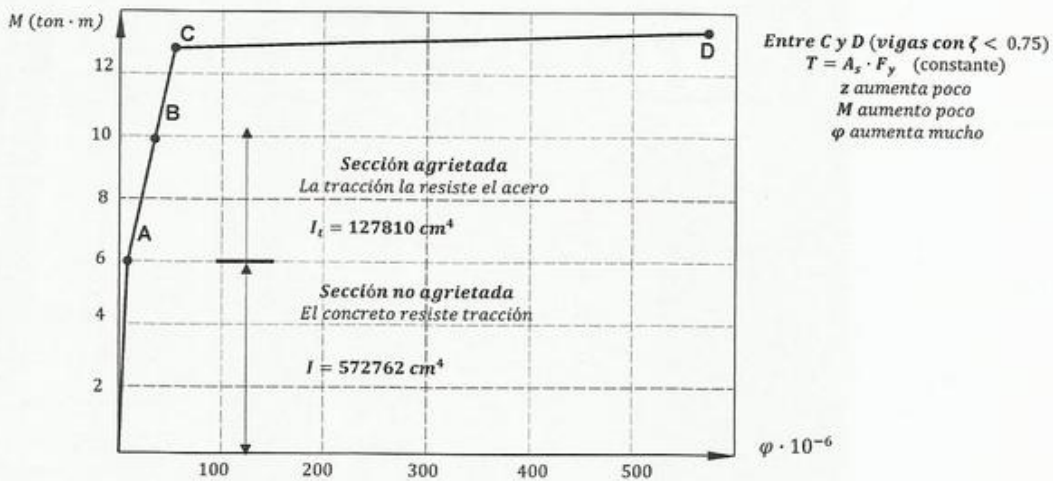


Fig. 5.21f Diagrama de momento curvatura (Ejemplo 5.23)

Observaciones

- Entre el origen y B: La teoría de la Línea Recta (Capítulo 4) da resultados bastante buenos. La curvatura se puede expresar,

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{M}{E \cdot I}$$

- Más arriba de B el diagrama de esfuerzos deformación del concreto se curva considerablemente. El valor en el punto C es aproximado.

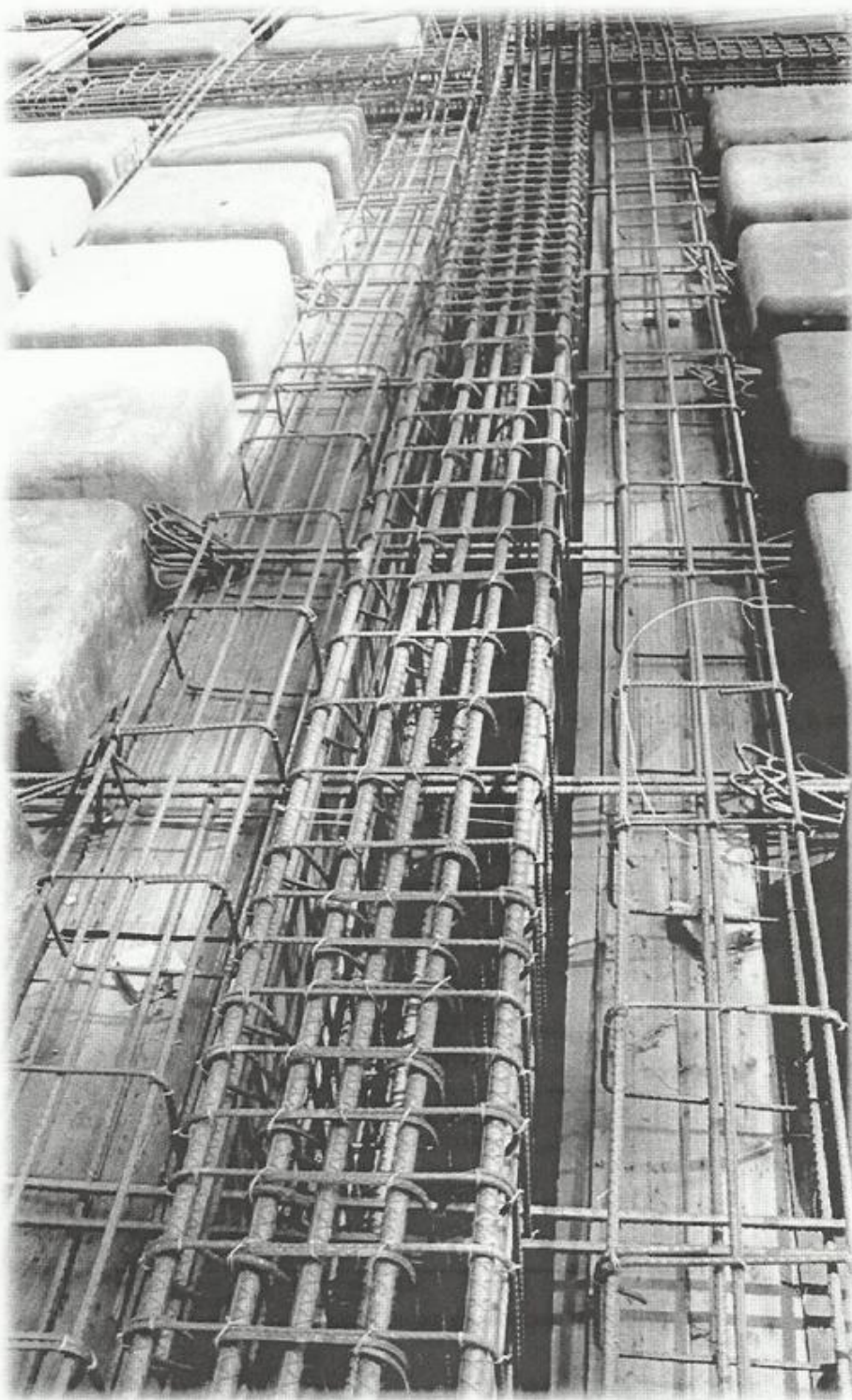


Fig. 5.22 Detalle de una viga en una estructura sismo-resistente
Cortesía de Pablo A. Fargier G

CAPÍTULO 6

COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO A FLEXOCOMPRESIÓN Y A COMPRESIÓN AXIAL

6.1 COMPORTAMIENTO DEL CONCRETO

a) COMPRESIÓN UNIAXIAL

Se describe el comportamiento de cilindros que se someterán a la acción de una carga axial P que aumenta desde cero hasta producir la rotura (figuras 6.1, 6.3).

- Entre el origen y el punto A de coordenadas $\varepsilon \cong 0.0003$ y $f \cong 0.30 \cdot f'_c$, el diagrama es recto. La deformación ε' transversal es pequeña en comparación con el acortamiento longitudinal y por lo tanto el volumen V del cilindro disminuye. (Figura 6.3).
- Entre los puntos A y B donde $f = 0.7$ a $0.8 \cdot f'_c$, el diagrama se curva, el módulo de elasticidad disminuye y las deformaciones transversales ε' siguen siendo mucho menores que los acortamientos longitudinales: El cilindro disminuye de volumen hasta llegar a un valor $V_B = V'$.
- A partir del punto B , las deformaciones transversales ε' aumentan considerablemente. El volumen de los cilindros aumenta por encima de V' , el diagrama esfuerzo-deformaciones tiende hacia la horizontal y E_c disminuye rápidamente.
- En el punto C se alcanza el máximo esfuerzo f'_c para una deformación de dos milésimas (0.002). A partir de B se inicia el descascaramiento del concreto. Más allá del punto C las deformaciones aumentan considerablemente mientras los esfuerzos disminuyen hasta alcanzar la rotura en el punto D . El volumen del cilindro alcanza su valor inicial. En D se tiene,

$$\begin{aligned} \text{Deformación última} &= 0.003 \text{ a } 0.004 \\ \text{Esfuerzo} \quad f &= 0.80 \text{ a } 0.90 \cdot f'_c \end{aligned}$$

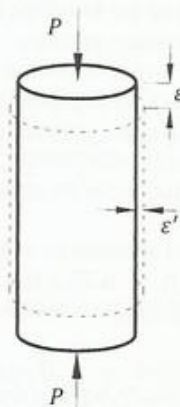


Fig. 6.1 Cilindro sometido a compresión axial



Fig. 6.2 Cilindro sometido a flexo-compresión

b) FLEXOCOMPRESIÓN

Los cilindros se someterán a la acción de una carga P con una excentricidad e Figura 6.2. Entre el origen y el punto B el diagrama (Figura 6.3) es idéntico al de compresión axial.

El punto C sube y se desplaza hacia la derecha, es decir que aumenta el esfuerzo máximo y la deformación que lo acompaña en un 20 % y 50 % respectivamente.

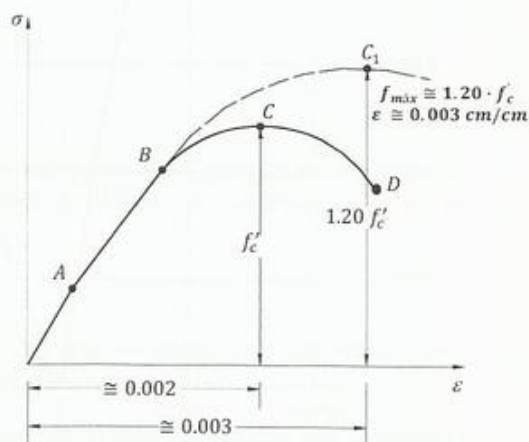


Fig. 6.3 Gráficas de esfuerzo deformación de cilindros en compresión axial y flexo-compresión

c) MICROGRIETAS (ENSAYOS DE STURMAN, SHA Y WINTER 1965)

Cilindros de concreto sometidos a compresión axial y a flexo-compresión, de los cuales, al alcanzar un cierto valor de la deformación, se cortaban rodajas circulares de 3.8 milímetros de espesor y 15 cm de diámetro a las que se les tomaban fotografías con rayos X y se observaban las grietas con un microscopio estereoscópico de cuarenta aumentos.

- Hay dos tipos de microgrietas: de adherencia en la superficie de contacto entre agregado y mortero y de mortero, a través de la pasta cemento-arena.
- Aun antes de aplicar carga y a causa de la retracción, existen grietas de adherencia.
- Al alcanzarse el punto A (Figura 6.3) para un esfuerzo comprendido entre un cuarto y un tercio de f'_c ($f_A = 0.25$ a $0.33 \cdot f'_c$), se produce un aumento considerable de grietas de adherencia que coincide con el inicio de la curvatura del diagrama esfuerzo-deformación.
- Entre A y B aumentan las grietas de adherencia y se inician las de mortero. En el punto B ($f = 0.7$ a $0.8 \cdot f'_c$) hay un incremento notorio de grietas de mortero que se unen a las de adherencia, formando grietas continuas. Esto se corresponde con el aumento considerable de deformaciones (ensanchamientos) transversales y también con el valor de la fatiga máxima del concreto bajo cargas permanentes durante largo tiempo ($\cong 0.75 \cdot f'_c$ aproximadamente).

Diagramas Combinados

En la Figura 6.4 aparecen los siguientes diagramas,

- 1 \rightarrow esfuerzo (σ) vs. deformación (acortamiento) longitudinal ε .
- 2 \rightarrow esfuerzo (σ) vs. deformación (ensanchamiento) transversal ε' .
- 3 \rightarrow esfuerzo (σ) vs. deformación de volumen Vol .

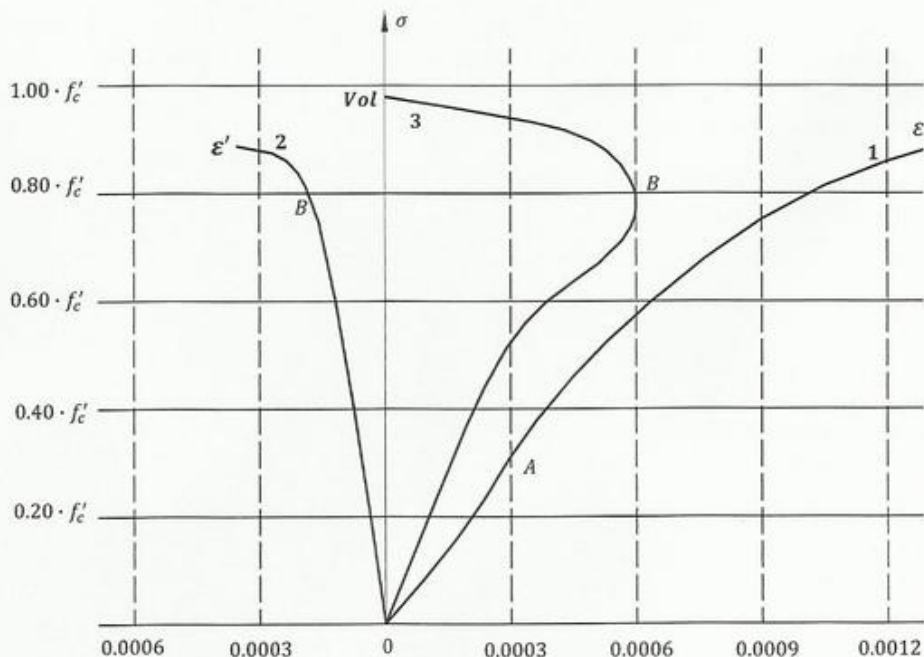


Fig. 6.4 Diagramas Esfuerzo - Deformación combinados

A medida que aumentan las deformaciones, se forman más microgrietas continuas (van produciéndose fallas frágiles) que disminuyen la capacidad resistente del cilindro, ya que las cargas se transmiten a lo largo de las zonas no agrietadas y estas disminuyen con el aumento de la deformación.

Cada vez quedan menos caminos para resistir las cargas hasta llegar a la rotura, debido a una "sucesión continua de fallas frágiles en microzonas". Esto explica la llamada ductilidad del concreto, fenómeno completamente diferente al que se produce en materiales dúctiles.

Microgrietas en flexocompresión

Cilindros sometidos a compresión con excentricidad pequeña, tal que produzca un esfuerzo grande de compresión (en el borde más próximo a P) y uno pequeño de tracción en borde más alejado de P .

A partir del punto B de $f = 0.80 \cdot f'_c$, las grietas de mortero aumentan gradualmente (no tan aceleradamente como en compresión axial).

d) COMPRESIÓN TRIAXIAL (RICHART, BRANDTZAEG Y BROWN 1928, 1929)

Ensayos de cilindros sometidos a compresión axial variable que aumenta desde cero hasta la rotura y bajo presión lateral constante (Figura 6.5).

El esfuerzo de rotura f'_c y la deformación última aumentan con el incremento de la presión lateral, de acuerdo con la fórmula indicativa,

$$f'_c'' = f'_c + 4.10 \cdot f \quad \text{Donde } f \text{ es la presión lateral confinante.}$$

Por esta razón es recomendable confinar el concreto mediante el zunchado o en su defecto, usando ligaduras a poca separación. Así mejoramos de resistencia y capacidad de deformación del concreto

$$\text{Curva 0} \rightarrow f = 0 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots f'_c'' \cong 250 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Curva 1} \rightarrow f = 38 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots f'_c'' \cong 400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Curva 2} \rightarrow f = 75 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots f'_c'' \cong 600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{Curva 3} \rightarrow f = 138 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots f'_c'' \cong 780 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

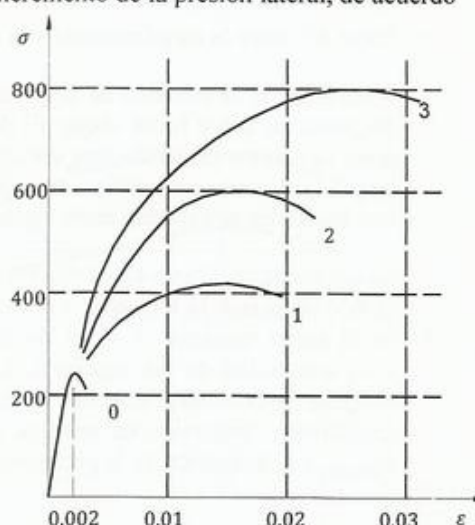


Fig. 6.5 Diagramas de compresión triaxial
-compresión uniaxial $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ -

6.2 COMPORTAMIENTO DE COLUMNAS BAJO CARGA AXIAL

a) COLUMNAS CON ESTRIBOS

Ensayos realizados en columnas cuadradas, unas de tamaño natural (prototipos) y otras de dimensiones pequeñas (modelos), por Roy y Sozen (1965) en la Universidad de Illinois. Se observaron las etapas siguientes,

- Etapa OA donde $f_a = 0.80 \cdot f'_c$ y $\varepsilon_a = 0.0015$

(Para probetas prismáticas de 5" por 5" de sección y 25" de altura, unas sin acero, otras con estribos pero sin acero longitudinal y otras con acero longitudinal y estribos (Figura 6.6).

Las deformaciones longitudinales (acortamientos) y las transversales crecen linealmente con el aumento de carga. El tramo OA es casi recto. La relación entre deformaciones longitudinales ε y transversales ε' es aproximadamente igual a 7 y el volumen disminuye hasta su valor mínimo V_A . Cerca del punto A se

producen grietas visibles con lupa. Esta etapa es común para todas las columnas tengan o no acero.

- Etapa *AB* donde *B* es el punto de máxima carga (columnas con acero, Figura 6.7)

Las deformaciones ϵ aumentan con la carga P a una rata creciente y el diagrama se curva y sube hasta alcanzar P máximo a una deformación aproximadamente igual a tres milésimas (0.003). Para las probetas sin acero el valor de P máximo corresponde a una deformación igual a 0.002.

Las deformaciones transversales ϵ' crecen considerablemente y cerca del punto *B* se tiene $\epsilon' = \epsilon/2$. El volumen aumenta por encima de V_A . Las ligaduras tratan de impedir, a partir del punto *A*, el aumento de la sección transversal y comienzan a trabajar. Entre *A* y *B* el acero longitudinal alcanza la deformación de cedencia ϵ_y , el esfuerzo F_y y comienza a ceder. Las ligaduras ceden cerca del punto *B* y se produce el descascaramiento del concreto.

- Etapa *BC* entre la carga máxima y la rotura ó sea entre $\epsilon_{m\acute{a}xima} = 0.003$ y $\epsilon_{\acute{u}ltima} > 0.003$

A partir de *B* al aumento de deformaciones corresponde una disminución de la capacidad de carga y el diagrama se curva hacia abajo. El descascaramiento se profundiza en una zona relativamente pequeña, entre ligaduras, causando una disminución del área resistente de concreto hasta producirse la falla a lo largo de planos inclinados. A veces se rompen las ligaduras de la zona estrangulada. Las barras longitudinales se pandean entre ligaduras (Figura 6.7).

La deformación última ϵ_u es mucho mayor que 0.003 *cm/cm* y puede llegar a 0.04 y más. Roy y Sozen (1965) proponen la fórmula: $\epsilon_{50} = 0.75 \cdot \rho \cdot b/s$ Donde, ϵ_{50} = deformación correspondiente al 50% de la carga máxima. ρ = % de ligaduras o estribos al volumen. b = lado menor de la columna. s = separación de las ligaduras. La presencia de ligaduras o estribos a separaciones adecuadas, al confinar el concreto, aumenta la ductilidad, es decir, la capacidad de deformación y con ella la de absorción y dispersión de energía. En el diagrama, un aumento de ligaduras ocasiona incremento de $\epsilon_{\acute{u}ltima}$ y disminución de la pendiente *BC*.



Fig. 6.6 Sección transversal de probeta cuadrada

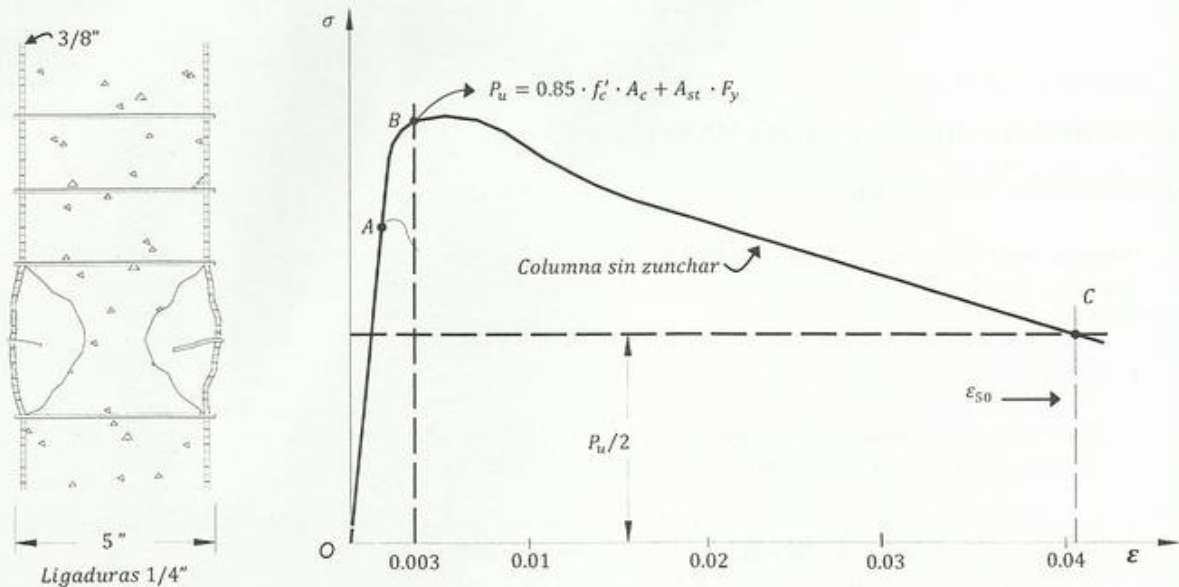


Fig. 6.7 Diagramas esfuerzo deformación. Columnas con ligaduras, compresión axial

b) COLUMNAS ZUNCHADAS

Por zunchado se entiende una espiral continua de una barra ($3/8$ ó $1/2$ ó $5/8$ ") que envuelve a las barras principales. Se usa principalmente como refuerzo transversal en columnas circulares (Figura 6.8). La espiral comienza a trabajar cuando en la columna se alcanzan acortamientos unitarios del orden de 0.0015, iniciándose el descascaramiento el cual continúa al aumentar la carga P , hasta que todo el recubrimiento desaparece. El zunchado impide el ensanchamiento de la sección transversal a todo lo largo de la columna produciendo un confinamiento muy efectivo (Figura 6.8).

- El zunchado a separaciones pequeñas produce un aumento considerable de la deformación última, que puede alcanzar un valor de aproximadamente 0.015.
- Para porcentajes altos de zunchado, la carga última es ligeramente mayor que el valor de P_u correspondiente a columnas sin zunchar (con ligaduras). Esto ocurre únicamente si el efecto de confinamiento de la espiral es mayor que la disminución de la capacidad causada por la pérdida del recubrimiento. El lector interesado en ampliar el tema se le invita consultar a Ferguson, Breen y Jirsa (1988).

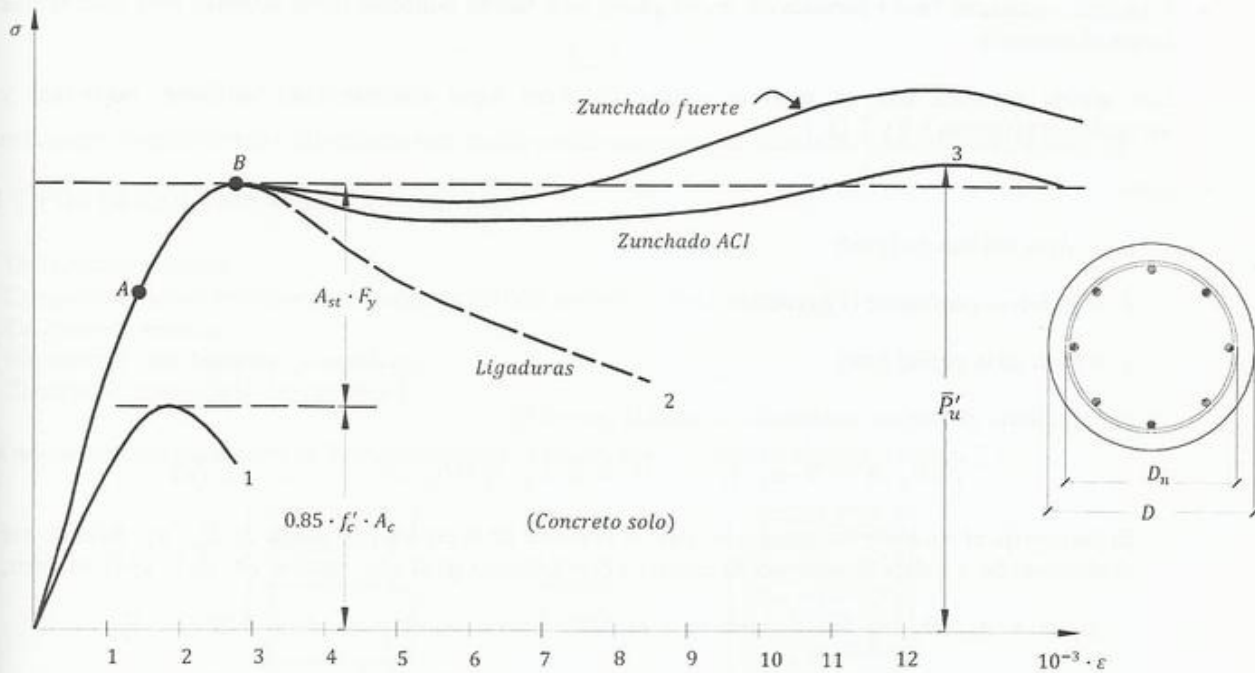


Fig. 6.8 Columnas a compresión axial

Siendo (Figura 6.8),

$$A_c = \pi \cdot D^2 / 4 \rightarrow A_n = \pi \cdot D_n^2 / 4 \rightarrow A_{st} = \text{Área total del acero longitudinal.}$$

$$\text{Se tiene, } \bar{P}_u = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c + A_{st} \cdot F_y \dots \dots \dots (a)$$

$$\text{Se tiene también: } \bar{P}'_u = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_n + A_{st} \cdot F_y + P_z \dots \dots \dots (b)$$

Donde P_z = Es el aporte del zunchado.

Para descontar vacíos sustituya F_y por $F_y - 0.85 \cdot f'_c$

6.3 ESTRIBOS vs ESPIRAL o ZUNCHO

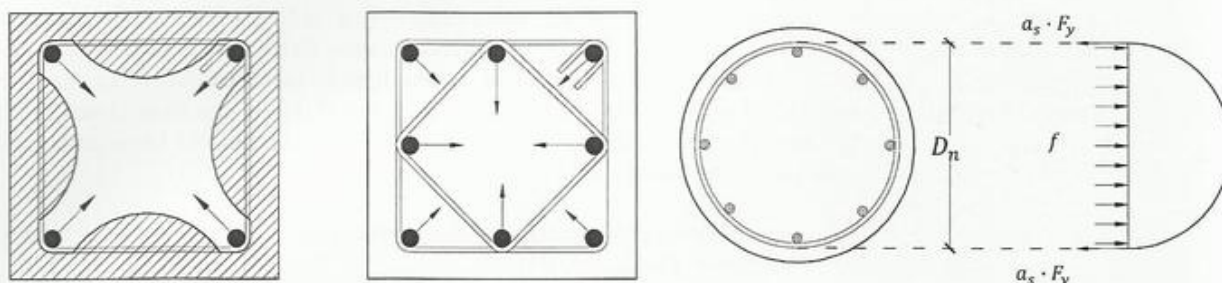


Fig 6.9 Ligaduras y espirales

- Cada ligadura es efectiva confinando en su plano, la zona de las esquinas, donde se producen fuerzas hacia el centro de la columna. Esta efectividad aumenta cuando se tienen varias ligaduras yuxtapuestas. En todo caso, el efecto del confinamiento no es continuo o mejor dicho, no es uniforme a lo largo de la columna (figuras 6.9 y 7.20).
- Ligaduras circulares (aros) producirán, en su plano, una fuerza uniforme hacia adentro, pero discontinua longitudinalmente.
- Una espiral continua con un paso no mayor de 8 cm logra confinamiento uniforme, horizontal y verticalmente (figuras 6.9 y 7.1).
- Sean,

a_s = Área del zuncho (cm^2)

f = Esfuerzo confinante (kg/cm^2)

s = Paso de la espiral (cm)

Por equilibrio de fuerzas horizontales se tiene (Figura 6.9),

$$f \cdot D_n \cdot s = 2 \cdot a_s \cdot F_y \quad \therefore \quad f = 2 \cdot a_s \cdot F_y / (D_n \cdot s) \dots \dots \dots (a)$$

El porcentaje al volumen del zuncho es igual al volumen de la espiral por vuelta: $\pi \cdot D_n \cdot a_s$ dividido por el volumen de la rodaja de concreto de espesor s con diámetro igual a D_n igual a $(\pi \cdot D_n^2 \cdot s / 4)$, es decir,

$$\rho_s = 4 \cdot a_s / (D_n \cdot s) \text{ Sustituyendo en la ecuación (a) nos queda, } \dots \dots \dots f = 0.50 \cdot \rho_s \cdot F_y.$$

$$\text{Pero como teníamos, } f_c'' = f_c' + 4.10 \cdot f \dots \dots \text{ Luego, } P_z = 4.10 \cdot f \cdot A = 2 \cdot \rho_s \cdot F_y \cdot A_n$$

En el caso de ligaduras de área a_s , a separación s y de dimensiones a, b , tenemos,

$$\rho_s = \frac{\text{Vol. del estribo}}{\text{Vol. de concreto}} = \frac{2 \cdot (a + b) \cdot a_s}{a \cdot b \cdot s} = \frac{2 \cdot (a_s/s) \cdot (a + b)}{a \cdot b}$$

Para igual porcentaje, la capacidad confinante de ligaduras se supone aproximadamente igual a la mitad de la correspondiente espiral continua.

El uso de concretos de alta resistencia en columnas de estructuras sismo-resistentes ha ganado popularidad en la última década. Se recomienda a los lectores interesados en profundizar el tema consultar a Matamoras (1999).

7.1 DEFINICIÓN

Las columnas son elementos estructurales casi siempre verticales que transmiten cargas a las fundaciones. Las barras de acero se colocan en la periferia de la sección en cuantías preferiblemente por el orden del 1.0 al 2.5% (Figura 7.1). Las cargas verticales permanentes y variables (muertas y vivas), la acción del viento o del sismo producen en ellas flexo-compresión y a veces torsión. Cuando su relación de esbelteces es mayor que un cierto valor dado por las normas, hay que tomar en cuenta la influencia del pandeo.

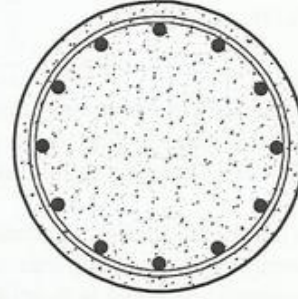


Fig. 7.1 Columna Circular

En el caso más común, las acciones se transmiten a las losas y sucesivamente a las vigas y a las columnas y si estas fallan, causarían la falla de aquellas y las de columnas de pisos superiores. Por esto su cálculo y diseño debe hacerse cuidadosamente para las combinaciones de carga más desfavorables y utilizando factores de seguridad altos.

Los elementos cuya carga axial exceda,

$$\frac{f'_c \cdot A}{10}$$

se calcularán como columnas. Elementos con cargas axiales menores se calcularán como vigas (Capítulo 5).

7.2 TIPOS DE COLUMNAS DE CONCRETO

- De concreto en masa
- Compuestas: acero estructural en forma de perfiles embebidos en concreto.
- De concreto armado:
 - Sin zunchar (con ligaduras, o estribos).
 - Zunchadas (con espiral -las mejores-).

Las secciones más usadas son de forma rectangular o cuadrada y poligonal o circular. (Figura 7.2)

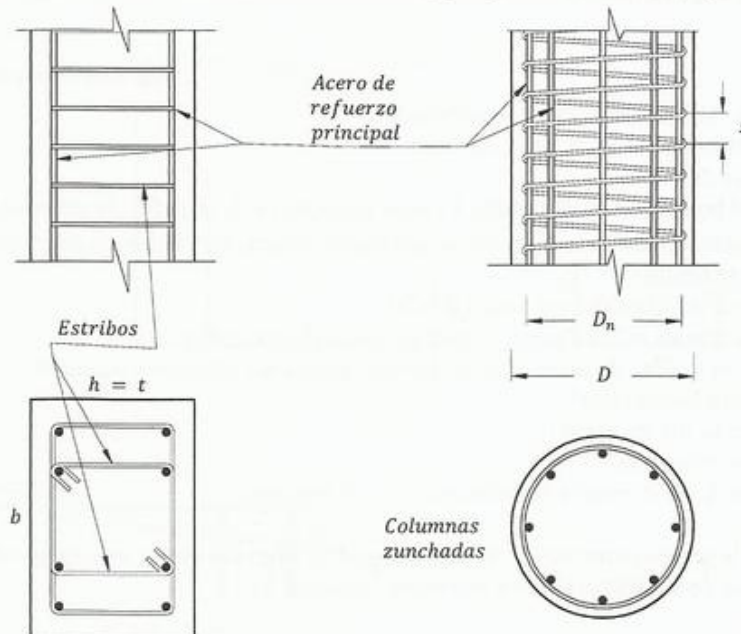


Fig. 7.2 Columnas de concreto rectangulares y circulares

7.3 ARMADURA

a) TIPOS DE ARMADURA

Principal

Compuesta por barras verticales de diámetro igual o mayor que 1/2" colocadas lo más cerca posible de la periferia y repartidas convencionalmente a distancias no mayores de 30 cm.

Las barras dentro de la columna pueden estar sometidas a tracción o compresión y en algunas tendremos barras a compresión y tracción dependiendo la magnitud de la excentricidad de la carga.

Transversal

En forma de estribos o zunchos, colocados en planos horizontales a distancias pequeñas, rodeando o abrazando a las cabillas principales y manteniéndolas en posición (figuras 7.1 y 7.2). Resisten corte y producen confinamiento del concreto. En zonas sísmicas se colocará acero transversal en la zona común columna-viga.

b) PORCENTAJES DE ACERO

Los porcentajes de acero a utilizar deben estar comprendidos entre los valores máximos y mínimos establecidos en las normas A.C.I. o COVENIN. La cuantía mínima (área de acero dividida por el área de concreto) es del 1%. Si bien las norma permiten diseños con cuantías de hasta el 6% recomendamos diseñar columnas grandes con cuantías inferiores al 3.0% y preferiblemente al 2.5% especialmente en edificios aporticados localizados en zonas sísmicas.

7.4 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Sean (Figura 7.3),

A_c = Área comprimida del concreto (cm^2) -sombreada-

x_c = Distancia del centroide de A_c al de la columna

A_i = Área de las barras de la fila i

d_i = Distancia de A_i al borde más comprimido. El valor máximo de d_i se define la altura útil

$x_i = t/2 - d_i$ es la distancia de A_i al centroide de la columna. Puede ser positivo o negativo

c = Profundidad del eje neutro

ϵ_u = Deformación unitaria última del concreto (0.003)

ϵ_{si} = Deformación unitaria de la fila i de acero. Puede ser positiva o negativa

$f_i = \epsilon_{si} \cdot E_s$. Esfuerzo en la fila i de acero -Ley de Hooke-. Puede ser positivo o negativo

A_{st} = Área total de acero longitudinal

$F_i = A_i \cdot f_i$ = Fuerza en la fila de acero i

A = Área de la sección transversal

$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a = K \cdot a$ = Fuerza de compresión en el concreto

La dimensión total de la sección transversal de la columna a lo largo del eje la viga (plano de flexión) es igual a t ó h ó D . Las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse (Figura 7.3),

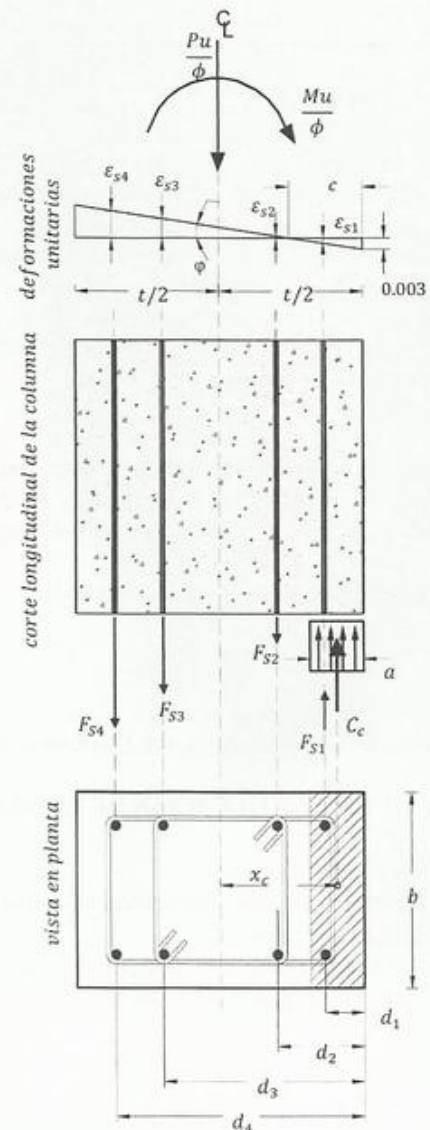


Fig. 7.3 Fuerzas que actúan sobre la columna

Por equilibrio de fuerzas verticales,

$$\bar{P}_u = \frac{P_u}{\phi} = \underbrace{\frac{C_c}{0.85 \cdot f'_c \cdot A_c}}_{\text{Contribucion del concreto}} + \underbrace{\sum \frac{F_{si}}{A_i \cdot f_i}}_{\text{Contribucion del acero}} \quad [7.1a]$$

Por equilibrio de momentos alrededor del centro de la columna,

$$\bar{M}_u = \frac{M_u}{\phi} = M_c + M_s = C_c \cdot x_c + \sum F_{si} \cdot x_i \quad [7.2a]$$

Si la columna es simétrica nos viene,

$$\text{si } c = t/2 \rightarrow P_u/\phi = C_c \rightarrow \sum F_s = 0 \dots \text{si no se descuentan los vacíos -espacios ocupados por el acero ppal.-}$$

7.5 DIAGRAMA \bar{P}_u vs. e

El momento \bar{M}_u puede expresarse en función de la excentricidad de la carga así..... $\bar{M}_u = \bar{P}_u \cdot e$ ó $e = \bar{M}_u / \bar{P}_u$

La carga \bar{P}_u y el momento generado por la excentricidad producen,

- 1) Compresión que resisten el concreto C_c y el acero en la zona comprimida.
- 2) Tracción que resiste el acero restante.

La curva asintótica 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 (Figura 7.4) es el lugar geométrico de los pares de valores \bar{P}_u y e que hacen fallar la columna,

- A medida que aumenta la excentricidad e disminuye el valor de \bar{P}_u necesario para producir la falla.
- Para $e = 0$ la capacidad de carga es máxima: $\bar{P}_u = P_o$.
- A medida que e aumenta a $e_1, e_2, e_3 = e_{bal}$ etc., la carga última disminuye a ... $P_1, P_2, P_3 = P_{bal}$ hasta llegar a cero cuando $e = \infty$ (pura flexión, caso de una viga, Capítulo 5) y también,
 - 1) Disminuye c y por lo tanto C_c y F_s . Para $c \approx c_{bal}$ se tiene $F_s = 0$ y para valores de c menores que c_{bal} , F_s se vuelve negativo. Lo cual explica que en este rango y para una misma curvatura, a medida que el área de acero aumenta, la capacidad de carga disminuye, aunque esto no ocurre con \bar{M}_u .
 - 2) Aumenta el valor del ángulo ϕ , o sea la curvatura y por lo tanto disminuyen los acortamientos y aumentan los alargamientos.

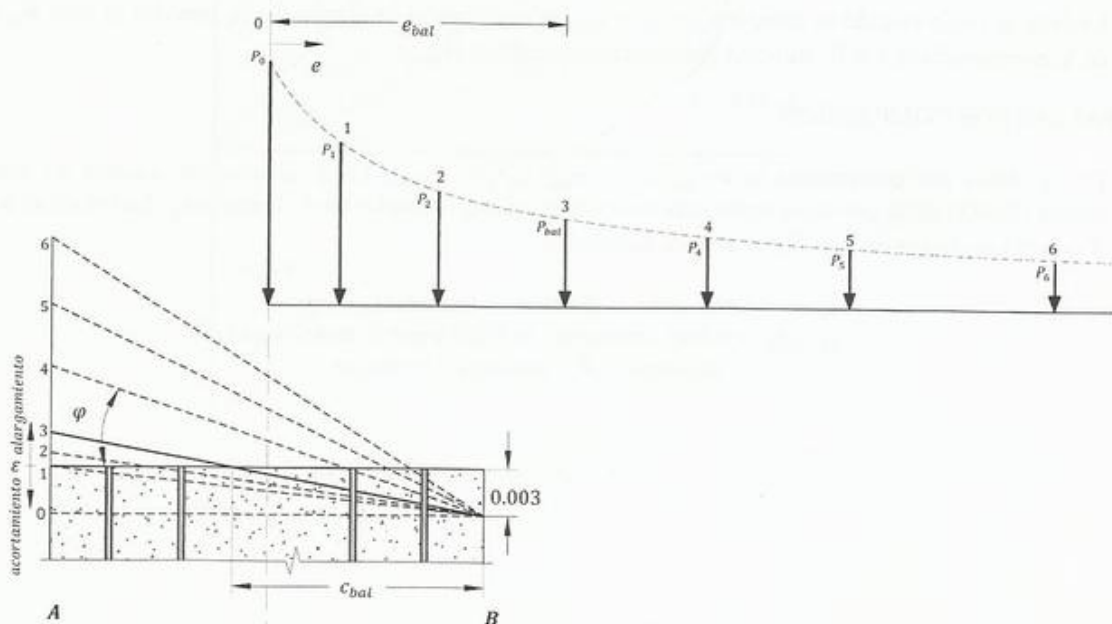


Fig. 7.4 Diagrama de P vs e

Observaciones

El máximo momento \bar{M}_u que puede resistir una columna ocurre para $c \cong c_{balanceado}$. La máxima carga axial que puede resistir una columna \bar{P}_{max} ocurre cuando $\bar{M}_u = 0$ es decir para una excentricidad e igual a cero,

$$e = \frac{\bar{M}_u}{\bar{P}_u} = 0$$

Si $e = 0$ y descontamos los vacíos de concreto desplazados por las barras de acero nos viene,

$$\bar{P}_o = 0.85 \cdot f'_c \cdot A + A_{st} \cdot (F_y - 0.85 \cdot f'_c) \quad [7.3]$$

$$\bar{P}_{u\max} = coef \cdot \bar{P}_o$$

$$coef = 0.80 \text{ columnas sin zunchar} \dots \dots \text{coef} = 0.85 \text{ columnas zunchadas}$$

El coeficiente refleja la reducción de la resistencia a compresión del concreto bajo la acción de cargas sostenidas en el tiempo y la posibilidad de ocurrencia de excentricidades (o momentos) no previstos en el diseño.

El valor de $0.85 \cdot f'_c$ en la Ecuación 7.3 fue derivado en base a ensayos experimentales realizados en la Universidad de Illinois (ver Hognestad, 1951).

7.6 TIPOS DE FALLAS

$\bar{M}_u = \bar{P}_u \cdot e$ Tracciona y alarga el lado izquierdo A y comprime acortando el lado derecho B de la Figura 7.4. En el borde B los efectos de \bar{P}_u y \bar{M}_u se suman y en A se restan.

a) FALLAS POR TRACCIÓN

En las fallas por tracción ($c < c_{bal} \dots a < a_{bal} \dots \bar{P}_u < P_{bal}$) en el acero se alcanza $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ en las barras más próximas al A , y en el concreto (en B) la deformación de acortamiento es menor que ε_u (0.003). La falla final se producirá cuando el acero más próximo a A alcance $\varepsilon_s > \varepsilon_y$ y en el concreto se tenga $\varepsilon_u = 0.003$. Si se define,

ε_1 = Acortamiento del acero más comprimido debido a \bar{P}_u .

ε_2 = Alargamiento del acero más traccionado debido a flexión \bar{M}_u .

La falla se inicia cuando se cumple $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_y$; es decir que si se disminuye \bar{P}_u también lo hará \bar{M}_u (aumento de la excentricidad) y si \bar{P}_u aumenta (desde cero) aumentará \bar{M}_u .

b) FALLAS POR COMPRESIÓN

En las fallas por compresión ($c > c_{bal} \dots a > a_{bal} \dots \bar{P}_u > P_{bal}$). En B el concreto alcanza su deformación última (0.003) antes que en el acero más traccionado en las cercanías de A llegue a ε_y . La rotura se produce en B donde los efectos de \bar{P}_u y \bar{M}_u se suman. Llamando,

ε_3 = Acortamiento en B debido a flexión \bar{M}_u , tenemos,

$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0.003$ (condición de falla) y por lo tanto cuando \bar{P}_u disminuye, \bar{M}_u aumenta y viceversa.

7.7 DIAGRAMA DE INTERACCIÓN \bar{M}_u vs. \bar{P}_u

La curva sombreada ABC (Figura 7.5) denominada **Diagrama de Interacción** es el lugar geométrico de los valores del momento y de la carga axial que rompen la columna. En el punto A de $M = 0$ y $\bar{P}_u = P_o$ la falla es de compresión pura. En C , que corresponde a $\bar{P}_u = 0$ la falla se produce por flexión pura y $\bar{M}_u = M_o$.

Desde A hasta B las fallas son por compresión y de B hasta C por tracción.

Entre C y D hay flexotracción y en el punto D tenemos pura tracción,

$$T_o = A_{st} \cdot F_y$$

La columna es capaz de resistir cualquier combinación de valores M y P que estén sobre la curva ABC o dentro de ella (zona $OABC$). La inclinación (cotangente) de las rectas que pasan por el origen, mide el valor de la excentricidad,

$$e = \bar{M}_u / \bar{P}_u$$

Para distintos porcentajes de acero tendremos una familia de curvas paralelas a $OABCD$. La curva $OA'B'$ corresponde al caso $\rho = 0$ es decir a la colaboración del concreto sin acero.

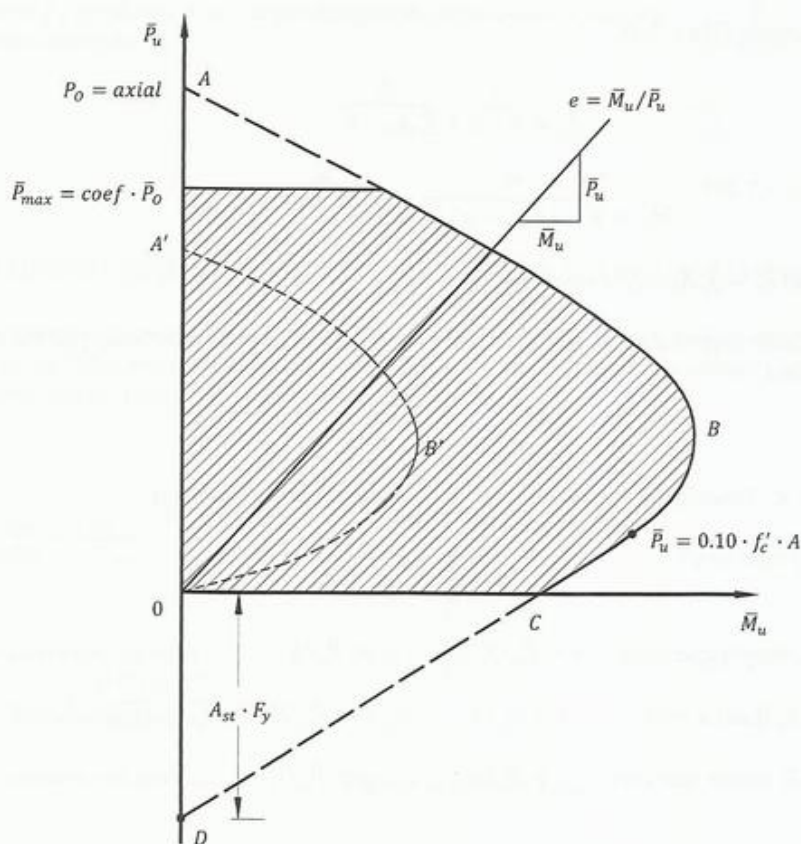


Fig. 7.5 Diagrama de Interacción \bar{M}_u vs. \bar{P}_u

7.8 COLUMNAS RECTANGULARES

Son las más empleadas en la construcción debido a la sencillez de su forma y a la facilidad del encofrado.

La relación entre su lado mayor h ó t y menor b debe cumplir (Figura 7.6),

$$t \leq 2.5 \cdot b$$

$$b \geq 0.4 \cdot t$$

Siendo el área de concreto comprimida A_c (sombreada, Figura 7.6),

$$A_c = b \cdot a$$

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a = K \cdot a \quad [7.4]$$

$$x_c = (t - a)/2 \quad \text{y} \quad M_c = C_c \cdot x_c \quad [7.5 \text{ y } 7.6]$$

Sustituyendo en las ecuaciones 7.1a y 7.2a,

$$\bar{P}_u = \overbrace{K \cdot a}^{C_c} + \overbrace{\sum A_{si} \cdot f_i}^{\sum F_i} \quad [7.1b]$$

$$\bar{M}_u = \overbrace{K \cdot a \cdot (t - a)/2}^{M_c} + \overbrace{\sum A_{si} \cdot f_i \cdot x_i}^{M_s} \quad [7.2b]$$

Para fallas por compresión $F_s = \sum A_{si} \cdot f_i$ es positivo ($a > a_{bal}$).

En columnas con acero simétricos se cumple que para $c = t/2$ resulta $\sum F_s = 0$, y en fallas por tracción puede tenerse $\sum F_s = 0$, ó negativo.

a) VALOR DE a ó DE c

Siendo... $K' = \beta_1 \cdot K$. Tendríamos de la Ecuación 7.1b al despejar el valor de a ,

$$a = \frac{\bar{P}_u}{K} - \frac{\sum F_s}{K}$$

Para $\sum F_s$ mayor que cero $a < \bar{P}_u/K \dots \dots c < \bar{P}_u/K' \dots \dots$ Falla por compresión

Para $\sum F_s$ igual a cero $a = \bar{P}_u/K \dots \dots c = \bar{P}_u/K' \dots \dots$ Falla por tracción

Para $\sum F_s$ menor que cero $a > \bar{P}_u/K \dots \dots c > \bar{P}_u/K' \dots \dots$ Falla por tracción

Siendo a_{bal} el límite entre la falla por compresión y tracción podemos concluir que el valor de a esta comprendido entre \bar{P}_u/K y a_{bal} .

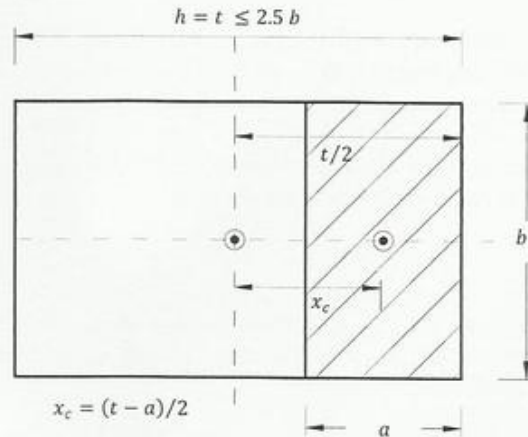


Fig. 7.6 Columna rectangular

Por otra parte (con la excepción que puede presentarse en fallas por compresión para valores de f'_c mayores que 500 kg/cm^2), se cumple

$$e > x_c \dots \text{o sea} \dots e > (t - a)/2 \therefore a > t - 2 \cdot e$$

b) ACERO ÚNICAMENTE EN BORDES (Figura 7.7)

$$A_s = A'_s = \frac{A_{st}}{2}$$

Por equilibrio de fuerzas verticales nos viene,

$$\bar{P}_u = K \cdot a + A_s \cdot (f'_s + f_s) \quad [7.1c]$$

Al aplicar la ecuación de equilibrio sumando momentos alrededor del centro de la columna nos queda,

$$\bar{P}_u \cdot e = \bar{M}_u = \frac{K \cdot a \cdot (t - a)}{2} + \frac{A_s \cdot (f'_s - f_s) \cdot (d - d')}{2}$$

Donde f_s puede ser + ó - según tengamos compresión o tracción respectivamente.

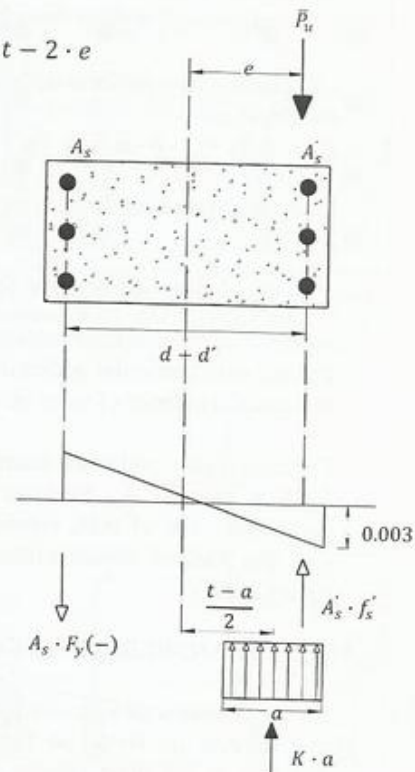


Fig. 7.7 Columna rectangular con acero de refuerzo en los bordes

c) ÁREA DE REFUERZO REQUERIDA EN EL CASO DE ACERO ÚNICAMENTE EN LOS BORDES

Empezaremos por definir c_{min} como el mínimo valor de c para que el acero en compresión fluya en el instante de falla en que se tiene $\epsilon_c = 0.003$ en la fibra más comprimida (Figura 7.8). Asumiendo que las secciones planas permanecen planas se obtiene,

$$\frac{c_{min}}{0.003} = \frac{c_{min} - d'}{\epsilon_y}$$

$$c_{min} = \frac{0.003 \cdot d'}{0.003 - \epsilon_y} \quad [7.7]$$

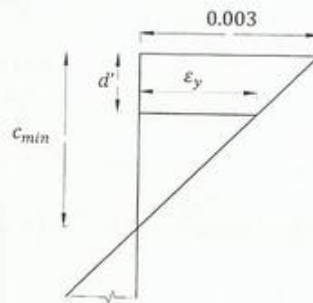


Fig. 7.8 Cálculo de c_{min}

Para acero de $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ se tiene,

$$c_{min} = 3 \cdot d' \text{ y } a_{min} = \beta_1 \cdot c_{min}$$

Para valores de a comprendidos entre a_{bal} y a_{min} tenemos,

$$f_s = -f'_s = F_y \quad \therefore \quad \sum F_s = 0 \quad y \quad a = P_u/K$$

La ecuación de equilibrio de fuerzas verticales 7.1c puede escribirse así,

$$\bar{P}_u = C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot b \cdot a = K \cdot a$$

La ecuación de equilibrio de momentos nos queda,

$$A_s \cdot F_y \cdot (d - d') = \bar{P}_u \cdot \left(e - \frac{(t - a)}{2} \right) \quad [7.2c]$$

En este caso particular podemos calcular directamente de la ecuación anterior el valor de $A_s = A'_s$; conocidos P_u y e .

En otros casos podemos asumir un valor de a entre a_b y \bar{P}_u/K y calcular A_s . Sustituir este valor en \bar{M}_u [7.2b] y compararlo con el dato, repitiendo el procedimiento hasta que dos valores consecutivos de \bar{M}_u sean iguales. (Ver Ejemplo 7.1).

d) ACERO TRANSVERSAL DE CONFINAMIENTO

En los extremos de las columnas es posible, pero indeseado, que durante un sismo se formen articulaciones plásticas. Por ello se les debe colocar acero transversal (A_{sh}) que confine el concreto para aumentar su resistencia y compensar la pérdida de capacidad axial debido al desprendimiento del recubrimiento y para aumentar la capacidad de deformación última del concreto. Normas ACI 318-08. Sección 21.4.4 (figuras 7.9 y 7.10). Sean,

$$z = 0.09 \cdot \frac{f'_c}{F_y}$$

$$A_{sh} \geq \left(\frac{10}{3} \right) \cdot z \cdot s \cdot h_c \cdot \left[\frac{A}{A_n} - 1 \right] \quad [7.8a] \quad ACI \ 21.3$$

$$A_{sh} \geq z \cdot s \cdot h_c \quad [7.8b] \quad ACI \ 21.4$$

s = Separación de estribos ó ligaduras

h_c = Distancia c - c ligaduras = $(h - 2 \cdot r - d_e)$

d_e = Diámetro ligaduras o estribos = 3/8" ó 1/2"

r = Recubrimiento neto ligaduras

A_n = Área núcleo = $(b - 2 \cdot r) \cdot (h - 2 \cdot r)$

$A = b \cdot h$

$$L_o \geq \left[\frac{1}{6} \cdot L, \ h, \ 50 \text{ cm} \right]$$

A una distancia L_o la separación debe ser,

$$s \leq 6 \cdot (\text{Dimetro acero ppl.})$$

$$s \leq [h/4 \quad b/4]$$

$$s \leq 10 \text{ cm}$$

Si $\frac{A}{A_n} > 1.30$ manda la Ecuación 7.8a

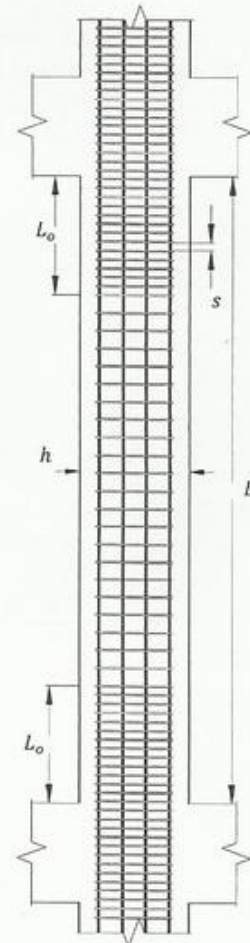


Fig. 7.9 Estribos de confinamiento

Para la Figura 7.10 con estribos y ligaduras de 3/8" tenemos (área 0.71 cm²)

Flexión sobre eje débil

$$A_{sh} = 4 \cdot 0.71 \text{ cm}^2 = 2.84 \text{ cm}^2$$

$$h_c = 40 - 2 \cdot r - d_e \dots h = 40 \text{ cm} \dots b = 60 \text{ cm}$$

Flexión sobre eje fuerte

$$A_{sh} = 2 \cdot 0.71 \text{ cm}^2 = 1.42 \text{ cm}^2$$

$$h_c = 60 - 2 \cdot r - d_e \dots h = 60 \text{ cm} \dots b = 40 \text{ cm}$$

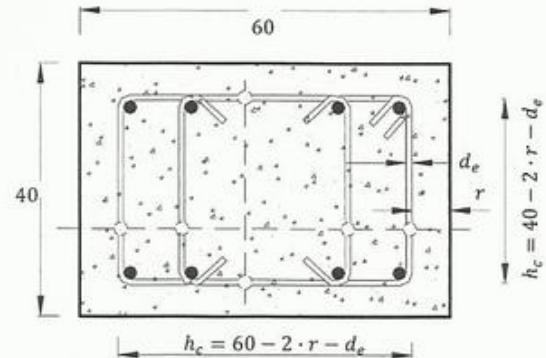


Fig. 7.10 Definición del acero trasversal de de confinamiento A_{sh}
Ver Ejemplo 7.4

La Ecuación 7.8 debe verificarse en ambas direcciones (Figura 7.10). En zona sísmica se recomienda que todas las barras estén agarradas por la esquina de una barra o si no por un gancho. El principal ingrediente para mitigar el colapso de una estructura durante terremotos es abundante y bien detallado acero transversal en columnas (Figura 7.11) es decir,

- Con los ganchos de los estribos o ligaduras doblados a 135 grados, es decir con sus extremos doblados hacia el centro de la columna.
- Colocado a separaciones verticales pequeñas.

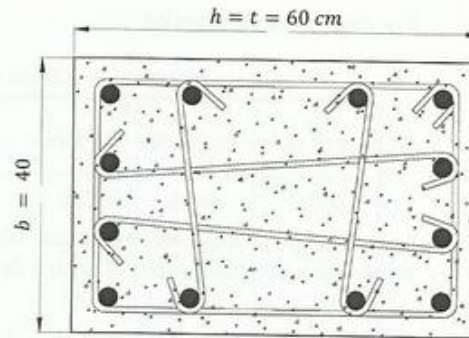


Fig. 7.11 Colocación adecuada del acero transversal en columnas (los ganchos se doblan hacia el centro de la columna)

EJEMPLO 7.1

Análisis (figuras 7.11 y 7.12). Datos,

$$\begin{aligned} f'_c &= 240 \text{ kg/cm}^2 \dots F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ E_s &= 2.100.000 \text{ kg/cm}^2 \\ A_{s1} &= A_{s4} = 20 \text{ cm}^2 \\ A_{s2} &= A_{s3} = 10 \text{ cm}^2 \\ d_1 &= 5.00 \text{ cm} \dots d_2 = 17.50 \text{ cm} \\ d_3 &= 42.50 \text{ cm} \dots d_4 = 55.00 \text{ cm} \\ b \cdot t &= 2400 \text{ cm}^2 \dots \rho = 60/2400 = 0.025 \end{aligned}$$

Se pide: calcular conocidos los valores de c , el momento y la carga última.

- Cálculos previos,
 $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow c_{bal} = 0.6 \cdot d$
 $\beta_1 = 0.85 \dots \epsilon_y = F_y/E_s = 0.002$
 $a_{bal} = 0.85 \cdot c_{bal} = 28.05 \text{ cm}$
 $K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 8160 \text{ kg/cm}$

Carga axial $e = 0$,

$$\text{Área neta de concreto} = b \cdot t - \Sigma A_s = 2340 \text{ cm}^2$$

$$\bar{P}_o = 0.85 \cdot 240 \cdot 2340 + 60 \cdot 4200 = 477360 + 252000 = 729360 \text{ kg}$$

Al aplicar la Ecuación 7.3,

$$\begin{aligned} \bar{P}_{u \max} &= 0.80 \cdot \bar{P}_o = 583488 \text{ kg} \\ \bar{P}_{u \min} &= f'_c \cdot b \cdot t / 10 = 57600 \text{ kg} \end{aligned}$$

- Proseguiremos escogiendo un valor de c y calcularemos en orden

$$a = \frac{\beta_1}{0.85} \cdot c$$

[5.8]

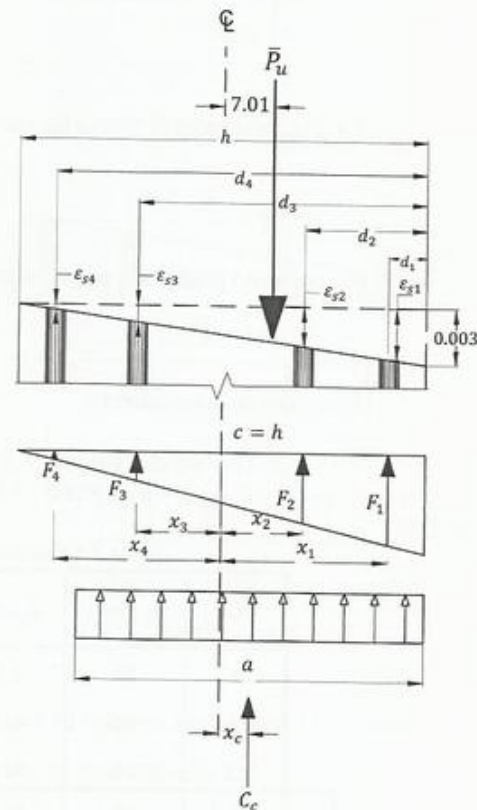


Fig. 7.12 Columna del Ejercicio 7.1 $c = h = 60 \text{ cm}$

Por relación de triángulos,

$$\varepsilon_{si} = \frac{0.003}{c} \cdot (c - d_i) \dots \text{analogía a Ec. 5.16 y 5.18} \quad [7.9]$$

Al aplicar la ley de Hooke nos viene,

$$f_i = \varepsilon_{si} \cdot E_s \leq F_y$$

Las fuerzas producidas por cada fila de acero se calculan a continuación. Sumando los momentos producidos por estas sobre el centro de la columna nos viene (Tabla 7.1)

$$F_i = A_{si} \cdot f_i \dots x_i = \frac{t}{2} - d_i \dots M_i = F_i \cdot x_i$$

La fuerza de compresión en el concreto la calculamos usando la Ecuación 7.4,

$$C_c = \frac{K}{0.85 \cdot f'_c \cdot b} \cdot a$$

La distancia entre la fuerza de compresión C_c y el centro de la columna (Ecuación 7.5),

$$x_c = \frac{t - a}{2}$$

El momento producido por C_c respecto al centro de la columna (Ecuación 7.6)

$$M_c = C_c \cdot x_c$$

Empezaremos asumiendo,

$$c = t = 60 \text{ cm (Figura 7.12)} \dots a = 51 \text{ cm} \dots x_c = 4.5 \text{ cm} \dots \text{Al aplicar 7.4 y 7.6}$$

$$C_c = K \cdot a = 8160 \cdot 51 = 416160 \text{ kg} \dots M_c = C_c \cdot x_c / 100 = 18727 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Tabla 7.1 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 60 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.1)

Fila	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$d_i \text{ (cm)}$	ε_s	$f_i \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$F_i \text{ (kg)}$	$x_i \text{ (m)}$	$M_i \text{ (kg} \cdot \text{m)}$
1	20	5.0	0.00275	4200	84000	0.250	21000
2	10	17.5	0.00213	4200	42000	0.125	5250
3	10	42.5	0.00088	1838	18375	-0.125	-2297
4	20	55.0	0.00025	525	10500	-0.250	-2625

$$\Sigma F_i = 154875 \text{ kg} \dots \Sigma M_i = 21328 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Aplicando las ecuaciones 7.1b y 7.2b obtendremos $\bar{P}_u = 571035 \text{ kg} \dots \bar{M}_u = 40055 \text{ kg} \cdot \text{m}$

$$e = M_u / \bar{P}_u = 0.07 \text{ m} > x_c$$

$c = 55 \text{ cm}$ (Figura 7.13)

Tabla 7.2 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 55 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.1)

Fila	$A_s (\text{cm}^2)$	$d_i (\text{cm})$	ε_s	$f_i (\text{kg/cm}^2)$	$F_i (\text{kg})$	$x_i (\text{m})$	$M_i (\text{kg} \cdot \text{m})$
1	20	5	0.00273	4200	84000	0.250	21000
2	10	17.5	0.00205	4200	42000	0.125	5250
3	10	42.5	0.00068	1432	14318	-0.125	-1790
4	20	55	0.00000	0	0	-0.250	0

$$C_c = K \cdot a = 8160 \cdot 46.75 = 381480 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_i = 140318 \text{ kg}$$

$$M_c = C_c \cdot \frac{x_c}{100} = 8160 \cdot 46.75 \cdot \frac{6.625}{100}$$

$$M_c = 25273 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_s = \Sigma M_i = 24460 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u = C_c + \Sigma F_i = 521798 \text{ kg}$$

$$\bar{M}_u = M_c + M_s = 49733 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$e = 9.53 \text{ cm} > x_c$$

• Para $c = 42.5 \text{ cm}$

$$C_c = K \cdot a = 8160 \cdot 36.125 = 294780 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_i = 84000 \text{ kg}$$

$$M_s = \Sigma M_i = 34897 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

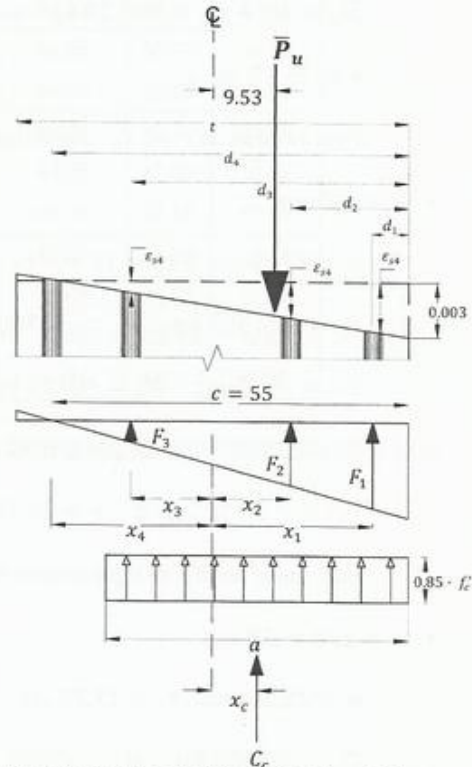


Fig. 7.13 Columna del Ejercicio 7.1 $c = 55 \text{ cm}$

Tabla 7.3 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 42.5 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.1)

Fila	$A_s (\text{cm}^2)$	$d_i (\text{cm})$	ε_s	$f_i (\text{kg/cm}^2)$	$F_i (\text{kg})$	$x_i (\text{m})$	$M_i (\text{kg} \cdot \text{m})$
1	20	5.0	0.00265	4200	84000	0.250	21000
2	10	17.5	0.00176	3706	37059	0.125	4632
3	10	42.5	0.00000	0	0	-0.125	0
4	20	55.0	-0.00088	-1853	-37059	-0.250	9265

$$M_c = C_c \cdot \frac{x_c}{100} = 8160 \cdot 36.125 \cdot \frac{11.94}{100} = 35196 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u = C_c + \Sigma F_i = 378780 \text{ kg} \dots \bar{M}_u = M_c + M_i = 70093 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$e = \bar{M}_u \cdot 100 / \bar{P}_u = 18.5 \text{ cm} > x_c$$

- $c = c_{bal} = 33 \text{ cm}$ (Figura 7.14)

$$a = 28.05 \text{ cm} \dots x_c = 15.98 \text{ cm}$$

$$C_c = 228888 \text{ kg} \dots C_s = 11454 \text{ kg}$$

$$\bar{P}_u = C_c + \Sigma F_i = 240342 \text{ kg}.$$

$$M_c = 36564 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_s = 47965 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_u = M_c + M_s = 84529 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$e = 35.17 \gg x_c$$

Para valores de $c < c_b$ las fallas son por tracción.

- $c = 32 \text{ cm}$

$$a = 27.20 \text{ cm} \dots x_c = 16.40 \text{ cm}$$

$$C_c = 221952 \text{ kg} \dots M_c = 36400 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\Sigma F_i = 7875 \text{ kg} \dots M_s = 48152 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u = 229827 \text{ kg} \dots \bar{M}_u = 84522 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u/K = 28.165 > a \dots e = 36.79 \gg x_c$$

Este valor de \bar{M}_u es ligeramente mayor (en $23 \text{ kg} \cdot \text{m}$) que el valor de \bar{M}_u balanceado.

- $c = t/2 = 30 \text{ cm}$

$$a = 25.50 \text{ cm} \dots x_c = 17.25 \text{ cm}$$

$$C_c = 208080 \text{ kg} \dots M_c = 35893 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\Sigma F_i = 0 \text{ kg} \dots M_s = 48562 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u = 208080 \text{ kg} \dots \bar{M}_u = 84455 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u/K = 25.50 < a \dots e = 40.59 \text{ cm} \gg x_c$$

- $c = 24 \text{ cm}$

$$a = 20.40 \text{ cm} \dots x_c = 19.80 \text{ cm}$$

$$C_c = 166464 \text{ kg} \dots M_c = 32959 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\Sigma F_i = -24938 \text{ kg} \dots M_s = 49382 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u = 141526 \text{ kg} \dots \bar{M}_u = 82341 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\bar{P}_u/K = 17.34 < a \dots e = 58.25 \text{ cm}$$

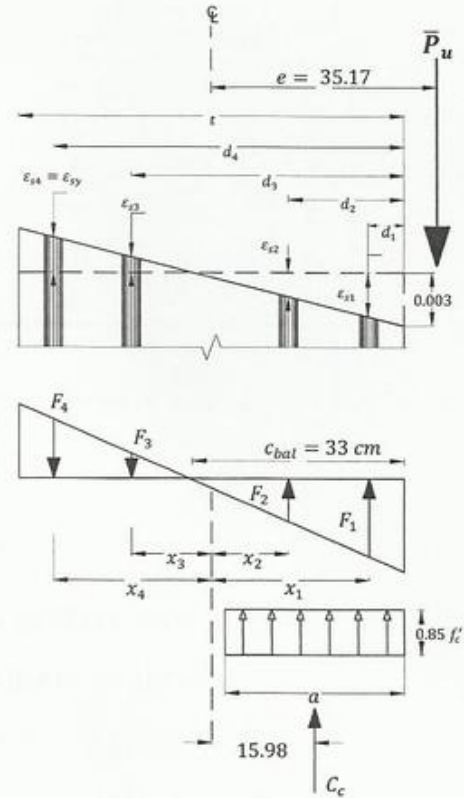


Fig. 7.14 Columna del Ejercicio 7.1 $c_{bal} = 33 \text{ cm}$

Estos y otros resultados aparecen en la Tabla 7.4

Tabla 7.4 Resumen de resultados del Ejemplo 7.1

c (cm)	a (cm)	ΣF_s (ton)	M_s (ton · m)	C_c (ton)	M_c (ton · m)	\bar{P}_u (ton)	\bar{M}_u (ton · m)	e (cm)	\bar{P}_u/K (cm)
		252.0		477.4		729.4			89.39
60	51.0	154.9	21.33	416.2	18.73	571.0	40.06	7.01	69.98
55	46.8	140.3	24.46	381.5	25.27	521.8	49.73	9.53	63.95
42.5	36.1	84.0	34.90	294.8	35.19	<u>378.8</u>	<u>70.09</u>	18.50	46.42
33	28.1	11.5	47.97	228.9	36.56	240.3	84.53	35.17	29.45
32	27.2	7.9	48.15	222.0	36.40	229.8	84.55	36.79	28.17
30	25.5	0.0	48.56	208.1	35.89	208.1	84.46	40.59	25.50
28	23.8	-9.0	49.03	194.2	35.15	185.2	84.18	45.45	22.70
26	22.1	-19.4	49.57	180.3	34.17	161.0	83.75	52.03	19.72
24	20.4	-24.9	49.38	166.5	32.96	141.5	82.34	58.18	17.34
22	18.7	-29.1	48.86	152.6	31.51	123.5	80.37	65.09	15.13
20	17.0	-34.1	48.23	138.7	29.82	104.6	78.06	74.63	12.82
15	12.8	-52.5	45.94	104.0	24.58	51.5	70.52	136.82	6.32
11.9	10.1	-82.6	40.81	82.5	20.59	0.0	61.40	infin.	0.00

Para $c = t/2 = 30 \text{ cm}$ se tiene $\bar{P}_u/\bar{P}_o = 0.285$ y $\bar{P}_o/\bar{P}_u = 3.5$. El valor mínimo de \bar{P}_u es de 57600 kg y para $c_{\text{mínimo}} = 15$ se tiene $\bar{P}_u = 51500 \text{ kg}$. ■

EJEMPLO 7.2

Analizar la columna del Problema 7.1 para flexión en la dirección **YY**.

En este caso,

$$b = 60 \text{ cm} \dots A_{s1} = A_{s4} = 20 \text{ cm}^2 \dots d_1 = 5 \text{ cm} \dots t - d_2 = 25 \text{ cm}$$

$$h = 40 \text{ cm} \dots A_{s3} = A_{s2} = 10 \text{ cm}^2 \dots d_2 = 15 \text{ cm} \dots d_4 = t - d_1 = 35 \text{ cm} = d$$

$$c_{bal} = 0.60 \cdot d = 21 \text{ cm}$$

$$a_{bal} = 0.85 \cdot c_{bal} = 17.85 \text{ cm} \dots a_{min} = 12.75 \text{ cm}$$

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 12240 \text{ kg/cm}$$

Los valores de \bar{P}_o , $\bar{P}_{m\acute{a}x}$ y P_{min} son iguales a los del Ejemplo 7.1.

Repitiendo el procedimiento del problema anterior tenemos,

- $c = 40 \text{ cm}$

$$a = 34.0 \text{ cm} \dots \dots \dots x_c = 3.0 \text{ cm}$$

Tabla 7.5 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 40.0 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.2)

Fila	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$d_i \text{ (cm)}$	ε_s	$f_i \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$F_i \text{ (kg)}$	$x_i \text{ (m)}$	$M_i \text{ (kg} \cdot \text{m)}$
1	20	5.0	0.00263	4200	84000	0.150	12600
2	10	15.0	0.00188	3938	39375	0.050	1969
3	10	25.0	0.00113	2363	23625	-0.050	-1181
4	20	35.0	0.00038	788	15750	-0.150	-2363
				Σ	162750 kg	Σ	11025 kg · m

- $c = 21 \text{ cm}$ Balanceado

$$a = 17.9 \text{ cm} \dots \dots \dots x_c = 11.08 \text{ cm}$$

Tabla 7.6 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 21.0 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.2)

Fila	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$d_i \text{ (cm)}$	ε_s	$f_i \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$F_i \text{ (kg)}$	$x_i \text{ (m)}$	$M_i \text{ (kg} \cdot \text{m)}$
1	20	5.0	0.00229	4200	84000	0.150	12600
2	10	15.0	0.00086	1800	18000	0.050	900
3	10	25.0	-0.00057	-1200	-12000	-0.050	600
4	20	35.0	-0.00200	-4200	-84000	-0.150	12600
				Σ	6000 kg	Σ	26700 kg · m

Tabla 7.7 Resumen de resultados del Ejemplo 7.2

c (cm)	a (cm)	ΣF_s (ton)	M_s (ton · m)	C_c (ton)	M_c (ton · m)	\bar{P}_u (ton)	\bar{M}_u (ton · m)	e (cm)	\bar{P}_u/K (cm)
40	34.0	162.8	11.03	416.2	12.48	578.9	23.51	4.06	47.3
35	29.8	138.0	13.50	364.1	18.66	502.1	32.16	6.41	41.0
30	25.5	105.0	16.80	312.1	22.63	417.1	39.43	9.45	34.1
25	21.3	58.8	21.42	260.1	24.38	318.9	45.80	14.36	26.1
22	18.7	21.0	25.20	228.9	24.38	249.9	49.58	19.84	20.4
21 (bal)	17.9	6.0	26.70	218.5	24.20	224.5	50.90	22.67	18.3
20	17.0	0.0	26.78	208.1	23.93	<u>208.1</u>	<u>50.70</u>	24.37	17.0
18	15.3	-14.0	26.95	187.3	23.13	173.3	50.08	28.90	14.2
16	13.6	-31.5	27.17	166.5	21.97	135.0	49.14	36.41	11.0
15	12.8	-42.0	27.30	156.1	21.26	114.1	48.56	42.58	9.3
12	10.2	-68.3	24.94	124.8	18.60	56.6	43.54	76.93	4.6
9.64	8.2	-100.4	22.05	100.3	15.95	0.0	38.00	infin.	0.0

Al comparar resultados con los del Ejemplo 7.1, observamos,

- Los valores máximos, mínimos y los correspondientes a $c = t/2$ son iguales en ambos casos (carga última).
- Los momentos en el Ejemplo 7.2 son siempre menores en un 60% aproximadamente que los del Ejemplo 7.1 debido a la disminución de los brazos de palanca de las fuerzas en el concreto y en el acero ■.

EJEMPLO 7.3

Graficar los valores de \bar{P}_u vs. \bar{M}_u de los ejemplos 7.1 y 7.2.

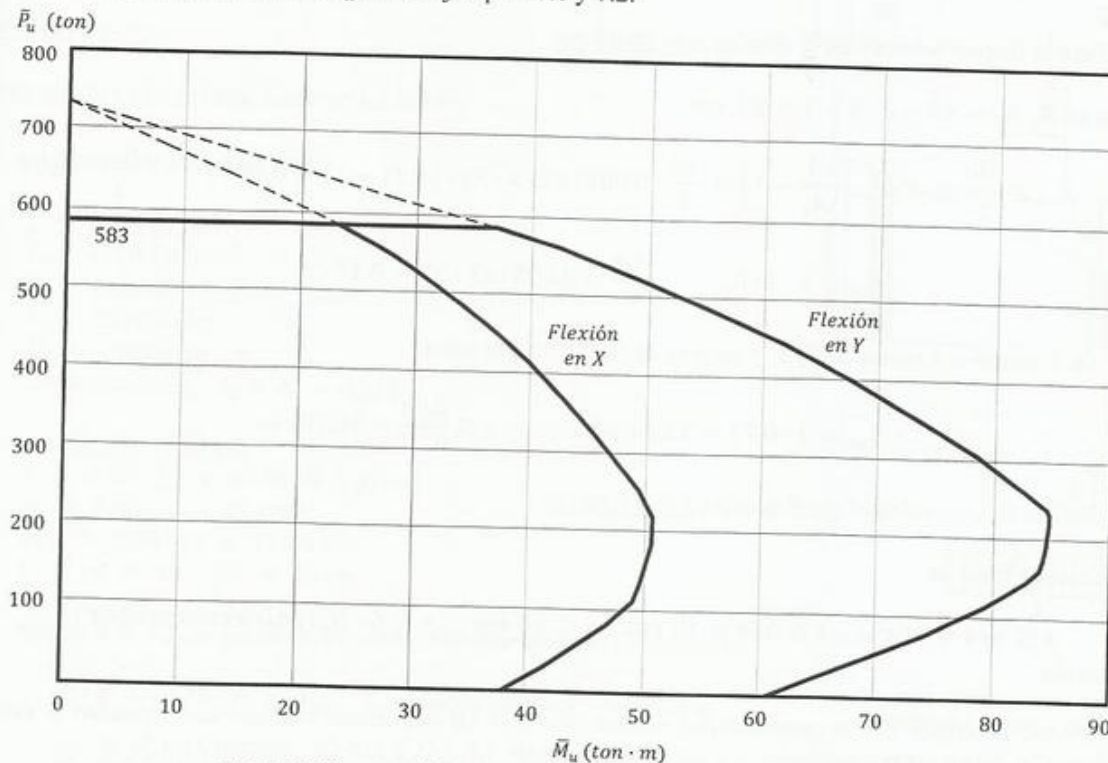


Fig. 7.15 Diagrama de interacción para las columnas de los ejemplos 7.1 y 7.2

EJEMPLO 7.4

Calcular las ligaduras por confinamiento requeridos por la columna del Ejemplo 7.1 (Figura 7.11) (Zona sísmica).

Recubrimiento neto ligaduras,

$$(\emptyset 3/8") r = 3 \text{ cm. } A = 40 \cdot 60 = 2400 \text{ cm}^2$$

$$b_n = b - 2r = 40 - 2 \cdot 3 = 34 \text{ cm} \dots \dots h_n = t - 2 \cdot r = 60 - 2 \cdot 3 = 54 \text{ cm}$$

$$A_n = b_n \cdot h_n = 34 \cdot 54 = 1836 \text{ cm}^2 \dots A/A_n = 1.31$$

Siendo A/A_n mayor que 1.30 manda la Ecuación 7.8a. Como complemento se harán los cálculos con las dos fórmulas,

$$z = 0.09 \cdot \frac{f'_c}{F_y} = 0.09 \cdot \frac{240}{4200} = 0.005143$$

del estribo

Flexión en Y, $h_c = 60 - 2 \cdot 3 - 1 = 53 \text{ cm}$

$$A_{sh} \geq \frac{10}{3} \cdot z \cdot s \cdot h_c \cdot \left(\frac{A}{A_n} - 1 \right) = \frac{10}{3} \cdot 0.005143 \cdot s \cdot 53 \cdot (1.31 - 1) = 0.28 \cdot s \therefore \frac{A_{sh}}{s} = 0.28 \text{ cm}$$

$$A_{sh} \geq z \cdot s \cdot h_c \therefore \frac{A_{sh}}{s} = 0.005143 \cdot 53 = 0.27 \text{ cm} \dots \text{Tomaremos el mayor } \frac{A_{sh}}{s} = 0.28 \text{ cm}$$

Flectando en Y tenemos 4 ramas de 3/8" y un área de 0.71 cm^2 por rama.

$$A_{sh} = 4 \cdot 0.71 = 2.84 \text{ cm}^2 \therefore s \leq \frac{2.84}{0.28} = 10.08 \text{ cm}$$

Para la flexión sobre el eje $\frac{X}{Y}$ domina $s = 10.08 \text{ cm}$

Flexión en X, $h_c = 40 - 2 \cdot 3 - 1 = 33 \text{ cm}$

$$A_{sh} \geq \frac{10}{3} \cdot z \cdot s \cdot h_c \cdot \left(\frac{A}{A_n} - 1 \right) = \frac{10}{3} \cdot 0.005143 \cdot s \cdot 33 \cdot (1.31 - 1) = 0.18 \cdot s \therefore \frac{A_{sh}}{s} = 0.18$$

$$A_{sh} \geq z \cdot s \cdot h_c \therefore \frac{A_{sh}}{s} = 0.005143 \cdot 33 = 0.17 \text{ cm}$$

En X tenemos 4 ramas de 3/8" y un área de 0.71 cm^2 por rama.

$$A_{sh} = 4 \cdot 0.71 = 2.84 \text{ cm}^2 \therefore s \leq \frac{2.84}{0.17} = 16.70 \text{ cm}$$

Para la flexión sobre el eje X domina $s = 16.70 \text{ cm}$

Separaciones Límites

$$s \leq h/4 = 10 \text{ cm} \dots s \leq b/4 = 15 \text{ cm} \dots s \leq 10 \text{ cm} \dots s \leq 6 \cdot D_b (\text{falta comprobar})$$

Conclusión

Usaremos la menor de las separaciones encontradas $s = 10 \text{ cm}$. Estos cálculos corresponden a valores mínimos y deben ser comprobados por corte. Ver Ejemplo 8.5 (ACI-318-08, Sección 21.4.5) ■

EJEMPLO 7.5

Se pide encontrar la excentricidad e de \bar{P}_u con relación a x_c para diagrama triangular, como por ejemplo $c = t$. La fuerza total en el acero F_s dista $t/3$ del borde B (como máximo). En el concreto C_c dista $\beta_1 \cdot t/2$ de B .

Las dos fuerzas coinciden si se cumple,

$$t/3 = \beta_1 \cdot t/2 \text{ de donde } \beta_1 = 2/3$$

Sustituyendo este valor en,

$$\beta_1 = 1.05 - f'_c/1400 \therefore f'_c = 536.6 \text{ kg/cm}^2$$

Es decir que si $f'_c < 536.6 \text{ kg/cm}^2$:

ΣF_i dista del centro de la columna x_s mayor que la distancia x_c correspondiente a f'_c y por lo tanto tendremos e mayor que x_c . En caso contrario f'_c mayor que 536.6 kg/cm^2 . Las normas ACI toman $\beta_1 = 0.65$ que corresponde a $f'_c = 560 \text{ kg/cm}^2$. Fallas por tracción se tiene: $f_s \leq 0$ y M_s es positivo, y $\bar{P}_u \leq C_c$.

$$\text{De } \bar{P}_u \cdot e = C_c \cdot x_c + M_s$$

Tenemos,

$$e = (C_c/\bar{P}_u) \cdot x_c + (\Sigma F_i/\bar{P}_u) \cdot x_s \dots \text{luego } \dots e > x_c \blacksquare$$

EJEMPLO 7.6

Cálculo de Columna con acero en los bordes

• a) Excentricidad pequeña

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 210000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{P}_u = 290000 \text{ kg}$$

$$\bar{M}_u = 29000 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\text{Se pide calcular, } A_s = A'_s = A_{st}/2$$

$$e = M_u/P_u = 10 \text{ cm}$$

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 9520 \text{ kg/cm}$$

$$c_b = 0.60 \cdot d = 21 \text{ cm}$$

$$a_{bal} = 0.85 \cdot c_b = 17.85 \text{ cm}$$

$$t - 2 \cdot e = 40 - 20 = 20 \text{ cm}$$

Siendo $e = 10 \text{ cm}$ pequeño, podemos suponer falla por compresión.

$$\bar{P}_u/K = 30.46 \text{ cm} > a_{bal}, \text{ Tendremos falla por compresión}$$

El valor de a está comprendido entre 20 cm y 30.46 cm .

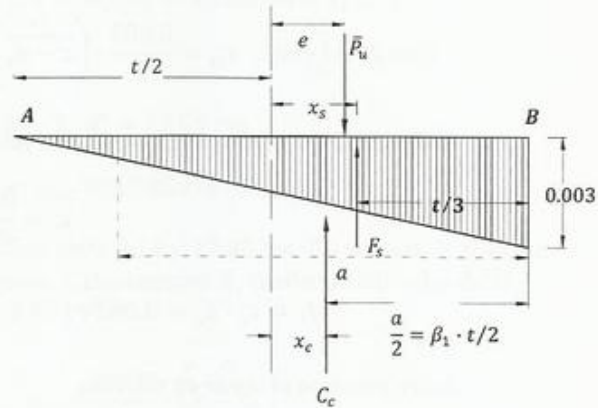


Fig. 7.16 Diagrama de deformaciones unitarias y Fuerzas (Ejemplo 7.5)

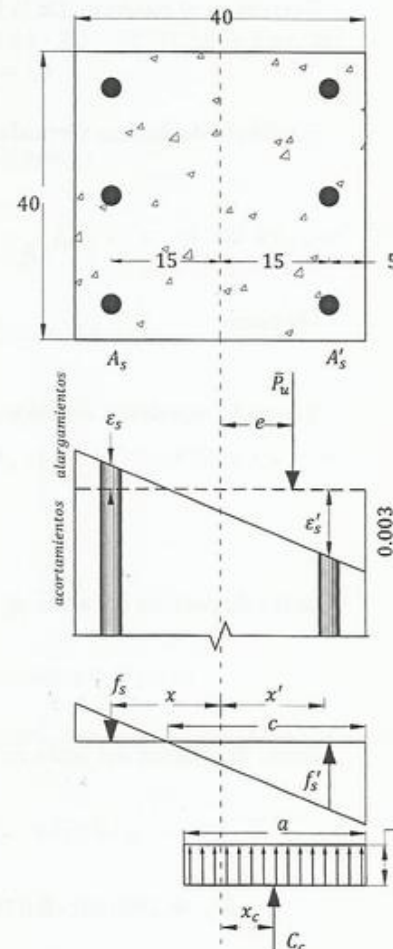


Fig. 7.17 Diagrama de deformaciones unitarias y Fuerzas (Ejemplo 7.6)

Primer tanteo: $a = 25 \text{ cm}$ (aproximadamente el promedio entre 20 cm y 30.46 cm). Calcularemos ϵ_{si} por relación de triángulos o usando la Ecuación 7.9

$$c = 29.41 \text{ cm} \dots \epsilon_{si} = \frac{0.003}{c} \cdot \left(\frac{c_i}{c - d_i} \right) \dots d' = c - 5 = 24.41 \text{ cm} \dots d_i = c - 35 = -5.59 \text{ cm}$$

Acero cerca del borde comprimido. Por relación de triángulos sabemos que (Figura 7.17)

$$\epsilon'_s = \frac{0.003}{29.41} \cdot (24.41) = 0.00249$$

$$f'_s = \epsilon'_s \cdot E_s = 0.00249 \cdot 2.1 \cdot 10^6 = 5229 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \therefore f'_s = F_y = 4200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} (C)$$

Acero próximo al borde en tracción,

$$\epsilon_s = \frac{0.003}{29.41} \cdot (-5.59) = -0.00057 \dots f_s = \epsilon_s \cdot E_s = -0.00057 \cdot 2.1 \cdot 10^6 = -1197 \text{ kg/cm}^2 (T)$$

Fuerzas en el concreto. De la Ecuación 7.4

$$C_c = K \cdot a = 238000 \text{ kg} \dots x_c = (t - a)/2 = 7.5 \text{ cm}$$

Equilibrio de fuerzas verticales (Ecuación 7.1b)

$$\bar{P}_u = 290000 = C_c + f'_s \cdot A'_s + f_s \cdot A_s$$

$$\bar{P}_u = 290000 = 238000 + 4200 \cdot A'_s - 1197 \cdot A_s$$

De donde,

$$A_s = A'_s = 17.32 \text{ cm}^2$$

Sumando momentos alrededor del centroide de la columna,

$$\bar{M}_u = \overbrace{C_c}^{\text{Concreto}} \cdot x_c + \overbrace{f'_s \cdot A'_s}^{\text{Acero}} \cdot x' + \overbrace{f_s \cdot A_s}^{\text{Acero}} \cdot x$$

Brazo de palanca del acero en compresión con respecto al centroide de la columna,

$$x' = \frac{h}{2} - d' = \frac{40}{2} - 5 = 15 \text{ cm}$$

Brazo de palanca del acero en tracción respecto al centroide de la columna,

$$x = \frac{h}{2} - d = \frac{40}{2} - 35 = -15 \text{ cm}$$

$$\bar{M}_u = 238000 \cdot 0.075 + 4200 \cdot 17.32 \cdot 0.15 - 1197 \cdot 17.32 \cdot (-15) = 39673 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Este valor es mayor que el dato. Para que \bar{M}_u disminuya aumentaremos el valor de a ligeramente.

Segundo tanteo: $a = 25.5 \text{ cm}$, repitiendo el procedimiento obtenemos,

$$A_s = A'_s = 15 \text{ cm}^2 \text{ y } \bar{M}_u = 29400 \text{ kg} \cdot \text{m} \text{ casi igual al dato. } \blacksquare$$

• b) Excentricidad muy grande

$$\bar{P}_u = 87000 \text{ kg} \dots \bar{M}_u = 30940 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots e = \bar{M}_u / \bar{P}_u = 35.56 \text{ cm} > t/2$$

De la Figura 7.8 para $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$$a_{\min} = \beta_1 \cdot c_{\min} = 0.85 \cdot 3 \cdot d' = 12.75 \text{ cm}$$

$$\bar{P}_u / K = 9.14 \text{ cm} < c_{\text{bal}} = 17.85 \text{ cm}$$

La falla es por tracción y el valor de a está comprendido entre 9.14 y 17.85 cm. En la zona de falla por tracción \bar{P}_u varía mucho y en cambio \bar{M}_u varía muy poco. Calcularemos A_s partiendo del valor de \bar{M}_u .

Primer tanteo: $a = 11 \text{ cm}$

$$c = \frac{11}{0.85} = 12.94 \dots \dots \dots \epsilon_{si} = \frac{0.003}{c} \cdot \left(\frac{c_i}{c - d_i} \right)$$

Acero en compresión. Siendo $a = 11 \text{ cm} < a_{\min}$ el acero en compresión no fluirá,

$$\epsilon'_s = \frac{0.003}{12.94} \cdot (12.95 - 5) = 0.001484 \dots f'_s = \epsilon'_s \cdot E_s = 0.00184 \cdot 2.1 \cdot 10^6 = 3866 \text{ kg/cm}^2 \text{ (C)}$$

Acero en tracción,

$$\epsilon_s = \frac{0.003}{12.94} \cdot (12.95 - 35) = -0.00511$$

$$f_s = \epsilon_s \cdot E_s = -0.00511 \cdot 2.1 \cdot 10^6 = -10740 \text{ kg/cm}^2 \therefore f_s = F_y = -4200 \text{ kg/cm}^2 \text{ (T)}$$

Las fuerzas en el concreto,

$$K \cdot a = 104720 \text{ kg}; x_c = (t - a)/2 = 14.5 \text{ cm}$$

Sumando Momentos,

$$\bar{M}_u = 104720 \cdot 0.145 + 3866 \cdot A'_s \cdot 0.15 - 4200 \cdot A_s \cdot (-0.15) = 30940 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$A_s = A'_s = 13.02 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo en \bar{P}_u ,

$$\bar{P}_u = K \cdot a + f'_s \cdot A'_s + f_s \cdot A_s$$

$$\bar{P}_u = 104720 + 3866 \cdot 13.02 - 4200 \cdot 13.02 = 100371 \text{ kg} \text{ (mayor que el dato)}$$

Segundo tanteo: Para que P_u disminuya escogeremos $a < 11$. Asumiendo $a = 10 \text{ cm}$ y repitiendo el procedimiento encontramos,

$$\bar{M}_u = 30940 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots A_s = A'_s = 14.19 \text{ cm}^2 \dots \bar{P}_u = 87000 \text{ kg} = \text{dato O.K.} \blacksquare$$

• c) Excentricidad grande

$$\bar{P}_u = 152320 \text{ kg} \dots \bar{M}_u = 37180 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$e = 24.40 \text{ cm} \dots \bar{P}_u / K = 16 \text{ cm}$$

$$a_{bal} = 17.85 \text{ cm}$$

$$a_{min} = \beta_1 \cdot c_{min} = 0.85 \cdot 3 \cdot d' = 12.75 \text{ cm}$$

Ver Figura 7.18. El valor de a esta entre 16 cm y 17.85 cm y además sabiendo que $a_{min} = 12.75 \text{ cm}$. Tendremos garantía de que el acero en compresión fluirá. También lo hará el acero en tracción. Tendremos entonces,

$$f'_s = F_y = 4200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots f_s = -F_y = -4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore \Sigma F_s = 0$$

$$\frac{\bar{P}_u}{K} = a = 16 \text{ cm}; \quad x_c = (t - a)/2 = 12 \text{ cm}$$

$$c = a/\beta_1 = 18.82 \text{ cm}$$

Al ser iguales A_s y A'_s , las fuerzas en el acero son iguales y opuestas: forman un par que por equilibrio debe ser igual al para \bar{P}_u y C_c .

$$A_s \cdot F_y \cdot (d - d') = \bar{P}_u \cdot [e - x_c]$$

$$A_s = 152320 \cdot (24.4 - 12) / (4200 \cdot 30)$$

$$A_s = A'_s = 14.99 \text{ cm}^2 \quad \blacksquare$$

Nota

En columnas grandes puede calcularse acero $A_s = A'_s$ siguiendo el procedimiento anterior y tomar un área A_{st} mayor que $2 \cdot A_s$ para distribuir el acero a lo largo de los bordes, teniendo en cuenta que el rendimiento del acero colocado hacia el centro de la columna es menor que el obtenido al ubicarlo lejos de dicho centro. En la práctica se usan diagramas de interacción adimensionales para verificar el diseño de las columnas (ver Apéndice B).

Una variación de las columnas rectangulares son las huecas que se usan principalmente en puentes y viaductos con elevación considerable. El detallado y comportamiento de estas columnas es presentado por Poston, Gilliam, Yamamoto y Breen (1985).

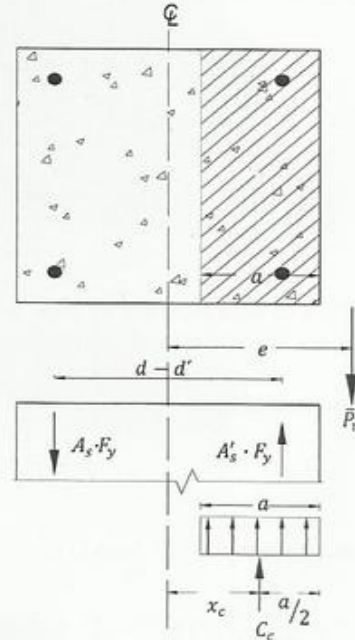


Fig. 7.18 Fuerzas actuando en el caso de excentricidad muy grande. (Ejemplo 7.6)

7.9 COLUMNAS CIRCULARES

Las columnas circulares o poligonales son las que mejor se adaptan al zunchado o espiral y tienen gran capacidad resistente al sismo cuando el paso del zuncho es suficientemente pequeño.

La cantidad de acero transversal requerida es considerablemente menor que la correspondiente a columnas sin zunchar.

En la Figura 7.19 tenemos,

R = Radio de la columna

R_n = Radio del núcleo = $R - r$

A_n = Área del núcleo

r = Recubrimiento neto del zuncho.

d_e = Diámetro zuncho (= 3/8" ó 1/2")

D_b = Diámetro barras verticales

D = Diámetro columna (≥ 30 cm)

$$R - a = R \cdot \cos(u) \cdots a = R \cdot [1 - \cos(u)]$$

$$R = R - r - d_e - \frac{D_b}{2}$$

$$x_i = R' \cdot \cos(z) \text{ Positivo hacia la derecha.}$$

$$d_i = R - x_i$$

$$A_c = k_1 \cdot R^2$$

$$k_1 = \pi \cdot u/180 - \sin(u) \cdot \cos(u)$$

$$x_c = k_2 \cdot R$$

$$k_2 = \frac{2 \cdot (\sin u)^3}{(3 \cdot k_1)}$$

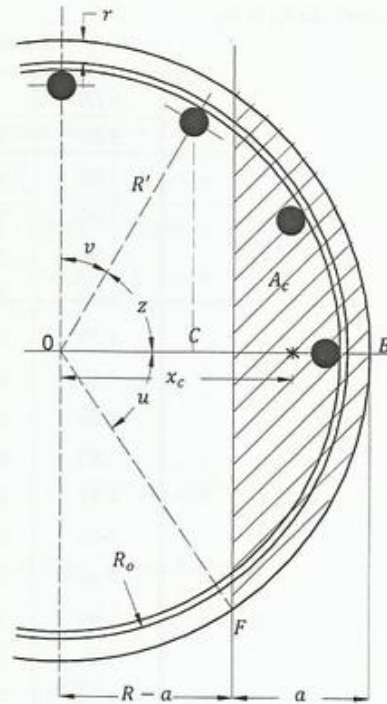


Fig. 7.19 Columna Circular

Estos valores se sustituyen en las ecuaciones de Equilibrio 7.1 y 7.2

$$\bar{P}_u = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c + \sum A_{st} \cdot f_i = F_c + F_s \quad [7.1d]$$

$$\bar{M}_u = F_c \cdot x_c + \sum A_{st} \cdot f_i \cdot x_i \quad [7.2d]$$

Las ecuaciones 7.4 y 7.6 se pueden describir,

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot k_1 \cdot R^2 \quad [7.4b]$$

$$M_c = F_c \cdot k_2 \cdot R \quad [7.6b]$$

Los valores de k_1 y k_2 se resumen en la Tabla 7.8

Valores de k_1 y k_2 .

Tabla 7.8 Valores de k_1 y k_2 para columnas circulares

a/R	k_1	k_2	a/R	k_1	k_2
2.00	3.14159	0.00000	1.10	1.77046	0.37092
1.95	3.12067	0.00650	1.05	1.67075	0.39753
1.90	3.08287	0.01791	1.00	1.57080	0.42441
1.85	3.03455	0.03212	0.95	1.47084	0.45156
1.80	2.97809	0.04835	0.90	1.37113	0.47894
1.75	2.91494	0.06618	0.85	1.27193	0.50655
1.70	2.84609	0.08531	0.80	1.17348	0.53437
1.65	2.77234	0.10553	0.75	1.07605	0.56238
1.60	2.69430	0.12669	0.70	0.97992	0.59058
1.55	2.61250	0.14865	0.65	0.88536	0.61895
1.50	2.52741	0.17133	0.60	0.79267	0.64749
1.45	2.43942	0.19463	0.55	0.70217	0.67618
1.40	2.34892	0.21850	0.50	0.61418	0.70502
1.35	2.25623	0.24288	0.45	0.52909	0.73400
1.30	2.16167	0.26772	0.40	0.44730	0.76311
1.25	2.06554	0.29298	0.35	0.36925	0.79234
1.20	1.96811	0.31861	0.30	0.29550	0.82169
1.15	1.86967	0.34460	0.25	0.22666	0.85116
			0.20	0.16350	0.88073

Valores de,

$$\frac{x_i}{R'} = \cos(z)$$

Se resumen en la Tabla 7.9

Siendo,

Ángulo entre barras $v = 360/n$

n = Número de barras...mínimo recomendado 6

Tabla 7.9 Valores $\cos(z)$ para columnas circulares

n	v	Fila de acero						
		1 ^{era}	2 ^{da}	3 ^{era}	4 ^{ta}	5 ^{ta}	6 ^{ta}	7 ^{ma}
8	45.0	1.0000	0.7071	0.0000				
12	30.0	1.0000	0.8660	0.5000	0.0000			
16	22.5	1.0000	0.9239	0.7071	0.3827	0.0000		
20	18.0	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090	0.0000	
24	15.0	1.0000	0.9659	0.8660	0.7071	0.5000	0.2588	0.0000

Valores de,

$$\bar{P}_u = C_c \text{ y de } M_c \text{ para } c = D/2 = R$$

Se resumen en la Tabla 7.10

Tabla 7.10 Valores \bar{P}_u y de \bar{M}_u para columnas circulares $c = R$

$c = r$	β_1	\bar{P}_u	$\bar{M}_u = \bar{P}_u \cdot x_c$	$x_c = e$
	0.85	$1.0811 \cdot f'_c \cdot R^2$	$0.547 \cdot f'_c \cdot R^3/100$	$0.506 \cdot R$
	0.80	$0.9975 \cdot f'_c \cdot R^2$	$0.533 \cdot f'_c \cdot R^3/100$	$0.534 \cdot R$

EJEMPLO 7.7

Columna circular. Calcular \bar{P}_u y \bar{M}_u para $c = R$

$$f'_c = 280 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots \beta_1 = 0.85 \dots R = 30 \text{ cm} \dots A = 2827.43 \text{ cm}^2$$

$$\bar{P}_u = 1.0811 \cdot 280 \cdot 30^2 = 272440 \text{ kg} \dots x_c = 0.506 \cdot R = 15.2 \text{ cm}$$

$$\bar{M}_u = 272440 \cdot 0.152 = 41400 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Una columna cuadrada de igual área encontramos para $c = h/2 \rightarrow \bar{P}_u = 285500 \text{ kg}$

a) ACERO TRASVERSAL DE CONFINAMIENTO (ZUNCHOS) (ACI 318-08, ecuaciones 10.5 y 21-2)

El zuncho es el refuerzo transversal en columnas circulares. Confinan el concreto y resisten parte del corte. Siendo,

$$\rho_s = \frac{\text{volumen zuncho por vuelta}}{\text{volumen nucleo por paso } s}$$

$$\rho_s = 0.45 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \left(\frac{A}{A_n} - 1 \right) \text{ pero no menor que } 0.12 \frac{f'_c}{F_y} \quad [7.10]$$

del estribo del estribo

ρ_s es el porcentaje de acero transversal al volumen.

$$\frac{A}{A_n} = \left(\frac{R}{R_n} \right)^2$$

$$\rho_s = \frac{a_s \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n}{(\pi \cdot R_n^2 \cdot s)} \rightarrow \text{comparar con [7.10]}$$

$a_s = \text{área zuncho} \dots s = \text{paso}$

$$\rho_s = \frac{2 \cdot a_s}{(R_n \cdot s)}$$

$$\frac{a_s}{s} = R_n \cdot \frac{\rho_s}{2}$$

$$s_{\max} = 8 \text{ cm}$$

$$a_s \text{ mínimo} = 0.71 \text{ cm}^2 \text{ (3/8")}$$

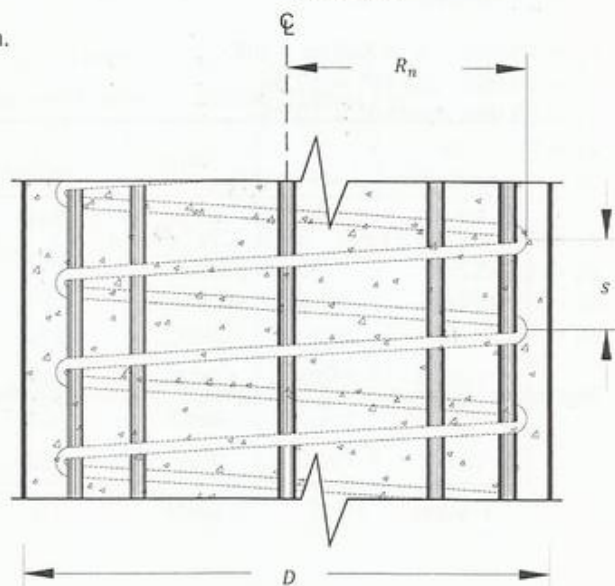


Fig. 7.20 Columna circular zunchada

EJEMPLO 7.8

Datos iguales al Ejemplo 7.7. Se pide calcular la separación del zuncho. Aplicaremos la Ecuación 7.10

$$r = 3 \text{ cm} \quad F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \quad 0.12 f'_c / F_y = 0.008$$

$$\rho_s = 0.45 \cdot \frac{280}{4200} \cdot \left(\left(\frac{30}{27} \right)^2 - 1 \right) = 0.00704 \rightarrow \text{domina } 0.12 \frac{f'_c}{F_y} = 0.008$$

$$\frac{a_s}{s} = 27 \cdot \frac{0.008}{2} = 0.108 \quad \text{para zuncho de } 3/8''$$

$$s = \frac{0.71}{0.108} = 6.57 \text{ cm} \quad \text{usar } s = 6.00 \text{ cm}$$

Falta comprobar por corte.

Nota

En columnas circulares con más de seis barras principales siempre se tiene flexo-compresión simple (basta con tomar como eje de las X a la recta que pasa por el punto de aplicación de P_u y el centro de la columna).

EJEMPLO 7.9

Análisis columna circular. Datos,

$$\begin{aligned} D &= 50 \text{ cm} \dots f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2 \\ R &= 25 \text{ cm} \dots F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ r &= 3 \text{ cm} \dots A = 1963.44 \text{ cm}^2 \\ E_s &= 2100000 \text{ kg/cm}^2 \\ 12 \text{ Barras de } 3/4'' &\dots A_{st} = 34.2 \text{ cm}^2 \\ \rho &= 1.74 \% , \text{ Zuncho de } 3/8'' \\ R_n &= 25 - 3 = 22 \text{ cm} \\ R' &= 25 - 3 - d_e - d_b / 2 \\ R' &= 20.10 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 20.095 \dots v = 360/n = 30^\circ \\ x_2 &= 20.095 \cdot \cos 30^\circ = 17.40 \\ x_3 &= 20.095 \cdot \cos 60^\circ = 10.05 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= -x_3 \dots x_6 = -x_2 \dots x_7 = -x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= R - x_1 = 4.91 \text{ cm} & d_2 &= 7.597 \text{ cm} \\ d_3 &= 14.95 \text{ cm} & d_4 &= 25.00 \text{ cm} \\ d_5 &= 35.05 \text{ cm} & d_6 &= 42.40 \text{ cm} \\ d_7 &= 45.10 \text{ cm} \end{aligned}$$

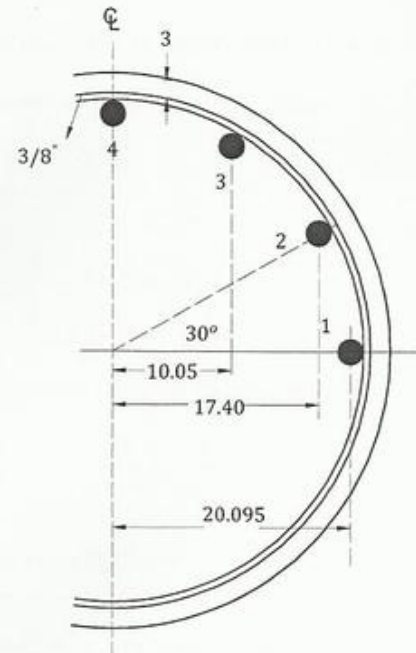


Fig. 7.21 Columna circular (Ejemplo 7.9)

Siguiendo el procedimiento del Ejemplo 7.1, se obtuvieron los resultados siguientes,

- Para $c = 50 \dots a = 42.5 \text{ cm} \dots k_1 = 2.846 \dots k_2 = 0.085$

Tabla 7.11 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 50.0 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.9)

Fila	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$d_i \text{ (cm)}$	ε_s	$f_i \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$F_i \text{ (kg)}$	$x_i \text{ (cm)}$	$M_i \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$
1	2.85	4.905	0.00271	4200	11970	20.095	240537
2	5.7	7.597	0.00254	4200	23940	17.403	416628
3	5.7	14.9525	0.00210	4200	23940	10.048	240537
4	5.7	25	0.00150	3150	17955	0.000	0
5	5.7	35.0475	0.00090	1884	10739	-10.048	-107899
6	5.7	42.403	0.00046	957	5456	-17.403	-94954
7	2.85	45.095	0.00029	618	1761	-20.095	-35395
Σ					95761	Σ	659454

- Para $c = 25 \dots a = 21.3 \text{ cm} \dots k_1 = 1.272 \dots k_2 = 0.507$

Tabla 7.12 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 25.0 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.9)

Fila	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$d_i \text{ (cm)}$	ε_s	$f_i \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$F_i \text{ (kg)}$	$x_i \text{ (cm)}$	$M_i \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$
1	2.85	4.905	0.00241	4200	11970	20.095	240537
2	5.7	7.597	0.00209	4200	23940	17.403	416628
3	5.7	14.9525	0.00121	2532	14432	10.048	145008
4	5.7	25	0.00000		0	0.000	0
5	5.7	35.0475	-0.00121	-2532	-14432	-10.048	145008
6	5.7	42.403	-0.00209	-4200	-23940	-17.403	416628
7	2.85	45.095	-0.00241	-4200	-11970	-20.095	240537
Σ					0	Σ	1604346

- Para $c = 15 \dots a = 12.8 \text{ cm} \dots k_1 = 0.632 \dots k_2 = 0.699$

Tabla 7.13 Fuerzas y momentos producidos por el acero $c = 15.0 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.9)

Fila	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$d_i \text{ (cm)}$	ε_s	$f_i \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$F_i \text{ (kg)}$	$x_i \text{ (cm)}$	$M_i \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$
1	2.85	4.905	0.00202	4200	11970	20.095	240537
2	5.7	7.597	0.00148	3109	17723	17.403	308430
3	5.7	14.9525	0.00001	20	114	10.048	1143
4	5.7	25.00	-0.00200	-4200	-23940	0.000	0
5	5.7	35.0475	-0.00401	-4200	-23940	-10.048	240537
6	5.7	42.403	-0.00548	-4200	-23940	-17.403	416628
7	2.85	45.095	-0.00602	-4200	-11970	-20.095	240537
Σ					-53984	Σ	1447811

Tabla 7.14 Resumen de resultados del Ejemplo 7.9

c (cm)	a (cm)	F_s (kg)	M_s (kg · m)	C_c (kg)	M_c (kg · m)	\bar{P}_u (kg)	\bar{M}_u (kg · m)	e (cm)
50	42.5	95761	6595	423356	9029	519118	15624	3.01
45	38.3	85787	7826	383602	15118	469388	22944	4.89
40	34.0	71864	9219	338395	20132	410260	29351	7.15
35	29.8	53916	11006	289839	23461	343755	34467	10.03
<u>30</u>	<u>25.5</u>	<u>29984</u>	<u>13388</u>	<u>239606</u>	<u>24777</u>	<u>269590</u>	<u>38164</u>	<u>14.16</u>
27.5	23.4	14755	14903	214332	24635	229087	39538	17.26
25	21.3	0	16043	189199	23960	189199	40003	21.14
22.5	19.1	-12125	16339	164392	22767	152268	39105	25.68
<u>20</u>	<u>17.0</u>	<u>-25525</u>	<u>16169</u>	<u>140107</u>	<u>21083</u>	<u>114581</u>	<u>37251</u>	<u>32.51</u>
17.5	14.9	-37722	15444	116548	18949	78827	34393	43.63
15	12.8	-53984	14478	93945	16423	39961	30901	77.33

descontando
vacíos

$$\bar{P}_o = 0.85 \cdot f'_c \cdot A + A_{st} \cdot (F_y - 0.85 \cdot f'_c)$$

$$\bar{P}_o = 0.85 \cdot 280 \cdot 1963.44 + 34.2 \cdot (4200 - 0.85 \cdot 280)$$

$$P_o \cong 602800 \text{ kg}$$

col. zunchadas

$$\bar{P}_{max} = \overline{0.85} \cdot P_o = 512379 \text{ kg}$$

El mismo ejemplo anterior pero con 12 barras de 7/8" ... $A_{st} = 46.44 \text{ cm}^2 \rightarrow \rho = 2.36\%$

Tenemos que para $c = 30 \text{ cm}$ y $c = 20 \text{ cm}$ se obtienen los siguientes valores,

Para $c = 30 \text{ cm}$

$$\bar{P}_u = 239606 + 29985 \cdot 46.44/34.2 = 280322 \text{ kg}$$

$$\bar{M}_u = 24777 + 13387 \cdot 46.44/34.2 = 42955 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Para $c = 20 \text{ cm}$

$$\bar{P}_u = 140107 - 25526 \cdot 46.44/34.2 = 105445 \text{ kg}$$

$$\bar{M}_u = 21083 + 16168 \cdot 46.44/34.2 = 43037 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Compare con los valores de la Tabla 7.14 ■

El diagrama de \bar{P}_u vs \bar{M}_u quedaría,

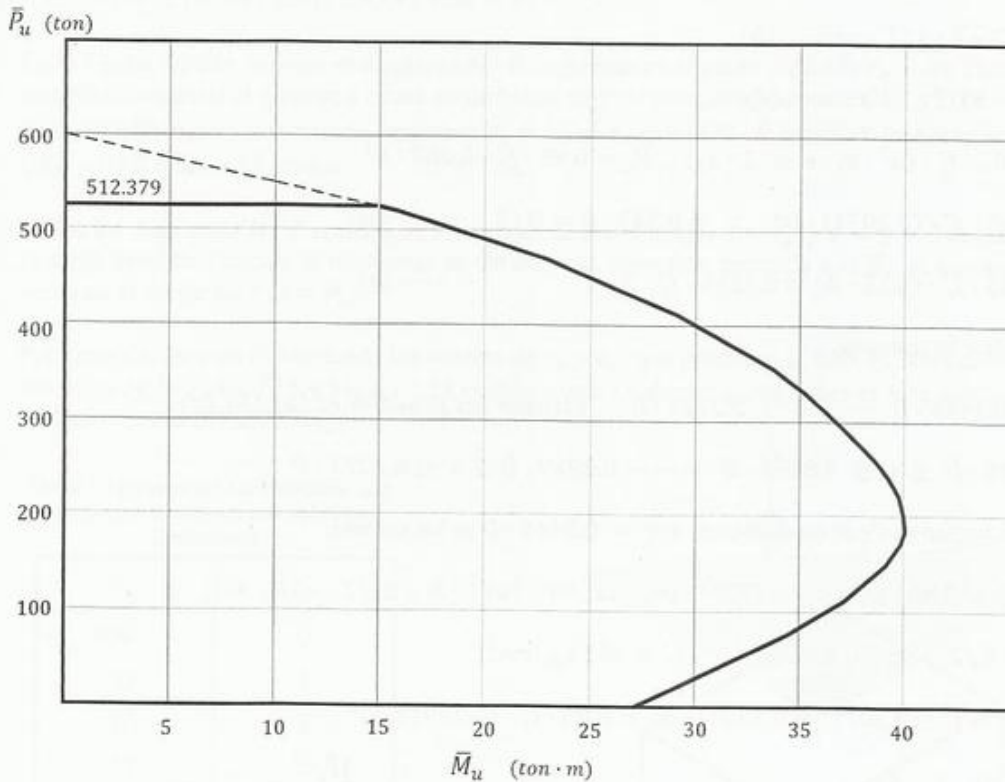


Fig. 7.22 Diagrama de interacción de la columna circular del Ejemplo 7.9

7.10 COLUMNAS OCTOGONALES

$$\text{Área (A)} = 0.82842 \cdot D^2$$

$$\text{Lado} = 0.41421 \cdot D$$

$$A = 2 \cdot L \cdot D$$

Valores límites para el análisis $\beta_1 = 0.85$,

$$c = 0.3446 \cdot D$$

$$a = \overbrace{0.85}^{\beta_1} \cdot c = 0.29291 \cdot D$$

Área comprimida,

$$A_1 = a^2 + a \cdot L = a \cdot (a + L) \dots (a)$$

$$A_1 = 0.2071 \cdot D^2 = A/4$$

$$\text{Compresión en el concreto } C_1 = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_1$$

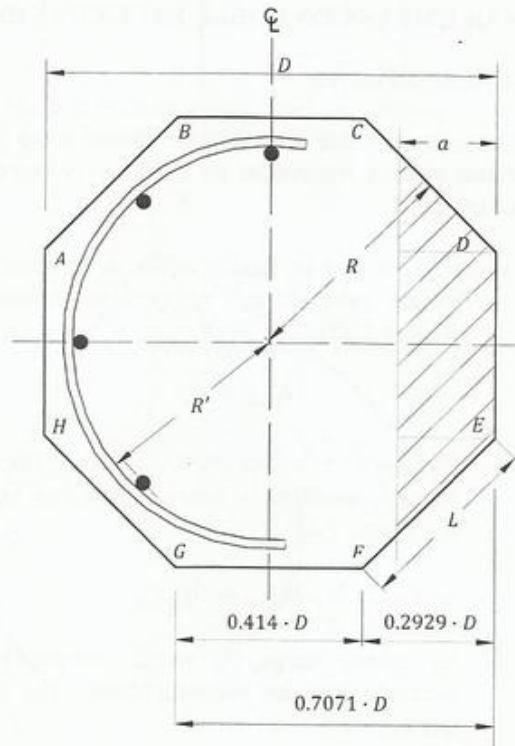


Fig. 7.23 Columnas Octogonales

Momento del concreto

$$x_1 = D/2 - 2 \cdot a/3 \dots\dots\dots (b)$$

$$x_2 = (D-a)/2 \dots\dots\dots (c)$$

$$M_1 = 0.85 \cdot f'_c \cdot (a^2 \cdot x_1 + a \cdot L \cdot x_2) \dots M_1 = 0.85 \cdot f'_c \cdot 0.069 \cdot D^3$$

$$C_1 = 0.85 \cdot f'_c \cdot (0.2071) \cdot D^2 \dots x_c = 0.333 \cdot D = D/3 \dots\dots\dots (d)$$

$$C_1 = 0.85 \cdot f'_c \cdot (0.25 \cdot A) = 0.2125 \cdot f'_c \cdot A \dots\dots\dots (e)$$

Casos para analizar la columna,

$$1) c \leq 0.3446 \cdot D \dots\dots a \leq 0.2929 \cdot D \quad \text{utilizar las ecuaciones (a), (b), (c)}$$

$$2) 0.3446 \cdot D \leq c \leq 0.8391 \cdot D \dots\dots\dots 0.2929 \cdot D \leq a \leq 0.7071 \cdot D$$

A los valores correspondientes a $c = 0.3446 \cdot D$ se les sumará,

$$C_c = 0.85 \cdot f'_c \cdot (a - 0.2929) \cdot D \dots\dots x = (0.7071 \cdot D - a)/2 \dots\dots M_c = C_c \cdot x$$

En el caso $c = D/2$; $a = 0.425 \cdot D$ ($f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$)

$$\bar{P}_u = 0.85 \cdot f'_c \cdot (0.2071 + 0.1321) \cdot D^2 = 0.85 \cdot f'_c \cdot (0.3392) \cdot D^2$$

$$\bar{P}_u = 0.348 \cdot f'_c \cdot A$$

7.11 COLUMNAS CON DOBLE EXCENRICIDAD

a) GENERALIDADES

Consideremos una columna rectangular de eje longitudinal z con sección transversal en el plano xy sometida a una carga \bar{P}_u .

- Si $e_x = 0 \rightarrow$ la flexión actúa en el plano OYZ y el mismo valor de \bar{P}_u romperá la columna con e_{y1} (Figura 7.26).

$$\bar{M}_{u,x0} = \bar{P}_u \cdot e_{y1}$$

- Si $e_y = 0 \rightarrow$ la flexión actúa en el plano OXZ y la carga \bar{P}_u romperá la columna para una excentricidad e_{x1} (Figura 7.26).

$$\bar{M}_{u,y0} = \bar{P}_u \cdot e_{x1}$$

- La misma carga \bar{P}_u puede romper la columna actuando con dos excentricidades e_x y e_y menores que e_{x0} y e_{y0} .

$$\bar{M}_{uy} = \bar{P}_u \cdot e_x \quad \bar{M}_{ux} = \bar{P}_u \cdot e_y$$

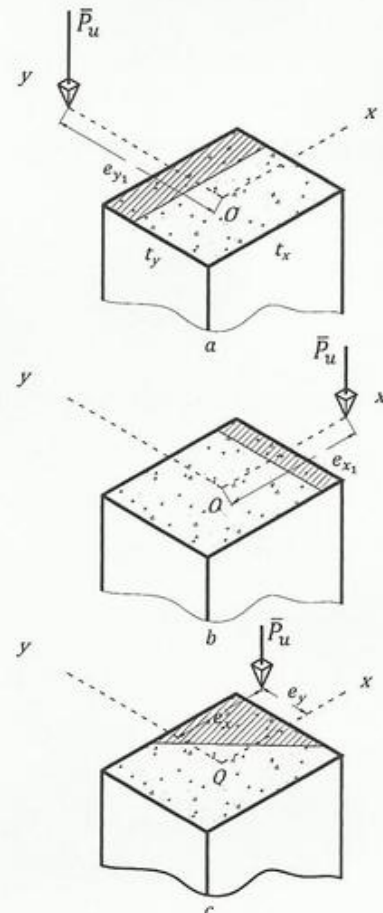


Fig. 7.24 Columna con doble excentricidad

c) ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Figura 7.27. Coordenadas $x' - y'$

e_x, e_y Coordenadas del punto de aplicación \bar{P}_u

x_c, y_c Coordenadas del centroide de A_c

c_i Distancia perpendicular de la barra al eje neutro

x_i', y_i' Coordenadas de las barras

$$F_i = A_{si} \cdot f_i \quad \text{Fuerza en la barra } i \quad [7.1e]$$

$$\bar{P}_u = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c + \Sigma F_i \quad [7.2e]$$

$$\bar{M}'_{u,yo} = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c \cdot x_c + \Sigma F_i \cdot x_i' \quad [7.2f]$$

$$\bar{M}'_{u,xo} = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c \cdot y_c + \Sigma F_i \cdot y_i'$$

El área comprimida de concreto puede ser de forma de triángulo, cuadrilátero o una figura de cinco lados, para el caso de columnas cuadradas o rectangulares.

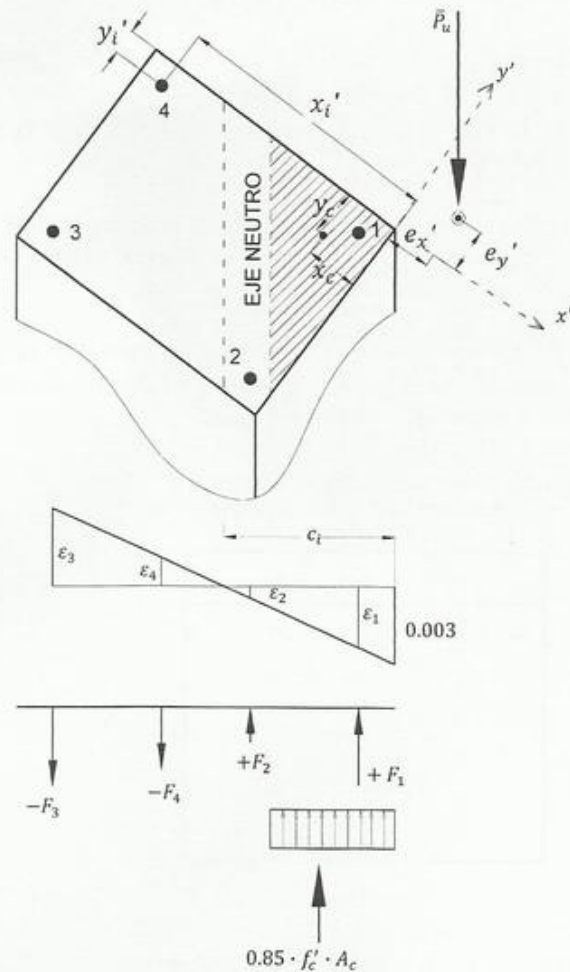


Fig. 7.27 Ecuaciones de equilibrio
Columna con doble excentricidad

d) MÉTODO DE LA EXCENRICIDAD EQUIVALENTE

Si actuando con dos excentricidades e_x, e_y , la carga \bar{P}_u produce la falla de la columna, existe un valor e_x' para el cual la misma carga rompe la columna siendo e_y igual a cero. Este valor se llama "excentricidad equivalente" que corresponde a un punto del diagrama VCC_1C' (ver figura diagramas $M-P$). Es evidente que e_x' es mayor que e_x .

Las normas españolas utilizan la expresión simplificada de Jiménez-Montoya, García-Menseguer, Moran-Cabré (2001),

$$e_x' = e_x + \beta \cdot e_y \cdot \frac{t_x}{t_y} \quad [7.11]$$

Se asume,

$$\frac{e_x}{e_y} = \frac{t_x}{t_y}$$

Siendo,

$$P_{oc} = 0.85 \cdot f'_c \cdot t_x \cdot t_y \dots \dots \dots v = \frac{P_u}{P_{oc}}$$

El valor de β lo encontramos en la Tabla 7.16,

Tabla 7.16 Valores de β para el método de la excentricidad equivalente

ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
β	0.7	0.8	0.9	0.9	0.8	0.7	0.6	0.6	0.6	0.5

(Para ν menor que 0.5 la falla es por tracción).

EJEMPLO 7.10

$$t_x = 60 \text{ cm} \dots t_y = 50 \text{ cm} \dots rec = 5 \text{ cm} \dots e_x = 24 \text{ cm} \dots e_y = 20 \text{ cm} \dots f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{P}_u = 244800 \text{ kg} \dots F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \dots P_{oc} = 0.85 \cdot 240 \cdot 60 \cdot 50 = 612000 \text{ kg}$$

$$\nu = 244800 \text{ kg} / 612000 \text{ kg} = 0.4$$

De la Tabla 7.15, $\beta = 0.9$

$$e'_x = 24 + 0.9 \cdot \frac{60}{50} \cdot 20 = 45.6 \text{ cm}$$

Calcularemos el acero para $P_u = 244800 \text{ kg}$ y $e'_x = 45.6 \text{ cm}$ utilizando el procedimiento del Ejemplo 7.6,

$$\frac{\bar{P}_u}{K} = a = 24 \text{ cm} \quad \text{para } F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \quad c_b = 0.6 \cdot d \quad y \quad a_b = 0.85 \cdot c_b = 28.05 \text{ cm}$$

$$28.05 \text{ cm} < a < 24 \text{ cm}$$

$$a_{min} = 0.85 \cdot 3 \cdot d' = 12.75 \text{ cm} \therefore \text{acero en compresión cede y } a = 24 \text{ cm} \dots x_c = (t - a)/2 = 18 \text{ cm}$$

Al aplicar la ecuación de momentos nos viene,

$$A_s = \frac{\bar{P}_u \cdot [e'_x - x_c]}{F_y \cdot (d - d')} = 32.18 \text{ cm}^2$$

$$A_s = A'_s = 32.18 \text{ cm}^2$$

Usaremos 5 filas de acero,

$$A_{s1} = A_{s5} = 25.3 \text{ cm}^2 \text{ (5 \#8)} \dots A_{s2} = A_{s4} = 10.12 \text{ cm}^2 \text{ (2 \#8)} \dots A_{s3} = 5.7 \text{ cm}^2 \text{ (2 \#6)}$$

Que corresponde a una cuantía del 2.55% valor máximo recomendado. ■

e) MÉTODO PARME, NIEVES Y GOUWENS (1966)

Para un valor dado de P_u la columna es segura si se cumple (Plano ABC, Figura 7.26),

$$\left[\frac{M_{ux}}{\bar{M}_{u,xo}} \right]^m + \left[\frac{M_{uy}}{\bar{M}_{u,yo}} \right]^n \leq 1 \quad [7.12]$$

$$m = n = \frac{\log(0.5)}{\log \beta}$$

Donde β varía entre 0.5 y 0.9 (en la Figura 7.28)

Los momentos actuantes últimos son,

$$M_{ux} = \bar{P}_u \cdot e_y \dots M_{uy} = \bar{P}_u \cdot e_x$$

Las Capacidades de la columna bajo \bar{P}_u

$\bar{M}_{u,xo}$ → Capacidad a flexión bajo P_u con una sola excentricidad e_y ($e_x = 0$)

$\bar{M}_{u,yo}$ → Capacidad a flexión bajo P_u con una sola excentricidad e_x ($e_y = 0$)

f) MÉTODO BRESLER (1960)

$$\frac{1}{\bar{P}_{u,xy}} = \frac{1}{\bar{P}_{u,xo}} + \frac{1}{\bar{P}_{u,yo}} - \frac{1}{\bar{P}_o} \quad [7.13]$$

$\bar{P}_{u,xy}$ → Capacidad axial con dos excentricidades e_x y e_y (biaxial)

$\bar{P}_{u,yo}$ → Capacidad axial con una sola excentricidad e_x , ($e_y = 0$)

$\bar{P}_{u,xo}$ → Capacidad axial con una sola excentricidad e_y , ($e_x = 0$)

\bar{P}_o → Máxima carga axial con $e_y = e_x = 0$

EJEMPLO 7.11

Para la columna del Ejemplo 7.1 y 7.2. $M_{ux} = 70.09 \text{ ton} \cdot \text{m}$, $M_{uy} = 50.70 \text{ ton} \cdot \text{m}$. Calcular el valor de $\bar{P}_{u,xy}$. Del ejemplo 7.1 sabemos que $\bar{P}_o = 583.5 \text{ ton}$. En las tablas 7.4 y 7.7 encontramos, $\bar{P}_{u,yo} = 378.8 \text{ ton}$ y $\bar{P}_{u,xo} = 208.1 \text{ ton}$. Tendríamos de la Ecuación 7.13,

$$\frac{1}{\bar{P}_{u,xy}} = \left[\frac{1}{\bar{P}_{u,yo}} + \frac{1}{\bar{P}_{u,xo}} - \frac{1}{\bar{P}_o} \right] \dots \frac{1}{\bar{P}_{xy}} = \left[\frac{1}{378.8} + \frac{1}{208.1} - \frac{1}{583.5} \right] = 5.73 \cdot 10^{-5} \rightarrow \bar{P}_{xy} = 174.5 \text{ ton} \quad \blacksquare$$

g) MÉTODO MEEK (1963)

Meek aproxima las curvas de la Figura 7.28 con dos rectas,

$$\left[\frac{M_{ux}}{\bar{M}_{u,xo}} \right] \cdot \frac{1-\beta}{\beta} + \left[\frac{M_{uy}}{\bar{M}_{u,yo}} \right] \leq 1 \quad \text{si} \quad \left[\frac{M_{uy}}{M_{ux}} \right] > \left[\frac{\bar{M}_{u,yo}}{\bar{M}_{u,xo}} \right] \quad [7.14a]$$

$$\left[\frac{M_{ux}}{\bar{M}_{u,xo}} \right] + \left[\frac{M_{uy}}{\bar{M}_{u,yo}} \right] \cdot \frac{1-\beta}{\beta} \leq 1 \quad \text{si} \quad \left[\frac{M_{uy}}{M_{ux}} \right] \leq \left[\frac{\bar{M}_{u,yo}}{\bar{M}_{u,xo}} \right] \quad [7.14b]$$

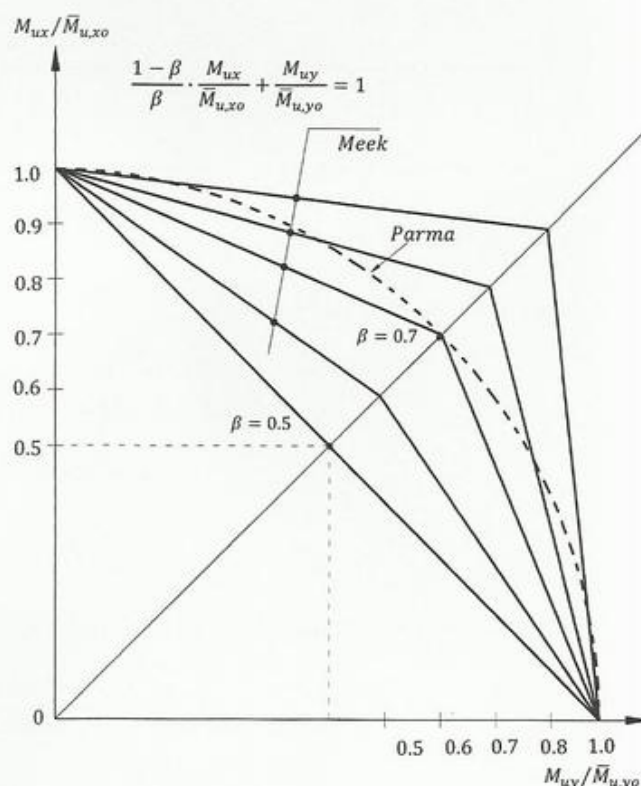


Fig. 7.28 Diagrama de interacción para un valor dado de \bar{P}_u

Las columnas con doble excentricidad se diseñaran preliminarmente utilizando el método de la excentricidad equivalente y luego las comprobaremos con las ecuaciones de Meek utilizando el valor de β calculado con el método de Gouwens. A los interesados en el tema se les recomienda consultar el trabajo realizado por el Profesor Joaquín Marín de la Universidad Central de Venezuela quien presenta una propuesta muy original y de fácil aplicación para el diseño de columnas con doble excentricidad (ver Marín, 1980).

h) METODO DE ALBERT GOUWENS PARA EL CÁLCULO DE β

Sean,

$$C_c = f'_c \cdot t_x \cdot t_y \dots F_s = A_{st} \cdot F_y = \rho \cdot t_x \cdot t_y \cdot F_y \dots \omega = \frac{F_s}{C_c} = \rho \cdot \frac{F_y}{f'_c} \dots r = \frac{\bar{P}_u}{C_c}$$

$$\text{Si } \omega \geq 0.50 \dots \beta_{25} = 0.485 + 0.03/\omega \quad [7.15a]$$

$$\text{Si } \omega < 0.50 \dots \beta_{25} = 0.545 + 0.35 \cdot (0.5 - \omega)^2 \quad [7.15b]$$

$$\text{Si } r \geq 0.25 \dots \beta = \beta_{25} + 0.20 \cdot (r - 0.25)/(0.85 + \omega) \quad [7.16a]$$

$$\text{Si } r < 0.25 \dots \beta = \beta_{25} + (0.25 - r)^2 \cdot (0.85 - \omega/2) \quad [7.16b]$$

β es mínimo para $r = 0.25$ y se cumple $\beta = \beta_{25}$

EJEMPLO 7.12

Columna cuadrada con doble excentricidad. Datos,

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{P}_u = 133280 \text{ kg}$$

$$e_x = e_y = 11.80 \text{ cm}$$

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 9520 \text{ kg/cm}$$

$$P_{oc} = K \cdot t_y = 380800 \text{ kg}$$

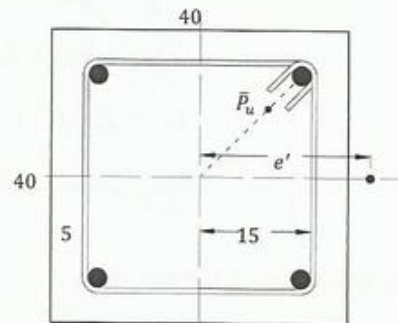


Fig. 7.29 Columna cuadrada con doble excentricidad. Ejemplo 7.12

• Método de la Excentricidad equivalente

$$v = \frac{\bar{P}_u}{P_{oc}} = 0.35$$

En la Tabla 7.15 $\beta = 0.90$.

$$e_{x'} = e_x + \beta \cdot e_y \cdot \frac{t_x}{t_y} = 11.80 + 0.9 \cdot 11.80 \cdot \frac{40}{40} = 22.42 \text{ cm}$$

• Cálculo de $A_s = A'_s$. (Ver Ejemplo 7.6. caso de excentricidad grande)

Calcularemos a_{bal}

$$a_{bal} = \beta_1 \cdot c_{bal} = 0.51 \cdot d = 0.51 \cdot 35 = 17.85 \text{ cm} \dots \bar{P}_u/K = a = 133280/9520 = 14 \text{ cm}$$

El valor de a estará entre 14 y 17.85 cm

$$a_{min} = 3 \cdot 0.85 \cdot 5 = 12.75 \text{ cm} \therefore \text{el acero en compresión cede}$$

El brazo de palanca entre C_c y \bar{P}_u (Figura 7.18),

$$e - \frac{\overbrace{(t-a)}^{x_c}}{2} = 22.42 - 13 = 9.42 \text{ cm}; \quad d - d' = 30 \text{ cm}$$

Por equilibrio de momentos (Figura 7.29),

$$A_s = A'_s = \frac{\bar{P}_u \cdot \left[e - \frac{t-a}{2} \right]}{F_y \cdot (d - d')} = 133280 \cdot 9.42 / (4200 \cdot 30) = 9.97 \text{ cm}^2 \therefore A_{st} = 19.94 \text{ cm}^2$$

Usaremos 4 barras de 1" con $A_s = A'_s = 10.12 \text{ cm}^2 \rightarrow \rho = 1.27 \% \text{ OK}$

• **Comprobación por el método de Meek-Gouwens**

Primero debemos encontrar el valor de $\bar{M}_{u,yo} = \bar{M}_{u,xo}$ del diagrama de interacción que corresponden a $\bar{P}_u = 133280 \text{ kg}$ actuando con una sola excentricidad. Para $c = 16.47 \text{ cm}$, tenemos que la capacidad de la columna viene dada por,

$$\bar{P}_u = 133276 \rightarrow \bar{M}_{u,xo} = \bar{M}_{u,yo} = 30077 \text{ kg} \cdot \text{m} \rightarrow e = \bar{M}_{u,xo} / \bar{P}_u = 22.57 \text{ cm}$$

$$M_{ux} = \bar{P}_u \cdot e_y = 133280 \cdot 0.118 = 15727 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_{uy} = \bar{P}_u \cdot e_x = 133280 \cdot 0.118 = 15727 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$C_c = f'_c \cdot t_x \cdot t_y = 448000 \text{ kg} \dots C_s = A_{st} \cdot F_y = 85008 \text{ kg}$$

$$\omega = F_s / C_c = 0.19 < 0.50$$

$$r = P_u / C_c = 0.30 > 0.25$$

De la Ecuación 7.15b nos viene,

$$\omega < 0.50 \dots \beta_{25} = 0.545 + 0.35 \cdot (0.5 - \omega)^2$$

$$\beta_{25} = 0.545 + 0.35 \cdot (0.50 - 0.19)^2 = 0.5787$$

La Ecuación 7.16a arroja,

$$r \geq 0.25 \dots \beta = \beta_{25} + 0.20 \cdot (r - 0.25) / (0.85 + \omega)$$

$$\beta = 0.5787 + \frac{0.20 \cdot (0.2975 - 0.25)}{(0.85 + 0.19)} = 0.58784$$

$$(1 - \beta) / \beta = 0.70$$

Debido a que $e_x = e_y$ y a la simetría de la columna,

$$\frac{M_{ux}}{M_{uy}} = 1.0 \dots \dots \dots \frac{M_{u,xo}}{M_{u,yo}} = 1.0$$

Al aplicar la Ecuación 7.14b,

$$\left[\frac{M_{ux}}{M_{u,xo}} \right] + \left[\frac{M_{uy}}{M_{u,yo}} \right] \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \leq 1$$

$$\left[\frac{15727}{30077} \right] + \left[\frac{15727}{30077} \right] \cdot 0.70 = 0.89 < 1 \quad O.K$$

• Análisis "exacto"

En este caso particular es relativamente fácil analizar la sección cuadrada tomando como eje xx una diagonal sobre la cual se encontrará la carga P_u actuando con (Figura 7.30).

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = 1.41 \cdot e_x$$

Análisis entre $a = t/2$ y 20 cm

$$\text{Diagonal} = 40 \cdot \sqrt{2} = 56.57 \text{ cm} = t$$

Tabla 7.17a Datos para en análisis
(Ejemplo 7.12)

A_{si}	d_i	x_i
5.06	7.070	21.22
10.12	28.29	0
5.06	49.50	21.22

$$A_c = a^2 \cdot 0.85 \cdot f'_c \dots 0.85 \cdot f'_c = 238 \text{ kg/cm}^2$$

$$x_c = 28.285 - 2 \cdot a/3$$

• $c = 32 \text{ cm}$

$$a = \frac{\beta_1}{0.85} \cdot c = 27.20 \text{ cm}$$

$$x_c = 10.152 \text{ cm} \dots A_c = 739.84 \text{ cm}^2$$

Tabla 7.17b Fuerzas y momentos
en el acero (Ejemplo 7.12)

c_i (cm)	f_i (kg/cm ²)	F_i (kg)	M_i (kg · m)
24.93	4200	21252	4509
3.715	731	7402	0
-17.5	-3445	-17433	3698

Σ	11220	8207
Concreto	176082	17876

$$\bar{P}_u = 11220 + 176082 = 187303 \text{ kg}$$

$$\bar{M}_u = 8207 + 17876 = 26083 \text{ kg · m}$$

$$e = \frac{26083 \cdot 100}{187303} = 13.92 \text{ cm}$$

$$e_x = e_y = \frac{e}{\sqrt{2}} = 9.84 \text{ cm}$$

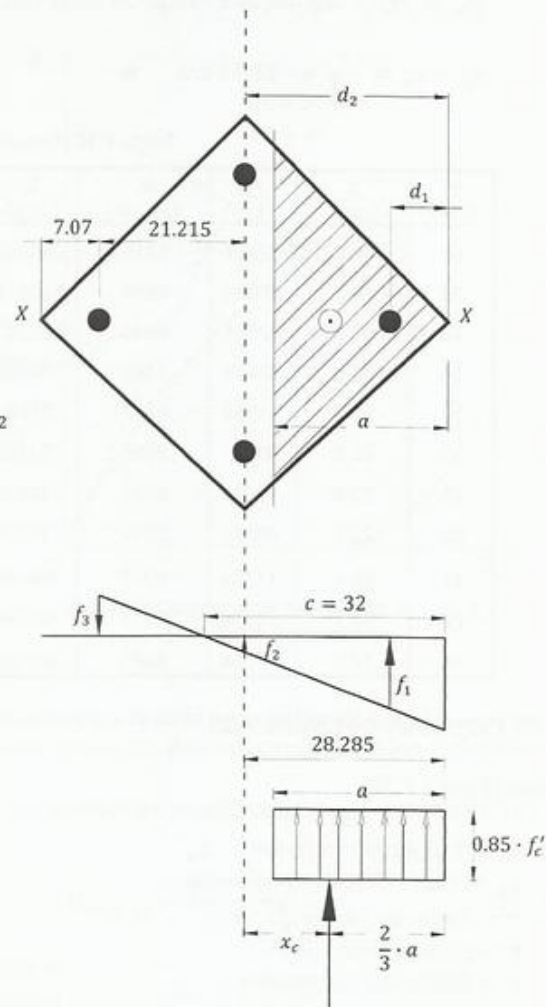


Fig. 7.30 Columna cuadrada con doble excentricidad
Fuerzas en el acero y en el concreto (Ejemplo 7.12)

- $c = 30 \text{ cm}$

$$a = 25.50 \text{ cm} \dots A_c = 650.25 \text{ cm}^2 \dots x_c = 11.285 \text{ cm}$$

$$C_c = 154760 \text{ kg} \dots M_c = 17465 \text{ kg} \dots F_s = 4176 \text{ kg}$$

$$M_s = 8905 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots \bar{P}_u = C_c + F_s = 158936 \text{ kg}$$

$$\bar{M}_u = M_c + M_s = 26370 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \therefore e = 16.60 \text{ cm}$$

$$e_x = e_y = \frac{e}{\sqrt{2}} = 11.73 \text{ cm} \quad \blacksquare$$

Tabla 7.18 Resumen de resultados del Ejemplo 7.12

c (cm)	a (cm)	F_s (kg)	M_s (kg · m)	C_c (kg)	M_c (kg · m)	\bar{P}_u (kg)	\bar{M}_u (kg · m)	e (cm)	$e_x = e_y$ (cm)
40	34.0	32354	6115	259562	16050	291915	22165	7.6	5.4
38	32.3	27904	6555	240610	16970	268515	23525	8.8	6.2
36	30.6	22961	7045	220283	17611	243244	24656	10.1	7.2
34	28.9	17436	7592	198580	17927	216016	25519	11.8	8.4
32	27.2	11220	8207	176082	17871	187302	26078	13.9	9.8
30	25.5	4176	8905	154760	17465	<u>158936</u>	<u>26369</u>	<u>16.6</u>	<u>11.7</u>
28	23.8	-649	9017	134813	16741	134164	25759	19.2	13.6
26	22.1	-5603	9017	116242	15753	110638	24770	22.4	15.8
24	20.4	-11383	9017	99046	14545	87663	23562	26.9	19.0
22	18.7	-18214	9017	83226	13165	65012	22182	34.1	24.1
20	17.0	-27054	8881	68782	11660	41728	20541	49.2	34.8

7.12 COLUMNAS ESBELTAS

Sean (Figura 7.31),

$$L_e = \text{Longitud efectiva} = k \cdot L_u$$

$$L_u = \text{Altura libre de la columna}$$

$$r = \text{Radio de giro} = \sqrt{I/A}$$

$$e = \text{Excentricidad de } P$$

$$y = \text{Deflexión por pandeo.}$$

a) ESBELTEZ

$$\text{Relación } \frac{L_e}{r}$$

- En columnas de esbeltez pequeña el valor del momento es,

$$M_u = P_u \cdot e$$

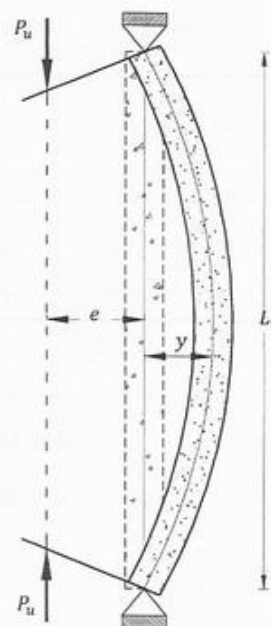


Fig. 7.31 Columnas esbeltas

- Las columnas “largas” de esbeltez grande (mayor que 22 por ejemplo), se pandean aumentando la acción del momento $M_1 = P_u \cdot y$ (momento secundario o de segundo orden). En total tenemos para una columna esbelta,

$$M' = \delta \cdot M_u = P_u \cdot (e + y) = \delta \cdot P_u \cdot e$$

De donde,

$$\delta = \frac{(e + y)}{e} = 1 + \frac{y}{e}$$

- Una columna corta sometida a la acción de una carga P que actúa con excentricidad e falla cuando la carga alcanza \bar{P}_u , o sea en el punto D de la recta OBD (Figura 7.32). No hay pandeo.
- Una columna larga donde la carga se aplica con una excentricidad inicial igual a la anterior, falla en el punto C de la curva OC .
- Si la esbeltez es demasiado grande la falla se producirá en C' . Para que esto no ocurra se limitará el valor de la esbeltez $L_e/r < 100$.
- En el método aproximado de cálculo que veremos aquí (A.C.I. 10.12 y 10.13), procederemos en la forma siguiente,

Las columnas esbeltas se diseñarán para resistir una carga P_u y momentos amplificados (M_{amp}), y su estimación depende de la libertad de desplazamiento del pórtico,

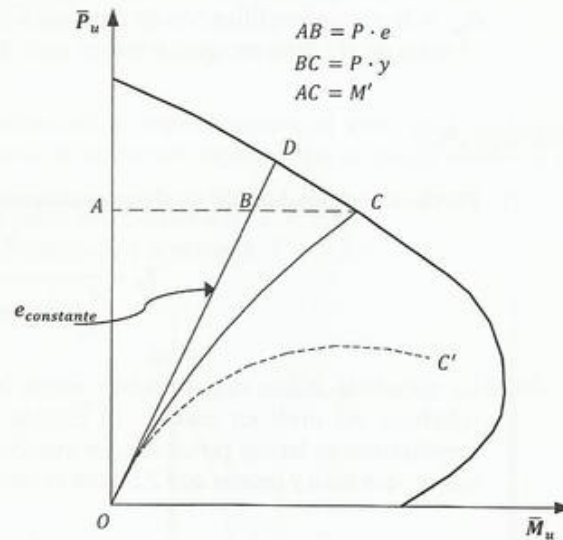


Fig. 7.32 Diagrama de interacción \bar{P}_u vs \bar{M}_u y el efecto de la esbeltez

i) En pórticos donde existe la posibilidad de desplazamiento lateral apreciable (los más comunes)

Los nodos de los extremos superiores de las columnas se pueden desplazar respecto a los inferiores

Los extremos de las columnas se diseñarán para los momentos amplificados siguientes (ACI 10.18 y 10.19),

$$M_{amp \downarrow s} = M_{\downarrow ns} + \delta_s \cdot M_{\downarrow s} \dots \dots \dots M_{amp \uparrow s} = M_{\uparrow ns} + \delta_s \cdot M_{\uparrow s} \quad [7.17]$$

$M_{amp \downarrow s}$ = Momento amplificado en el nodo inferior

$M_{amp \uparrow s}$ = Momento amplificado en el nodo superior

$M_{\downarrow ns}$ = Momento en el nodo inferior de la columna producido por cargas que no generan apreciable desplazamiento lateral

$M_{\uparrow ns}$ = Momento en el nodo superior de la columna producido por cargas que no generan apreciable desplazamiento lateral

$M_{\downarrow s}$ = Momento en el nodo inferior de la columna producido por cargas que sí producen desplazamientos lateral importantes

$M_{\uparrow s}$ = Momento en el nodo superior de la columna producido por cargas que sí producen desplazamientos lateral importantes

δ_s = Factor de amplificación de momentos en pórticos con desplazamientos laterales importantes

Los subíndices (ns) y (s) hacen referencia en inglés a los términos “nonsway” y “sway”, que en español corresponde a “sin desplazamiento” y “con desplazamiento”, respectivamente.

ii) En Pórticos con desplazamiento lateral despreciable (restringidos)

Por ejemplo aquellos edificios que poseen muros de corte o diagonales cuya rigidez lateral es mucho más grande que la de los pórticos en estudio, siempre y cuando el entrepiso los una al conjunto pórticos/muros o pórticos/diagonales y se cumpla la hipótesis de "diafragma rígido". En este caso el desplazamiento relativo entre los nodos superiores e inferiores de las columnas sería prácticamente nulo. La amplificación de momentos se hará con la Ecuación 7.18 (ACI 10.11),

$$M_{amp\ ns} = \delta_{ns} \cdot M_2 \quad [7.18]$$

M_2 = el más grande de los momentos en los extremos de la columna

δ_{ns} = factor de amplificación de momentos en pórticos con desplazamientos laterales despreciables.

El valor de M_2 debe ser igual o mayor que $M_{2\ min} = P_u \cdot \underbrace{(1.50 + 0.03 \cdot t)}_{cm}$ (ACI 318-08, 10.10.6.5)

b) VALOR DE δ

i) Pórticos con posibilidad de desplazamiento lateral apreciable (ACI 10.21),

$$\delta_s = \frac{1}{\left(1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \cdot \sum P_{cr(s)}}\right)} \geq 1 \quad [10.19]$$

La sumatoria indica que se deben sumar las cargas axiales y las críticas de pandeo de todas las columnas del nivel en estudio. El cálculo de P_{cr} se hará con los valores de k para pórticos con desplazamiento lateral permitido. La versión del 2005 del código 318 exigía que el valor de δ'_s fuese mayor que cero y menos que 2.5 para evitar las posibilidades de pandeo bajo cargas verticales,

$$\delta'_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_{u(ns)}}{0.75 \cdot \sum P_{cr(s)}}} \dots \dots \dots 0 < \delta'_s < 2.50$$

Es importante destacar que el valor de $\sum P_{u(ns)}$ corresponde al caso de carga más desfavorable bajo cargas verticales que generalmente corresponde a $(1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV)$

ii) Pórticos con desplazamiento lateral despreciable (ACI 10.12 y 10.16)),

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{\left(1 - \frac{P_u}{0.75 \cdot P_{cr(ns)}}\right)} \geq 1 \quad [7.20] \quad \dots \dots \dots C_m = 0.6 + 0.4 \cdot \left(\frac{M_1}{M_2}\right) \geq 0.4 \quad [7.21]$$

M_1 : El menor de los momentos en los extremos de la columna. La relación M_1/M_2 se tomará positiva si el miembro flexa en curvatura sencilla y negativa si se lo hace en curvatura doble (Figura 7.34). Si se cumple $M_{2\ min} > M_2 \rightarrow CM = 1$

El cálculo de P_{cr} se hará con los valores de k para pórticos con desplazamiento lateral impedido.

Se recomienda a los lectores interesados en profundizar el tema del comportamiento y diseño de columnas esbeltas consultar a MacGregor, Breen y Pfrang (1970) y el trabajo clásico de Yura (1971) sobre la longitud efectiva de columnas en pórticos con desplazamiento lateral apreciable, enfocado a estructuras de acero, pero que es conceptualmente extensible a las de concreto. En este trabajo se concluye que "El pandeo en pórticos con desplazamiento lateral apreciable es un fenómeno que involucra a un piso o nivel entero" y se enfatiza el concepto de columna dependiente. Es decir para que una columna falle por pandeo con desplazamiento en un nivel dado, deben pandear todas las columnas de ese nivel. Razón por la cual en el denominador de la Ecuación 10.19 aparece el símbolo de sumatoria (\sum) indicando que se consideran en el análisis por esbeltez todas las columnas del nivel en estudio.

c) VALOR DE $P_{crítico}$ (EULER)

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{(k \cdot L_u)^2} \quad [7.22] \quad \dots \quad EI = \frac{0.40 \cdot E_c \cdot I_g}{(1 + \beta_d)} \quad [7.23] \quad \dots \quad \beta_d = \left(\frac{P_{carga sostenida mayorada}}{P_{carga total mayorada}} \right)$$

En pórticos de edificios comerciales y residenciales con desplazamiento lateral restringido el valor de β_d es cercano a 0.70 – 0.80. En pórticos con desplazamiento lateral permitido cuando se verifique la combinación de sismo o viento se puede asumir $\beta_d = 0$. Observe que el valor de δ aumenta con el valor de P_u/P_{cr} . El término 0.40 y $(1 + \beta_d)$ refleja la reducción de la carga del pandeo debido al agrietamiento del concreto y a las cargas sostenidas.

d) LONGITUD EFECTIVA

En el caso de apoyos “ideales” como articulaciones o empotramientos el valor de k en la expresión $L_e = k \cdot L_u$ tenemos (distancia entre los puntos de inflexión) según el tipo de apoyo inferior y superior los siguientes valores de k (Figura 7.33),

Empotrado y libre $k = 2 \dots \dots \dots$ Empotrado y articulado $k = 0.7$

Articulado y articulado $k = 1 \dots \dots \dots$ Empotrado y articulado $k = 0.7$

Empotrado y empotrado $k = 0.57$

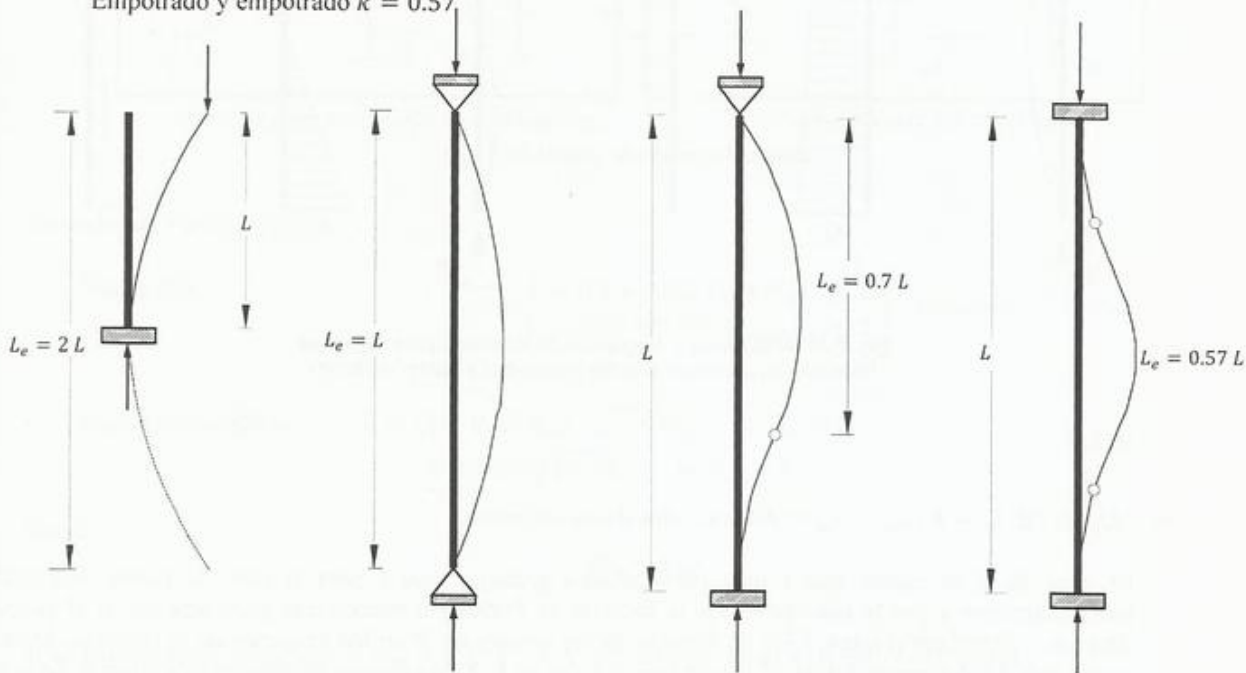


Fig. 7.33 Longitud Efectiva

En las estructuras reales formadas por vigas y columnas en pórticos o reticulados no es tan sencillo determinar el valor de k ya que se producen giros en los nodos y además estos pueden desplazarse. El incremento del momento debido al pandeo depende de (Figura 7.33),

- La rigidez de las vigas K_v : al aumentar disminuye la rotación de los extremos de las columnas y sus deflexiones.
- La rigidez de las columnas K_c : al aumentar disminuyen sus deflexiones, pero aumentan los momentos M_1 y M_2 y el valor de L_e .

- La forma de la elástica (Figura 7.34), si es de curvatura simple el valor de $P \cdot y$ en el centro de la columna se suma al promedio de los momentos $(M_1 + M_2)/2$. Si la elástica es de doble curvatura, el valor máximo de $P \cdot y$ (menor que el anterior) se suma a $\cong M_1/2$ ó a $\cong M_2/2$. (Ver Figura 7.33).
- El desplazamiento horizontal, que aumenta los valores de y e incrementa el momento debido al pandeo. Así ocurre en estructuras de nudos desplazables.
- El efecto de la fluencia del concreto, que aumenta con el tiempo de aplicación de las cargas permanentes y se toma en cuenta a través del coeficiente β_d .

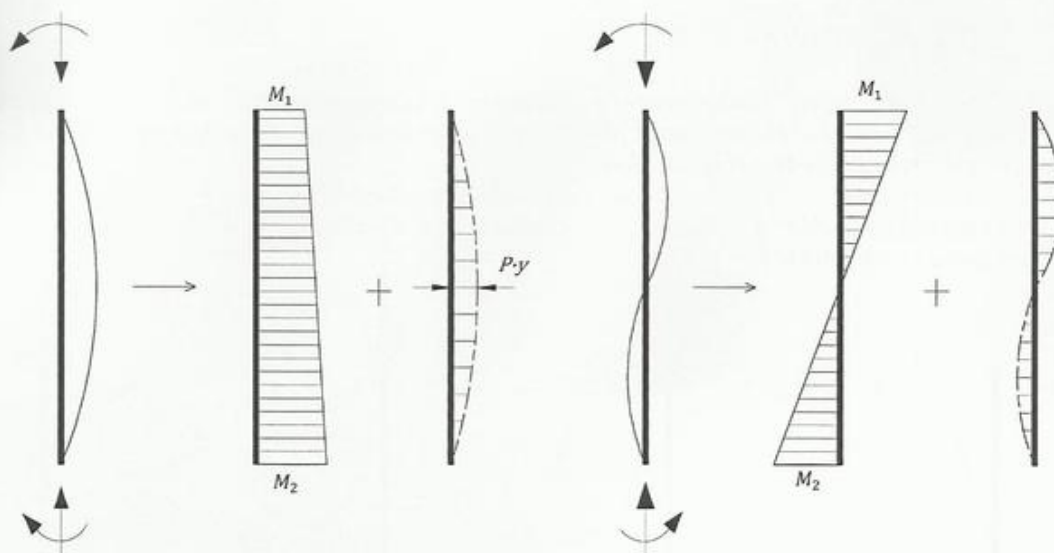


Fig. 7.34 Deflexiones y diagramas de momento para columnas flectando en curvatura sencilla (izquierda) y doble (derecha)

e) VALOR DE $L_e = k \cdot L_u \dots L_u = \text{Altura libre de la columna}$

El valor de k es menor que 1 para pórticos fijos y mayor que 1 para el caso de nudos desplazables horizontalmente y puede calcularse con la fórmula de *Furlong* ó encontrarse gráficamente en el ábaco de *Jackson – Moreland* (Figura 7.35) en función de los valores de Ψ en los extremos de la columna. Mientras mayor sea el valor promedio de Ψ mayor será el valor de k . Si la columna en estudio está unida al nodo a en su parte inferior y b en su parte superior, calcularemos $\Psi_{(a)}$ y $\Psi_{(b)}$ respectivamente,

$$\Psi_{(a \text{ ó } b)} = \frac{0.70 \cdot \sum \overbrace{\left(E_c \cdot I_g / L \right)_c}^{\text{columnas}}}{0.35 \cdot \sum \underbrace{\left(E_c \cdot I_g / L \right)_v}_{\text{vigas}}} \quad [7.24]$$

- El término del numerador es la sumatoria de $\sum (I_g/L)_c$ de todas las columnas que concurren al nodo.
- El término del denominador es la sumatoria de $\sum (I_g/L)_v$ de todas las columnas que concurren al nodo.
- La distancia L es medida de centro a centro de las juntas.

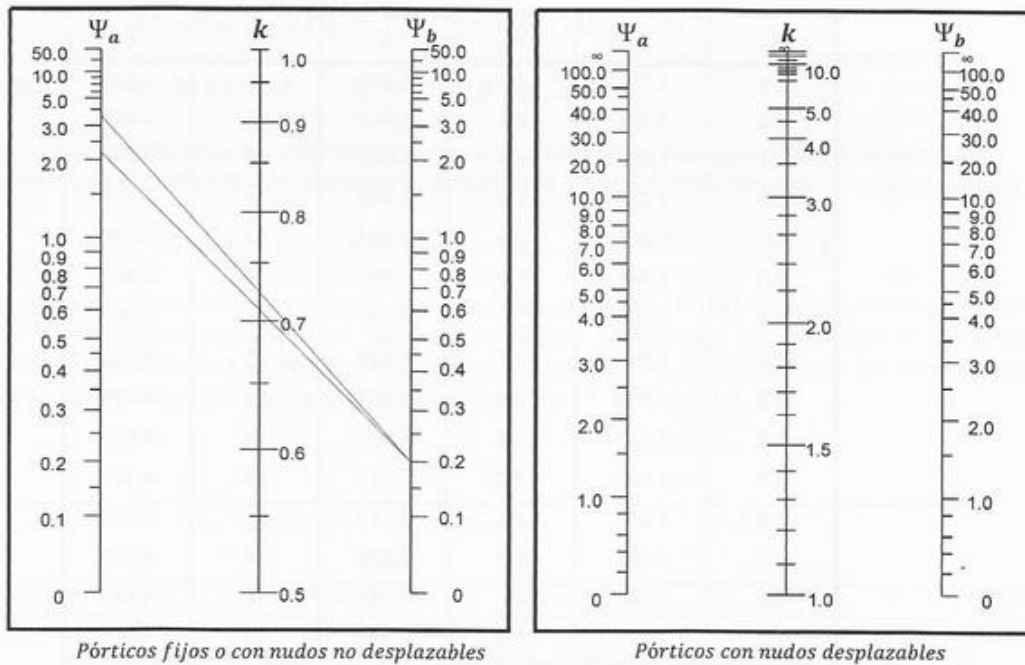


Fig. 7.35 Ábacos de Jackson-Moreland

Fórmulas de Furlong (1971).

- Nudos fijos,

$$\left. \begin{aligned} k &= 0.7 + 0.05(\Psi_a + \Psi_b) \leq 1 \\ k &= 0.85 + 0.05 \cdot \Psi_{\text{mínimo}} \leq 1 \end{aligned} \right\} \text{El menor} \quad [7.25a]$$
- Nudos desplazables,

$$\begin{aligned} k &= (1 - 0.05 \Psi_m) \cdot \sqrt{1 + \Psi_m} \quad \text{si } \Psi_m < 2 \\ k &= 0.9 \cdot \sqrt{1 + \Psi_m} \quad \text{si } \Psi_m \geq 2 \end{aligned} \quad [7.25b]$$

Donde,

$$\Psi_m = \frac{(\Psi_a + \Psi_b)}{2}$$

Si un extremo está articulado $k = 2 + 0.3 \cdot \Psi \rightarrow \Psi$ Es el valor en el extremo restringido

Valores de k para pórticos desplazables calculados por la Fórmula de Furlong se resumen en la Tabla 7.19. Valores grandes corresponden al caso de pisos inferiores de edificios altos donde se tienen columnas grandes. Valores pequeños de k se obtienen para pisos superiores. En extremos empotrados de tomará $\Psi = 0.2$. En extremos articulados se tomará $\Psi = 10$ en los ábacos. Los valores de k que se obtienen con la fórmula de Furlong (nudos desplazables) son casi iguales a los dados por el ábaco de Jackson - Moreland. Un poco mayores para Ψ pequeño y ligeramente menores para Ψ grande.

Tabla 7.19 Valores de k para pórticos desplazables calculados por la Fórmula de Furlong

ψ_m	k	ψ_m	k	ψ_m	k
0.5	1.194	2.0	1.559	8	2.700
0.6	1.227	2.2	1.610	9	2.846
0.7	1.258	2.4	1.660	10	2.985
0.8	1.288	2.6	1.708	11	3.118
0.9	1.316	2.8	1.754	12	3.245
1.0	1.344	3.0	1.800	13	3.367
1.1	1.369	3.2	1.844	14	3.486
1.2	1.394	3.4	1.888	15	3.600
1.3	1.418	3.6	1.930	16	3.711
1.4	1.441	3.8	1.972	18	3.923
1.5	1.463	4.0	2.012	20	4.124
1.6	1.483	4.5	2.111	22	4.316
1.7	1.503	5.0	2.205	24	4.500
1.8	1.523	6.0	2.381	26	4.677
1.9	1.541	7.0	2.546	30	5.011

f) COLUMNAS QUE REQUIEREN CORRECCIÓN POR ESBELTEZ

Según las normas ACI 318-08, en edificios de nudos desplazables debe tomarse en cuenta el efecto del pandeo cuando (ACI 10.6),

$$\frac{L_e}{r} > 22 \quad [7.26a]$$

En el caso de estructuras con nudos no desplazables, el efecto del pandeo debe tomarse en cuenta si (ACI 10.7),

$$\frac{L_e}{r} > \underbrace{34 - 12 \cdot \frac{M_1}{M_2}}_{\text{debe asumirse } \leq 40} \quad [7.26b]$$

M_1/M_2 es positivo si el miembro se flexa en curvatura sencilla y negativo si la flexión es en curvatura doble.

g) SIMPLIFICACIONES

Si definimos el radio de giro para columnas rectangulares... $r = 0.3 \cdot t$, $k \geq 1.20$. Por otro lado si tomamos como mínimo una altura de entrepiso $L_u = 2.20 \text{ m}$... $L_e = k \cdot L_u = 220 \cdot k$

$$\rightarrow \frac{L_e}{r} = 22 \text{ nos viene } \dots r = 0.3 \cdot t = \frac{220 \cdot k}{22} = 10 \cdot k \dots t = 33.33 \cdot k = 100 \cdot k/3$$

Y si t es menor que este valor es necesario considerar el pandeo. Tabulando esta expresión obtenemos (aproximando por exceso, Tabla 7.20).

Tabla 7.20 Valores mínimos de t en cm requeridos para ignorar los efectos de esbeltez para $L_u = 2.20 \text{ m}$

k	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	2	2.4	2.7
t	40	45	50	50	55	60	60	70	80	90

EJEMPLO 7.13

Diseñar las columnas del pórtico de la Figura 7.36. Datos (ver Tabla 7.21).

Columnas interiores: $40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$... exteriores: $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$... $r = 0.30 \cdot t = 9 \text{ cm}$
 $\beta_d = 0.80$... $f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$... $E_c = 2.0 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Se analizarán dos casos de edificios distintos pero con el mismo pórtico para comparar resultados,

- a) Asumir que el pórtico puede desplazarse lateralmente (*Sway*). Combinaciones de carga a estudiar,

$$1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV \text{ (ns)} \dots y \dots 1.2 \cdot CM + CV \pm S \text{ (s)}$$

- b) Asumir que el pórtico forma parte de una estructura que contiene muros de corte en el perímetro por lo que el desplazamiento lateral de este está restringido (*Nonsway*). En este caso la combinación las fuerzas laterales inducidas por el sismo serán resistidas casi en su totalidad por los muros perimetrales por lo que el diseño del pórtico quedará dominado por, $1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV$.

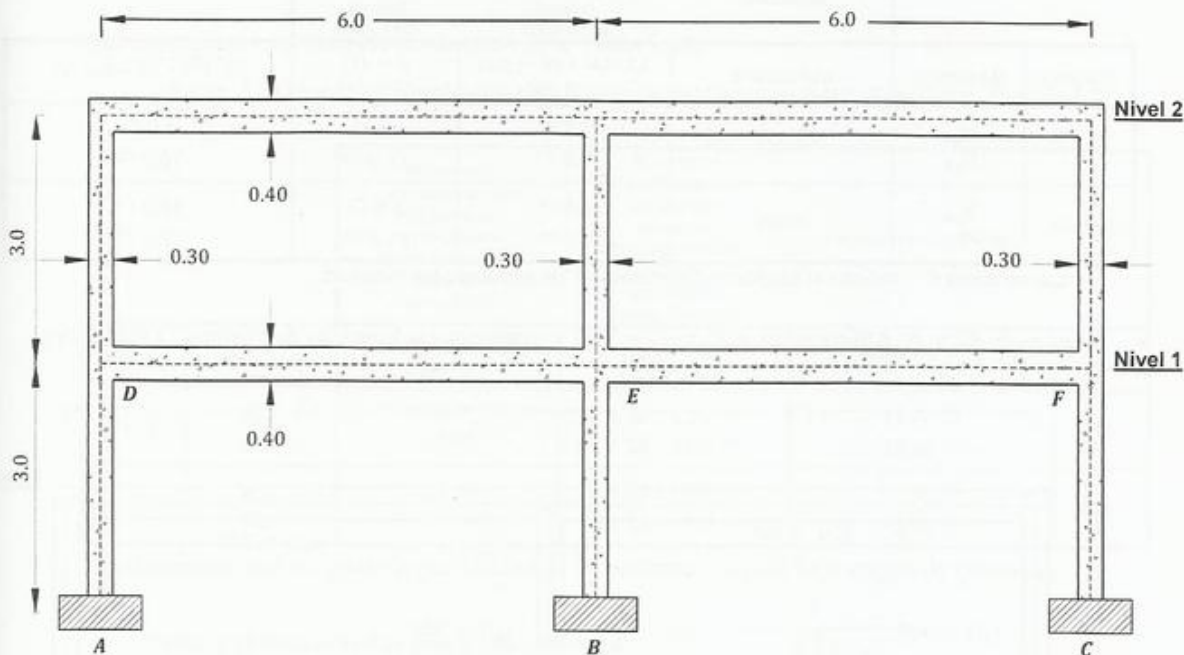


Fig. 7.36 Pórtico del Ejemplo 7.9

Columna A – D

$1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV \text{ (ns)} \dots \text{casos (a) y (b)}$

$$P_u = 30 \text{ ton} \dots M_{uA \text{ (ns)}} = 2 \text{ ton} \cdot \text{m} \dots M_{uD \text{ (ns)}} = 6 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$1.2 \cdot CM + CV \pm S \text{ (s)} \dots \text{solo para caso (a)}$

$$P_u = 35 \text{ ton} \dots M_{uA \text{ (s)}} = 10 \text{ ton} \cdot \text{m} \dots M_{uD \text{ (s)}} = 12 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Columna B – E

$1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV \text{ (ns)} \dots \text{casos (a) y (b)}$

$$P_u = 70 \text{ ton} \dots M_{uB \text{ (ns)}} = 2 \text{ ton} \cdot \text{m} \dots M_{uE \text{ (ns)}} = 1 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$1.2 \cdot CM + CV \pm S \text{ (s)} \dots \text{solo para caso (b)}$

$$P_u = 65 \text{ ton} \dots M_{uB \text{ (s)}} = 9 \text{ ton} \cdot \text{m} \dots M_{uE \text{ (s)}} = 10 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Tabla. 7.21 Rigideces relativas para el pórtico del Ejemplo 7.14

Miembro	b (cm)	h ó t (cm)	I_g (cm ⁴)	$E_c \cdot I_g$ (kg · cm ²)	L (cm)	I_g/L (cm ³)	A (cm ²)	r = 0.3 · t (cm)
Columna BE	40	30	90000	$1.80 \cdot 10^{10}$	300	300	1200	9
Columna AD	30	30	67500	$1.35 \cdot 10^{10}$	300	225	900	9
Vigas	30	40	160000	$3.20 \cdot 10^{10}$	600	267	1000	12

a) El pórtico puede desplazarse lateralmente (Sway). Combinaciones de carga a estudiar,

$$1.2 \cdot CM + CV \pm S (s)$$

Preliminarmente asumiremos $k = 1.20$ para verificar si necesitamos considerar los efectos de esbeltez (Ecuación 7.26a),

$$L_u = 260 \text{ cm} \dots \dots L_e = 1.2 \cdot L_u = 312 \text{ cm} \dots \dots \frac{L_e}{r} = 34.70 > 22 \therefore \text{considerar efectos de esbeltez}$$

Los momentos debidos a la combinación de carga $1.2 \cdot CM + CV \pm S (s)$ se pueden descomponer según se muestra en la Tabla 7.22.

Tabla. 7.22 Momentos debidos a $1.2 \cdot CM + CV \pm S (s)$ del Ejemplo 7.13

Columna	Momentos	Curvatura	Cargas que no producen desplazamiento lateral apreciable	Momentos resultantes de cargas que no producen desplazamiento lateral apreciable	Momentos resultantes de cargas que producen desplazamiento lateral apreciable
				$1.2 \cdot CM + CV \rightarrow (ns)$ (ton · m)	$S \rightarrow (s)$ (ton · m)
B - E	M_{uB}	doble		0.5 ↷	9.5 ↷
	M_{uE}			1.0 ↷	11.0 ↷
A - D	M_{uA}	doble		0.5 ↷	9.5 ↷
	M_{uD}			1.0 ↷	11.0 ↷

Los vectores ↷ indican el sentido del momento en los extremos del miembro

- Valores de Ψ y k . Aplicaremos la Ecuación 7.23 y usaremos las fórmulas de Furlong (Tabla 7.19).

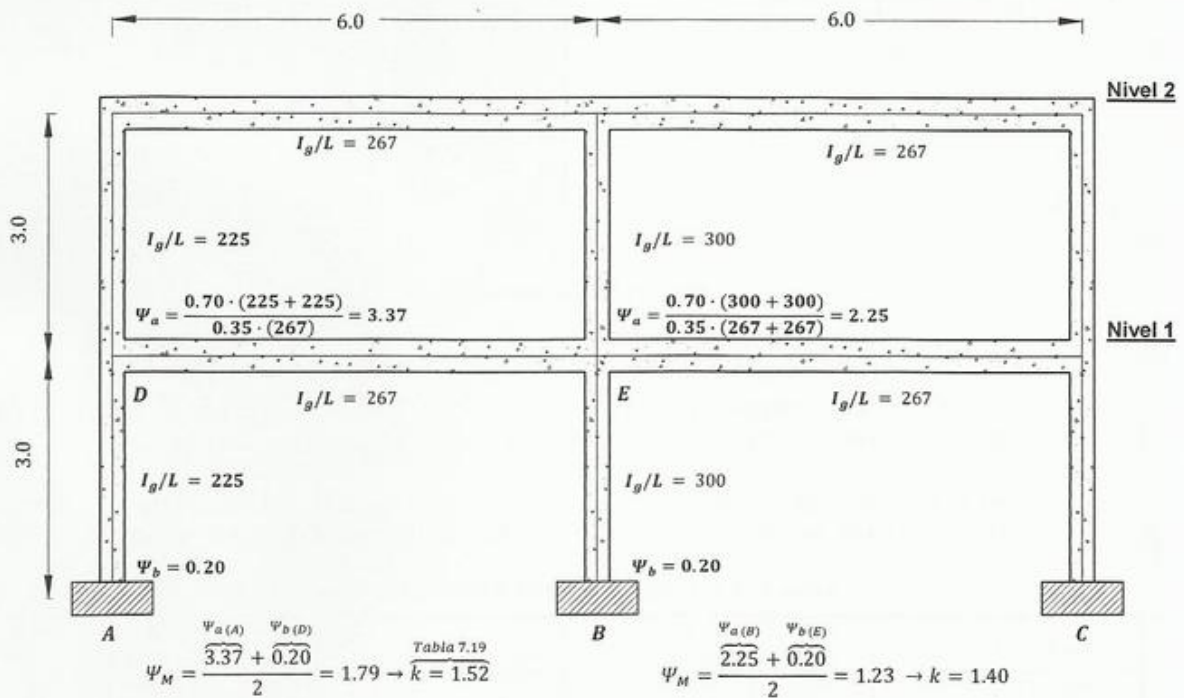


Fig. 7.37 Cálculo de k para las columnas del piso inferior (Ejemplo 7.14)

- Cargas críticas de pandeo. Ecuación 7.22 (Tabla 7.23).

Tabla. 7.23 Cargas críticas de pandeo (k calculado para pórticos desplazables)

Columna	$E_c \cdot I_g$ ($kg \cdot cm^2$)	$EI = \frac{0.40 \cdot E_c \cdot I_g}{1 + \beta_d}$ ($kg \cdot cm^2$)	k	L_u (cm)	$P_{cr(s)} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L_u)^2}$ (ton)	P_u (s) (ton)
BE	$1.80 \cdot 10^{10}$	$4.00 \cdot 10^9$	1.40	260	$\cong 300$	65
AD	$1.35 \cdot 10^{10}$	$3.00 \cdot 10^9$	1.52	260	$\cong 190$	35
CF	$1.35 \cdot 10^{10}$	$3.00 \cdot 10^9$	1.52	260	$\cong 190$	35
Σ					680	135

- El factor de amplificación de momentos viene dado por (Ecuación 7.19),

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_{u(s)}}{0.75 \cdot \Sigma P_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{135}{0.75 \cdot 680}} = 1.36$$

- Los momentos amplificados se resumen en la Tabla 7.24,

Tabla. 7.24 Momentos amplificados para el caso de desplazamiento lateral permitido. Ejemplo 7.13

Columna	Momentos	Momentos resultantes de cargas que no producen desplazamiento lateral apreciable $1.2 \cdot CM + CV \rightarrow$ (ns) (ton · m)	Momentos resultantes de cargas que producen desplazamiento lateral apreciable (amplificados) $\delta_s \cdot S \rightarrow$ (s) (ton · m)	Momentos de diseño $\frac{ns}{1.2 \cdot CM + CV} + \frac{s}{\delta_s \cdot S} \rightarrow$ (s) (ton · m)	Carga axial P_u (ton)
B - E	M_{uB} M_{uE}	0.5 ~ 1.0 ~	$1.36 \cdot 9.50 \sim$ $1.36 \cdot 11.0 \sim$	12.42 ~ <u>13.96</u> ~	65
A - D	M_{uA} M_{uD}	0.5 ~ 1.0 ~	$1.36 \cdot 9.50 \sim$ $1.36 \cdot 11.0 \sim$	13.42 ~ <u>15.96</u> ~	35

- Verificaremos que no exista la posibilidad de mecanismos de piso bajo cargas de gravedad,

Tabla. 7.25 Cargas axiales para el caso de carga $1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV$. Ejemplo 7.13

Columna	P_u (ns) (ton)	P_{cr} (s)
BE	70	
AD	30	
CF	30	
Σ	130	680

$$\delta'_s = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_{u(ns)}}{0.75 \cdot \Sigma P_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{130}{0.75 \cdot 680}} = 1.34$$

$$0 < \delta'_s < 2 \dots \dots O.K$$

- El diseño de la columna se hará con los diagramas adimensionales del Apéndice B, tomando el mayor de los momentos en los nodos de las columnas (Tabla 7.26),

Tabla. 7.26 Momentos de diseño en columnas y cuantías de acero requeridas

Columna	Momentos de diseño M_{amp}	b (cm)	$h = t$ (cm)	Carga axial	$N = \frac{P_u}{f'_c \cdot b \cdot t}$	$M = \frac{M_u}{f'_c \cdot b \cdot t^2}$	Columna
B - E	<u>13.96</u> ~	40	30	65	0.23	0.16	C2 $\rho = 2\%$
A - D = C - F	<u>15.96</u> ~	30	30	35	0.12	0.25	C1 $\rho > 3\%$

Observación

Las columnas externas, aunque con carga axial baja requieren más del 3.0% en acero principal, lo que consideramos excesivo. Sería prudente rediseñar la estructura en estudio y aumentar las dimensiones de las columnas y quizá de las vigas para buscar un diseño con cuantías inferiores al 2.5%.

b) Asumir que el pórtico no puede desplazarse lateralmente $\rightarrow 1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV$ (ns)

Los momentos debidos a la combinación de carga se resumen en la Tabla 7.27,

Tabla. 7.27 Momentos para el caso de desplazamiento lateral impedido. Ejemplo 7.13

Columna	Curvatura	Momentos	$1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV \rightarrow (ns)$ (ton · m)	P_u (ton)
B - E	doble	M_{uB} M_{uE}	0.5 ~ 1.0 ~	30
A - D	doble	M_{uA} M_{uD}	0.5 ~ 1.0 ~	70

- Verificaremos si es necesario considerar los efectos de esbeltez,

$$L_u = 260 \text{ cm} \dots = 1.0 \cdot L_u = 260 \text{ cm} \dots r = 9 \text{ cm} \dots \frac{L_e}{r} = \frac{260}{9} = 28.88$$

$$\text{limite para } \frac{L_e}{r} \text{ para ignorar la esbeltez es: } 34 - 12 \cdot \frac{M_1}{M_2} \dots 34 - 12 \cdot \frac{0.5}{1.0} = 28$$

$$28.88 > 28.00 \therefore \text{considerar esbeltez}$$

- Calcularemos el valor de k para pórticos arriostrados con los ábacos de Jackson-Moreland, (Figura 7.34),

$$\begin{aligned} \text{Columna AD} = CF &\rightarrow \Psi_b = 0.2 \dots \Psi_a = 3.37 \rightarrow k = 0.73 \\ \text{Columna BE} &\rightarrow \Psi_b = 0.2 \dots \Psi_a = 2.25 \rightarrow k = 0.71 \end{aligned}$$

- Estimaremos el valor de CM con la Ecuación (7.21). Los cálculos se resumen en la Tabla 7.28

Tabla. 7.28 Cálculo del factor CM . Ejemplo 7.13

Columna	M_1	M_2	curvatura	$CM = 0.6 \pm 0.4 \cdot \frac{M_1}{M_2}$
B - E	0.5 ~	1.0 ~	doble	0.80
A - D = C - F	0.5 ~	1.0 ~	doble	0.80

- Los factores de amplificación calculados con la Ecuación 7.20 se resumen la Tabla (7.29)

Tabla. 7.29 Cálculo del factor δ_{ns} . El valor de k es estimado para pórticos con desplazamiento lateral impedido Ejemplo 7.13

Columna	EI (kg · cm ²)	k	L_u (cm)	$P_{cr(ns)} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L_u)^2}$ (ton)	P_u (ns) (ton)	CM	$\delta_{ns} = \frac{CM}{1 - \frac{P_u}{0.75 \cdot P_{cr}}} \geq 1$
BE	$4.00 \cdot 10^9$	0.71	260	$\cong 1158$	70	0.8	$0.87 \rightarrow 1.00$
AD	$3.00 \cdot 10^9$	0.73	260	$\cong 822$	30	0.8	$0.84 \rightarrow 1.00$
CF	$3.00 \cdot 10^9$	0.73	260	$\cong 822$	30	0.8	$0.84 \rightarrow 1.00$

Todos los factores encontrados son igual a la unidad por lo que no hará falta amplificar los momentos.

- El momento de diseño mínimo permitido viene dado por $M_{2min} = P_u \cdot (1.50 + 0.03 \cdot t)$

$$\rightarrow M_{2min(BE)} = 70 \cdot (1.50 + 0.03 \cdot 30) \cdot \frac{1}{100} = \frac{domina}{1.68 \text{ ton} \cdot m} > 1.00 \text{ ton} \cdot m$$

$$\rightarrow M_{2min(AD)} = 30 \cdot (1.50 + 0.03 \cdot 30) \cdot \frac{1}{100} = 0.72 \text{ ton} \cdot m < \underline{1.00 \text{ ton} \cdot m}$$

- En la Tabla 7.30 se resumen los momentos de diseño para el caso de desplazamiento lateral impedido y diseño de las columnas con ayuda del Apéndice F.

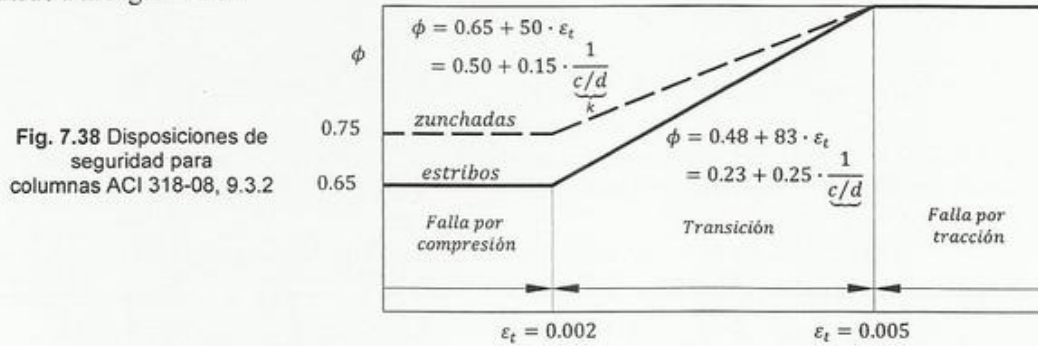
Tabla. 7.30 Cálculo de los momentos amplificados y diseño de las columnas para el caso de desplazamiento lateral restringido. Ejemplo 7.14

Columna	Momentos de diseño $M_{amp} = \delta_{ns} \cdot M_2$	b (cm)	$h = t$ (cm)	Carga axial	$N = \frac{P_u}{f'_c \cdot b \cdot t}$	$M = \frac{M_u}{f'_c \cdot b \cdot t^2}$	Columna
B - E	1.68	40	30	70	0.24	0.02	C2 $\rho = 1\%$
A - D = C - F	1.00	30	30	30	0.14	0.02	C1 $\rho = 1\%$

■

7.13 DISPOSICIONES DE SEGURIDAD PARA COLUMNAS

El factor ϕ lo calcularemos dependiendo de la deformación unitaria en la fila de acero más traccionada de acuerdo a la Figura 7.38.

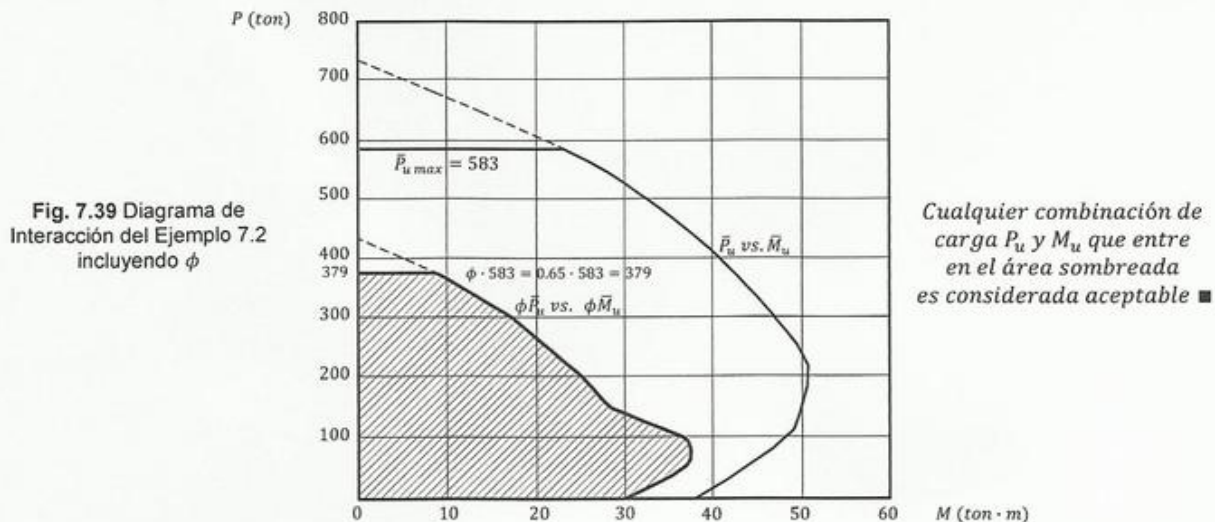


Para mayor información sobre los factores ϕ y su obtención consultar a Mast (1992) y Nowak y Szerszen (2001).

EJEMPLO 7.15 Construir el diagrama de interacción usando los factores ϕ para la columna del Ejemplo 7.2. Los resultados se sintetizan en la Tabla 7.21.

Tabla 7.31 Cálculo del factor ϕ para la columna del Ejemplo 7.2

c (cm)	ϵ_t	ϕ	\bar{P}_u (ton)	\bar{M}_u (ton · m)	$\phi \cdot \bar{P}_u$ (ton)	$\phi \cdot \bar{M}_u$ (ton · m)
40	-0.0004	0.65	578.9	23.51	376.3	15.3
35	0.0000	0.65	502.1	32.16	326.4	20.9
30	0.0005	0.65	417.1	39.43	271.1	25.6
25	0.0012	0.65	318.9	45.8	207.3	29.8
22	0.0018	0.65	249.9	49.58	162.4	32.2
21	0.0020	0.65	224.5	50.9	145.9	33.1
20	0.0023	0.67	208.1	50.7	138.8	33.8
18	0.0028	0.72	173.3	50.08	123.9	35.8
16	0.0036	0.78	135	49.14	104.7	38.1
15	0.0040	0.81	114.1	48.56	92.6	39.4
12	0.0058	0.90	56.6	43.54	50.9	39.2
9.64	0.0079	0.90	0	38	0.0	34.2



8.1 DEFINICIÓN

Esfuerzo cortante v es aquel que actúa en el plano de la sección transversal tratando de desplazarla con relación a las secciones próximas a ella. Puede presentarse solo (corte puro), pero casi siempre acompañado por flexión o torsión, con o sin fuerza axial. El concreto resiste esfuerzos de corte puro que pueden alcanzar $0.30 \cdot f'_c$.

8.2 CORTE POR FLEXIÓN EN VIGAS NO AGRIETADAS

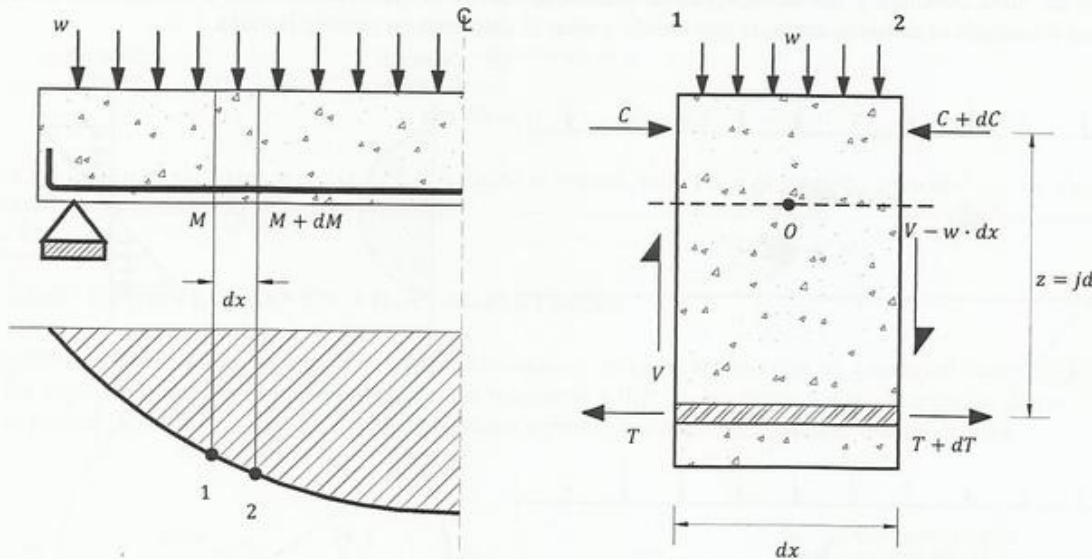


Fig. 8.1 Corte en vigas no agrietadas

Consideremos una viga simplemente apoyada sometida a carga uniforme w con sección transversal de ancho b_w y altura útil d (Figura 8.1) En las secciones 1 y 2 distantes dx se tiene,

Sección 1 → momento M	$C = T$	Corte: V
Sección 2 → momento $M + dM$	$C + dC = T + dT$	Corte: $V - w \cdot dx$

Tomando momentos con relación al centro O y siendo z el brazo de palanca del par resistente, tenemos,

$$V \cdot dx = dM = dT \cdot z \dots (a)$$

Y por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$dT = v \cdot (b_w \cdot dx) \dots (b)$$

Donde $b_w \cdot dx$ es el área donde actúa v . Sustituyendo (b) en (a),

$$V \cdot dx = v \cdot b_w \cdot dx \cdot z \quad \therefore \quad v = \frac{V}{(b_w \cdot z)}$$

Y siendo

$$z = j_d \cong d \quad \text{nos viene} \quad v = \frac{V}{(b_w \cdot j_d)} \cong \frac{V}{(b_w \cdot d)}$$

En esta ecuación v es el esfuerzo cortante unitario en la sección de ancho b_w y altura útil d donde actúa un corte total exterior igual a V . También puede obtenerse utilizando la ecuación general del corte:

$$v = \frac{V \cdot Q}{(b_w \cdot I)} \quad \frac{I}{Q} = z \rightarrow v = \frac{V}{(b_w \cdot z)}$$

Donde I es el momento inercia de la viga y Q el momento estático respecto al baricentro de la sección.

Observaciones

En la ecuación (a) se desprecia el término de segundo orden $w \cdot dx \cdot dx/2 \rightarrow 0$.

Las normas utilizan la ecuación $v = V/(b_w \cdot d)$ para calcular el corte en vigas, losas, etc.

En el caso de una viga homogénea las trayectorias de los esfuerzos principales aparecen en la Figura 8.2. Las de tracción en línea continua y las de compresión punteada, cruzan el eje neutro a 45° . Supondremos tracciones positivas y también el esfuerzo cortante que tiende a rotar el elemento en sentido horario.

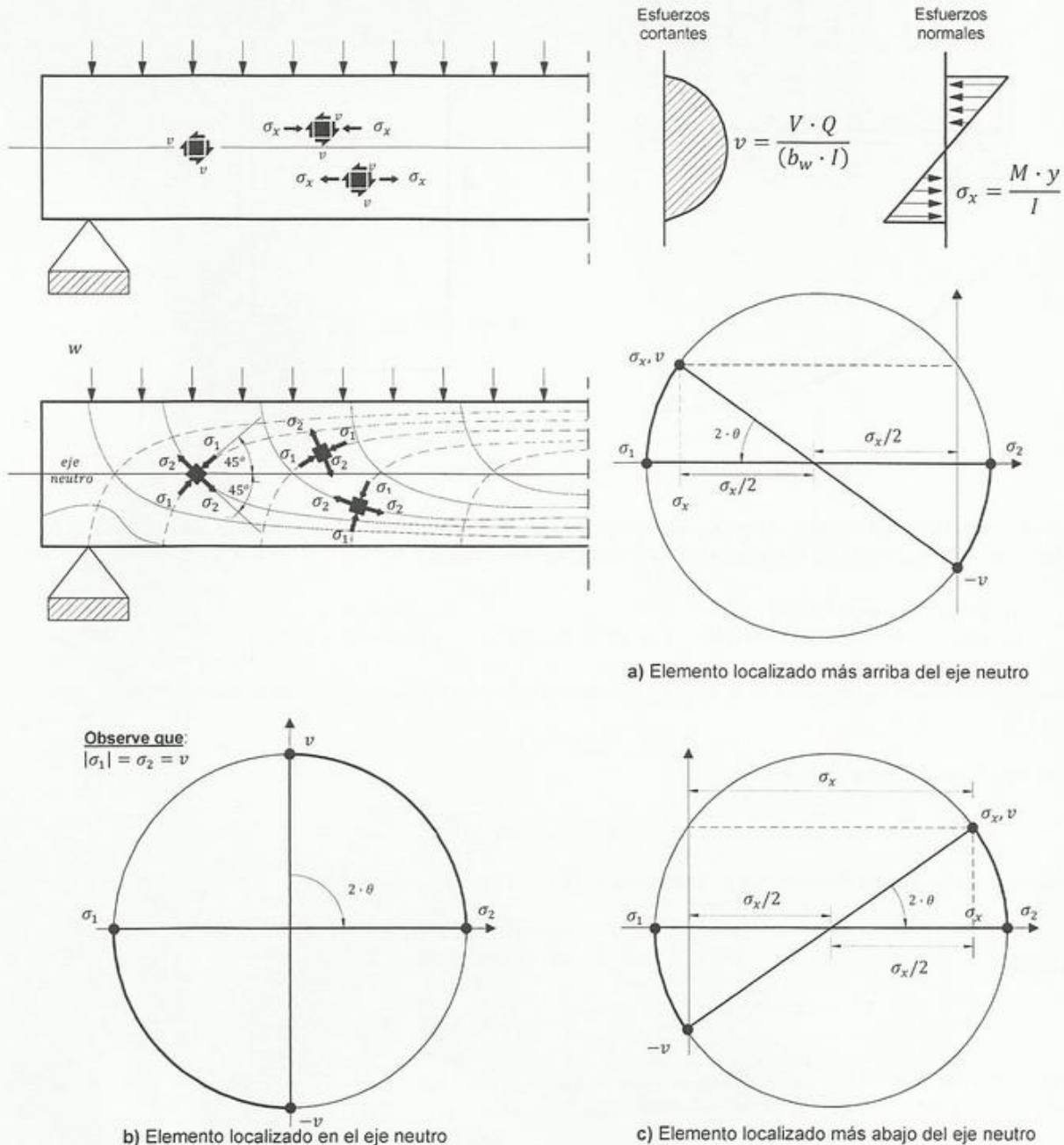


Fig. 8.2 Trayectorias principales de esfuerzos en vigas no agrietadas

En el elemento localizado más arriba del eje neutro la inclinación de los ejes principales sobre los cuales actúan σ_1 y σ_2 con corte igual a cero viene dada por (círculo de Mohr, Figura 8.2a),

$$\tan 2\theta = \frac{v}{\sigma_x/2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + v^2} \dots \dots (a)$$

En el eje neutro por definición se tiene $\sigma_x = 0$ y sustituyendo en (a) (Figura 8.2c)

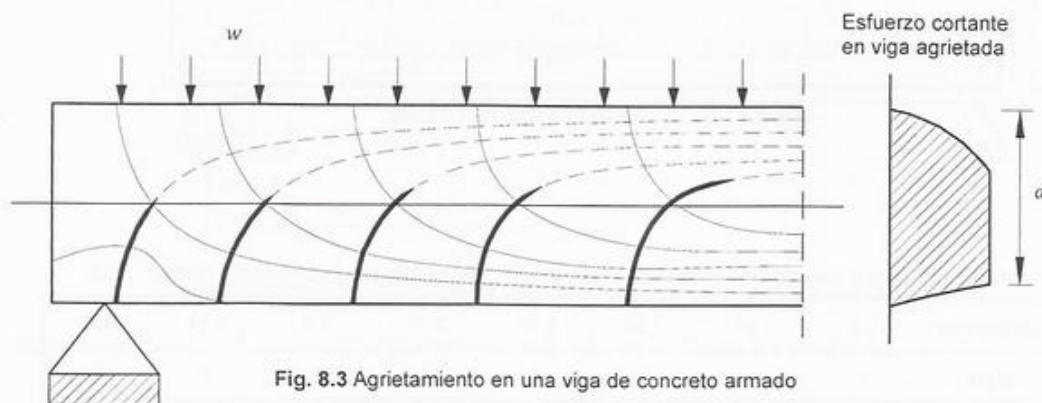
$$\sigma_2 = -\sigma_1 = v$$

$$\tan 2\theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = 45^\circ$$

En el eje neutro el esfuerzo de corte es igual (tiene el mismo valor) que la tracción principal σ_2 . Se dice que el **esfuerzo cortante mide la tracción diagonal**.

8.3 CORTE POR FLEXION EN VIGAS AGRIETADAS

El agrietamiento se inicia cuando el esfuerzo principal σ_2 es igual al esfuerzo de rotura del concreto a tracción f_{tr} . En vigas de concreto armado las grietas se producen a 90° de las trayectorias principales de tracción (las líneas punteadas en la Figura 8.3), iniciándose abajo y propagándose verticalmente. Dichas grietas,



- Disminuyen la capacidad resistente del concreto a compresión y a corte ya que al subir reducen la zona comprimida.
- Aumentan la tracción en el acero longitudinal en el punto donde se inician. (Sección 8.4a)

En las vigas de concreto armado el esfuerzo cortante varía como se indica en la Figura 8.3. Es nulo en los extremos y máximo en el eje neutro y en la zona de tracción es constante e igual al máximo, ya que asumimos que toda la tracción la resiste el acero.

En la zona de compresión σ_1 disminuye con el aumento del esfuerzo de compresión por flexión (σ_x). En la zona de tracción, donde el concreto no se ha agrietado, σ_1 aumenta con el valor de σ_x .

- En las secciones donde V/M es grande (en los apoyos extremos de vigas simplemente apoyadas) las grietas se inician abajo y son producidas por la tracción diagonal.

- En las secciones donde V/M es pequeño (en el tramo) las grietas se inician a nivel del acero a tracción, a causa de la tracción debida a la flexión y se desplazan hacia arriba, disminuyendo la sección útil $b_w \cdot d$ de concreto y debilitando su resistencia. Las grietas se inician verticalmente y se inclinan al acercarse al eje neutro, el cual cruzan a 45 grados, hasta ser detenidas en la zona de compresión.

8.4 COMPORTAMIENTO DE VIGAS SIN REFUERZO TRANSVERSAL

Viga sin armadura a corte (Figura 8.4). Siendo,

P_a = Carga que produce el agrietamiento
 P_u = Carga última que produce la falla
 a = Luz de corte

$$\text{Corte} \rightarrow V = P \text{ entre el apoyo y } P \quad V = 0 \text{ entre cargas}$$

$$M_{\max} \rightarrow M = P \cdot a = V \cdot a \therefore a = \frac{M}{V} \quad \text{y} \quad \frac{a}{d} = \frac{M}{V \cdot d}$$

Ensayos realizados por Leonhardt y Walther (1962) en vigas con acero de tracción sin armadura transversal bajo la acción de dos cargas P separadas 36 cm y con las siguientes características,

$$b_w = 19 \text{ cm} \dots d = 27 \text{ cm} \dots h = 32 \text{ cm}$$

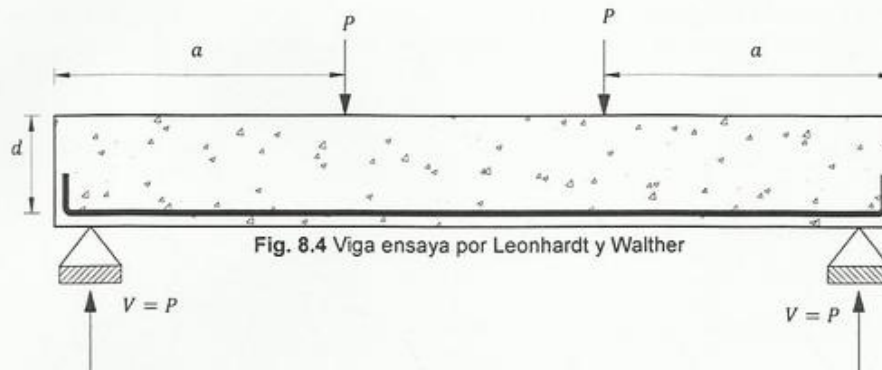


Fig. 8.4 Viga ensaya por Leonhardt y Walther

Tabla 8.1 Características de los ensayos en viga sin refuerzo transversal (Leonhardt y Walther 1962)

Luces (m)	0.9	1.44	1.98	2.52	3.06	3.6	4.14	4.68
a/d	1	2	3	4	5	6	7	8

Arrojaron los resultados siguientes,

- La carga P_a que produce el inicio del agrietamiento varía muy poco con a/d . Es casi constante.
- El valor de P_a obtenido en los ensayos es un poco menor que el calculado por la teoría elástica.
- La carga que produce la rotura o falla final P_u puede ser igual a P_a y hasta vez y media mayor.
- El valor de P_a aumenta con la resistencia del concreto a la tracción (f_{tr}) y con el porcentaje de acero de tracción. Los valores a/d y b/d al aumentar ocasionan un pequeño aumento de P_a .
- Para valores de a/d comprendidos entre 3 y 7 puede ocurrir que $P_a = P_u$ produciéndose una grieta que atraviesa diagonalmente toda la altura de la viga. En este caso tenemos la llamada falla por tracción diagonal.

- Otras veces la grieta iniciada por P_a sube y penetra hasta detenerse en el eje neutro dejando sana una parte del concreto de la zona comprimida. Así la viga es capaz de resistir, a través de un mecanismo nuevo, un incremento de carga hasta llegar a P_u . Este caso se produce para valores pequeños de a/d cercanos a 3. Otras grietas se forman antes de producirse la falla final. Entre ellas hay especies de voladizos empotrados en la zona de compresión de la parte superior, unidos abajo en el extremo libre por el acero.

En el caso de P_u mayor que P_a la rotura puede producirse,

- Por falla del concreto en la zona comprimida, la cual se reduce al subir la grieta aumentando los esfuerzos en el concreto comprimido hasta que se produce el aplastamiento. Es la falla de compresión por corte. Ocurre para valores de a/d comprendidos entre 3 y 7.
- Cuando se destruye la adherencia entre el acero y el concreto y se produce una compresión diagonal capaz de transmitir la carga P desde a hasta el apoyo (si hay buen anclaje del acero longitudinal). Esta falla de adherencia por corte ocurre para $a/d < 2$. (información adicional es presentada en ASCE-ACI 426, 1973).

a) MECANISMO RESISTENTE DESPUÉS DEL AGRIETAMIENTO INICIAL

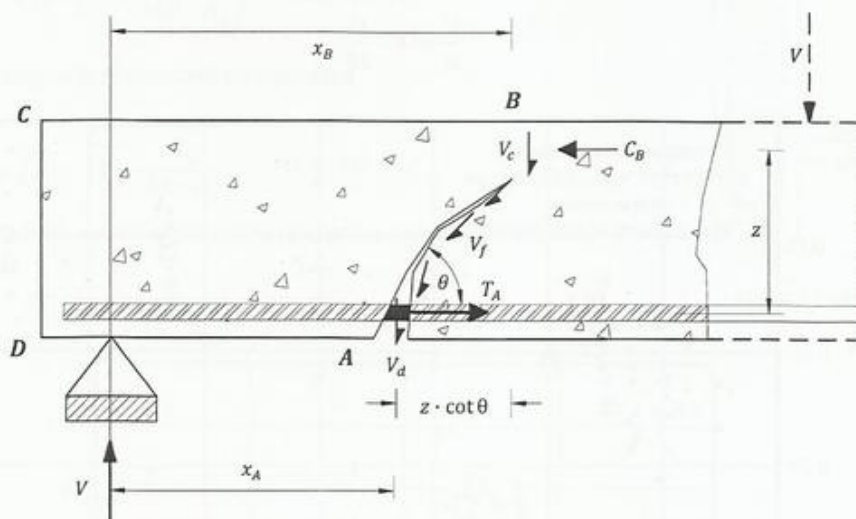


Fig. 8.5 Mecanismos resistentes al corte en vigas sin refuerzo transversal (sin estribos)

La diferencia entre P_u y P_a la resiste el mecanismo indicado en la Figura 8.5 mediante,

V_c = Corte resistido por el concreto sano de la parte superior.

V_f = Componente vertical de la fricción entre las caras de la grieta.

V_d = Corte resistido por la acción de espiga o efecto de pasador del acero A_s a través de la grieta.

Por equilibrio, $V = V_c + V_f + V_d \dots \dots (a)$

De la Figura 8.5 se tiene $M_B > M_A$. En la sección vertical B que no es atravesada por grietas se obtienen la siguiente ecuación de equilibrio,

$$M_B = C_B \cdot z \dots \text{por estática: } M_B = V \cdot x_B \therefore V \cdot x_B = C_B \cdot z$$

$$C_B = T_B \dots \dots V \cdot x_B = T_B \cdot z \dots (b)$$

La ecuación de equilibrio en la sección agrietada $A - B - C - D$ obtenida sumando momentos respecto a C_B es,

$$T_A \cdot z + V_d \cdot z \cdot \cot \theta = V \cdot x_B \dots \dots \dots y despreciando (V_d \cdot z \cdot \cot \theta) \dots \dots \dots T_A \cdot z = V \cdot x_B \dots (c)$$

Sustituyendo b en c ,

$$T_A = T_B$$

Lo que indica que la tracción en la sección A aumenta de T_A a T_B una vez ocurrido el agrietamiento. Esta demostración es válida para vigas con y sin refuerzo transversal y tiene importantes implicaciones en el detallado del refuerzo (ver Sección 9.5 y Ejemplo 9.1). Por esta razón el código ACI 318 exige que las barras longitudinales se extiendan más allá de donde son necesarias por flexión una distancia mayor a: 1) la altura útil de la sección (d) y 2) doce veces el diámetro de la barra.

b) CORTE QUE RESISTE EL CONCRETO

Numerosos resultados de ensayos experimentales indican que la resistencia al cortante unitario del concreto v_c puede expresarse en proporción a la raíz cuadrada de f'_c y también depende del porcentaje de acero de tracción, según se indica en la Figura 8.6, la carga axial (Figura 8.8) y del valor de,

$$\frac{d}{a} = V \cdot \frac{d}{M}$$

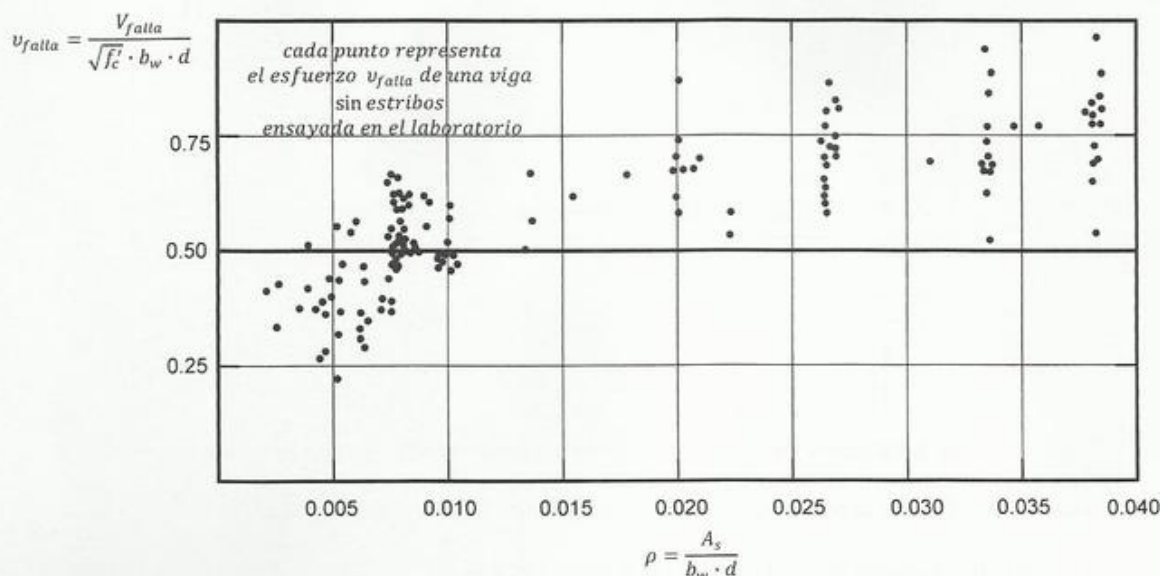


Fig. 8.6 Relación entre la cuantía de acero en tracción y la resistencia a corte del concreto en vigas sin estribos (ACI 426-1978)

En vigas donde $P_u > P_a$ con cuantías de acero (ρ) bajas la profundidad del eje neutro cerca del instante de la falla es bien pequeña y hay poco concreto sano para resistir el corte lo que explica la reducción de v_{falla} en esta zona. En estos casos las grietas por flexión suben y se detienen al encontrarse con la reducida zona comprimida. Las grietas en su parte inferior se ensanchan significativamente reduciendo así contribución de V_f a resistir corte lo que explica la tendencia de la Figura 8.6. Lo contrario ocurre si (ρ) es grande con la gan.

Las normas ACI establecen que el corte total que resiste el concreto viene dado por la expresión

$$V_c = v_c \cdot b_w \cdot d \dots \dots \dots v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [8.1] \text{ ACI } 11.3$$

La definición de b_w se muestra en la Figura 8.7,

O alternativamente,

$$v_c = 0.5 \cdot \sqrt{f'_c} + 176 \cdot \rho_w \cdot V_u \cdot \overbrace{\frac{d}{M_u}}^{\leq 1.0} \leq 0.93 \cdot \sqrt{f'_c} \dots \dots V_u \cdot \frac{d}{M_u} \text{ se tomará } \leq 1 \quad [8.2] \text{ ACI 11.5}$$

- El empleo de la Ecuación 8.2 es muy laborioso y la diferencia con los resultados de la Ecuación 8.1 es bastante pequeña cuando se diseñan las separaciones de estribos.
- El valor de v_c es mayor para valores pequeños del momento M_u , como por ejemplo en la zona próxima a apoyos simples o en los puntos de inflexión y disminuye en secciones donde M_u es grande como en los apoyos interiores de vigas continuas. En este caso hay dos acciones destructivas debidas a V y M .
- La presencia de torsión por encima de un cierto límite $T_u > T_{agriet}/4$ disminuye el valor al cual ocurre la falla por corte (ver Sección 10.3 y la Figura 10.11).

La compresión axial N_u ayuda a resistir el corte y el valor de V_c aumenta (Figura 8.8),

$$v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(1 + \frac{N_u}{140 \cdot A_g} \right) \quad [8.3] \text{ ACI 11.4}$$

La resistencia asignada al concreto no excederá

$$v_c \leq 0.93 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \sqrt{1 + \frac{N_u}{35 \cdot A_g}} \quad [8.4] \text{ ACI 11.7}$$

Nota: Si N es la tracción axial (negativa) podemos calcular v_c así,

$$v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(1 + \frac{N_u}{35 \cdot A_g} \right) \quad [8.5] \text{ ACI 11.8}$$

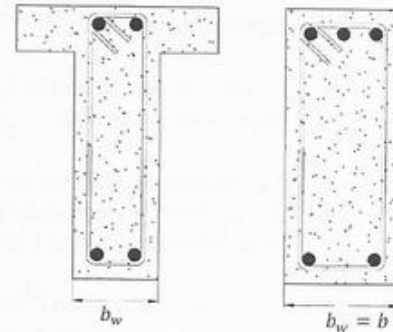


Fig. 8.7 Definición de b_w

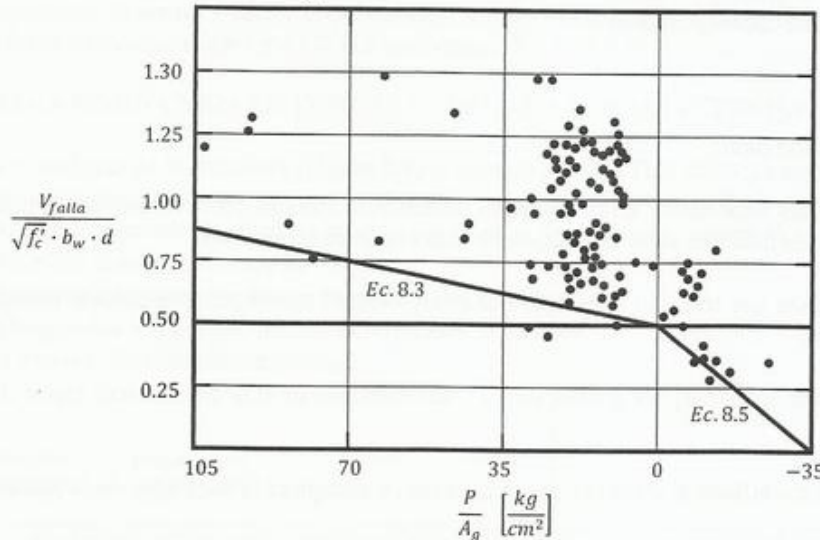


Fig. 8.8 Influencia de la fuerza axial en la resistencia a corte del concreto (ACI 426 -1978)

La resistencia al corte que aporta el concreto la asumiremos según indica la Ecuación 8.6,

$$V_c = v_c \cdot b_w \cdot d \quad [8.6]$$

Información adicional sobre el comportamiento de vigas sin refuerzo transversal se encuentra en Sozen, Swoyer y Seiss (1959).

8.5 COMPORTAMIENTO DE VIGAS CON REFUERZO TRANSVERSAL

Usualmente se colocan estribos verticales en U , cerrados (lo más usual como se muestra en la Figura 8.7), inclinados o barras dobladas.

Resultados obtenidos de ensayos en vigas con estribos indican,

- La carga P_a que produce el agrietamiento no aumenta con la presencia de estribos. El comportamiento de la viga previo al agrietamiento es el mismo que en el caso de elementos sin refuerzo al corte (sección 8.4). Los estribos no trabajan en esta etapa.
- Una vez que se produce el agrietamiento, el refuerzo transversal cruza (cose) las grietas y colabora con el concreto y el acero longitudinal a resistir la acción de la tracción diagonal. Colocados a separaciones pequeñas $s < d/2$ impiden que las grietas penetren en la zona comprimida y se ensanchen lo que mejora la fricción entre las caras de la grieta.
- Al impedir que las grietas suban y disminuyan la zona sana de concreto, contribuyen a incrementar la capacidad V_c .
- Colaboran con la fuerza V_d al servir de soporte a las barras principales, sobre todo a las situadas en la esquina de un estribo.
- La máxima separación de estribos para evitar falla súbita corresponde a un esfuerzo a tracción $v' = 3.5 \text{ kg/cm}^2$ y viene dado por,

$$A_{v \min} > 0.20 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \underbrace{\frac{b_w \cdot s}{F_y}}_{\text{estribo}} \dots y \dots A_{v \min} = 3.50 \cdot \underbrace{\frac{b_w \cdot s}{F_y}}_{\text{estribo}} \quad [8.7] \text{ ACI } 11.13$$

En donde $A_{v \min}$ es la mínima cantidad del refuerzo a corte (área del estribo por número de ramas -ver Figura 8.12-) colocada cada separación s .

Los estribos,

- Resisten parte del corte total.
- Son los elementos más importantes en una sección de concreto armado. Falta de estribos o su detallado inadecuado es la causa más frecuente de colapso de estructuras en terremotos.
- Impiden la falla súbita por tracción diagonal, siempre y cuando satisfagan una cuantía mínima y una separación adecuada.
- Impiden, que una vez iniciadas, las grietas suban y así reduzcan el área de concreto capaz de resistir compresiones.
- Los estribos cerrados confinan el concreto, resisten torsión y aumentan la ductilidad de la sección.
- A la fecha no ha sido posible determinar con exactitud la distribución de la fuerza cortante entre,
 - 1) Los estribos.
 - 2) La zona de compresión y el acero longitudinal.
- La contribución de la zona de concreto a compresión y la de los estribos para resistir el corte están interrelacionadas, es decir que no son independientes.

- Las recomendaciones de diseño por corte que se desarrollan en este Capítulo son las sugeridas por el ACI. El procedimiento es sencillo, ha demostrado ser seguro y económico. En el Capítulo 11 se expone la metodología de los modelos de puntal y tirante útil para el diseño de zonas discontinuas y que fue incorporada al Código 318 de la ACI en el 2002.
- La estimación de la resistencia al corte en elementos de concreto armado ha sido tema de amplia discusión y a la fecha no existe consenso sobre el procedimiento más adecuado para diseñar un elemento de concreto armado sujeto a fuerzas cortantes. A los lectores interesados en metodologías alternativas para el diseño de corte se les recomienda consultar las investigaciones lideradas por Bazant, basadas en la mecánica de la fractura, Bazant y Kazami (1991), el trabajo liderado por Collins y sus colaboradores sobre la teoría de los campos de compresión, Collins y Mitchell (1991), Vecchio y Collins (1986), y el de Hsu (1993) que han ganado aceptación. También se recomienda consultar los más recientes trabajos de Choi, Park y Wight (2007), Tureyen y Frosch (2003) y Saqan y Frosch (2009). Un excelente resumen sobre diferentes metodologías disponibles para diseñar por corte se presentan en el reporte ASCE-ACI Comité 445 (1998).

Según la metodología de diseño recomendada por el ACI, si las acciones exteriores producen en una sección cualquiera un corte V_u/ϕ y el concreto resiste V_c deberá colocarse refuerzo transversal para resistir,

$$V_s = \left[\frac{V_u}{\phi} \right] - V_c \quad \text{para corte} \dots \phi = 0.75 \quad [8.8]$$

Mediante el uso de,

Estribos verticales: (en general perpendiculares al eje del elemento estructural.) Son los más utilizados.

Estribos inclinados en la dirección de las trayectorias principales de tracción. Tienen mayor rendimiento que los estribos verticales, pero son más difíciles de colocar y resultan ineficaces en zonas sísmicas donde cambia la dirección de la tracción. **Barras dobladas**, en combinación con estribos.

Investigaciones recientes indican la posibilidad de usar concretos con fibras que ayudan a resistir parte del corte (Parra-Montesinos 2006 y ACI-318 secciones 3.5 y 11.4.6.3)

a) ANALOGÍA DE UNA VIGA DE CONCRETO ARMADA CON UNA CERCHA

Según la analogía de la armadura (Figura 8.9) propuesta por RITTER una viga agrietada diagonalmente y con refuerzo transversal se comporta como una cercha en la cual se tiene (ver Park y Paulay, 1975),

- **Cordón superior:** el concreto situado por encima del eje neutro sometido a compresión.
- **Cordón inferior:** el acero de tracción.
- **Diagonales a compresión:** el concreto sano entre grietas.
- **Diagonales a tracción:** las barras o estribos inclinados.
- **Tirantes:** los estribos verticales.

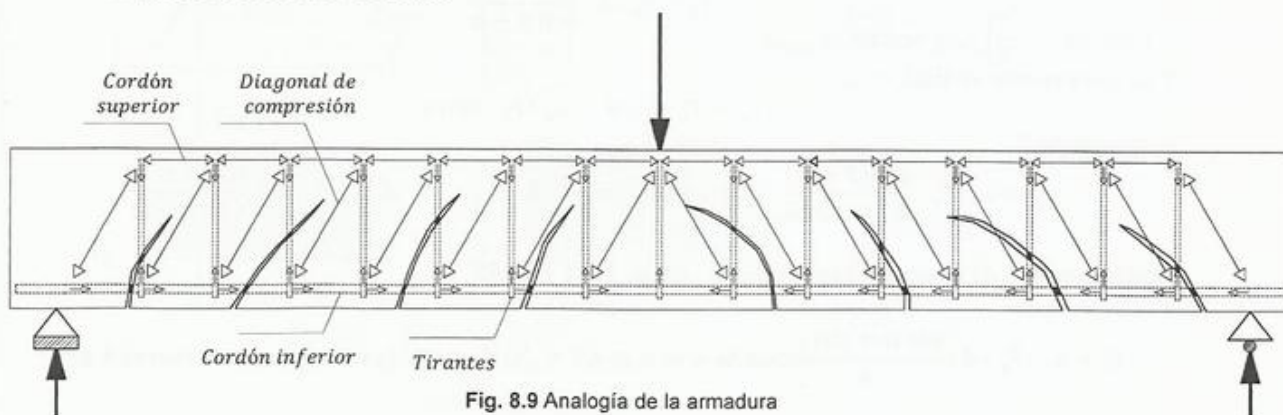


Fig. 8.9 Analogía de la armadura

b) CORTE RESISTIDO POR ESTRIBOS O BARRAS DOBLADAS

En la Figura 8.10 tenemos una viga con acero transversal y grietas diagonales inclinadas con la horizontal, donde,

$$V_s = \bar{V}_u - V_c \text{ Es el corte que actúa en las barras, y}$$

$$a_v \cdot F_y = \text{Capacidad resistente a tracción por barra de área } a_v$$

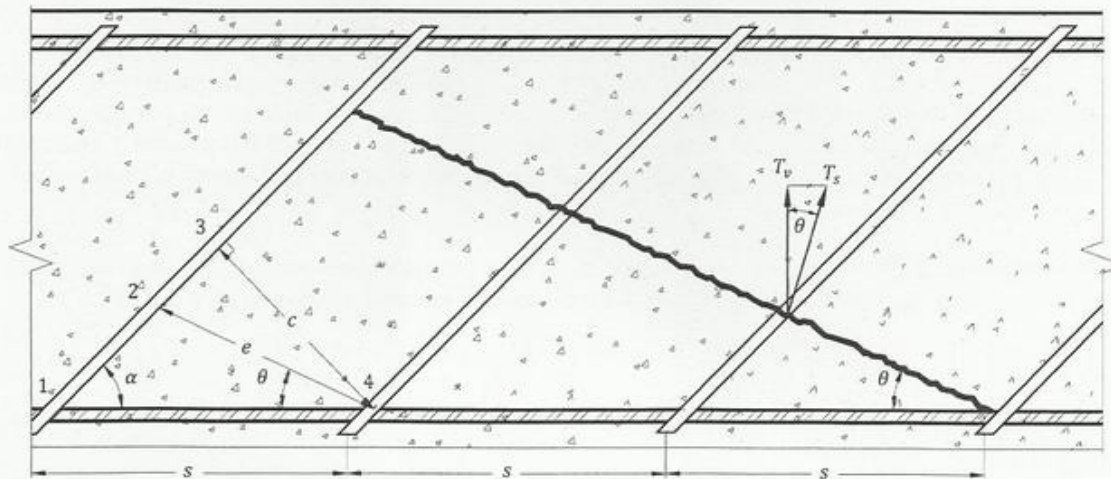


Fig. 8.10 Corte resistido por barras dobladas o estribos

Deduiremos V_s . Sean,

$$\widehat{3.2.4} = \theta + \alpha$$

$$\widehat{2.4.3} = 90 - \theta - \alpha$$

c = Distancia perpendicular entre barras

s = Distancia horizontal

a_v = Área de una barra que cruza la grieta

De la Figura 8.10,

$$c = s \cdot \sen \alpha = e \cdot \cos(90 - \theta - \alpha) = e \cdot \sen(\theta + \alpha) \quad \therefore e = \frac{s \cdot \sen \alpha}{\sen \theta + \alpha}$$

La fuerza normal a la grieta por barra T_s ,

$$v_s = \frac{T_s}{\underbrace{b_w}_{\text{ancho viga}} \cdot e}$$

Y sustituyendo e ,

$$T_s = v_s \cdot b \cdot \frac{s \cdot \sen \alpha}{\sen \theta + \alpha}$$

Y su componente vertical,

$$T_v = T_s \cdot \cos \theta = a_v \cdot F_y \cdot \sen \alpha$$

Sustituyendo T_s

$$v_s = a_v \cdot F_y \cdot \frac{\sen(\theta + \alpha)}{b \cdot s \cdot \cos \theta} \dots \text{siendo } V_s = v_s \cdot b \cdot d \dots V_s = a_v \cdot F_y \cdot d \cdot \frac{\sen(\theta + \alpha)}{(s \cdot \cos \theta)}$$

Siendo $\sen(\theta + \alpha) = \sen \alpha \cdot \cos \theta + \sen \theta \cdot \cos \alpha$. Para $\theta = 45^\circ$

$$V_s = a_v \cdot F_y \cdot d \cdot \frac{\sen \alpha + \cos \alpha}{s} \dots \text{Si } \theta = \alpha = 45^\circ \dots V_s = a_v \cdot F_y \cdot d \cdot \frac{\sqrt{2}}{s} \dots \text{barras a } 45^\circ$$

Para estribos verticales donde por lo menos existen dos ramas, los más comunes encontrados en la práctica, (Ver Figura 8.12 para la definición del número de ramas),

Se define.... $A_v = a_v \cdot (\# \text{ ramas del estribo})$

$$V_s = A_v \cdot F_y \cdot \frac{d}{s} \quad \therefore \quad s = \frac{A_v \cdot F_y}{V_s} \cdot d \quad [8.9]$$

A_v = Área del estribo multiplicada por número de ramas verticales que cruzan la grieta (Figura 8.12). El término d/s en la Ecuación 8.9 es el número de estribos que atraviesa la grieta si la inclinación de estas es 45 grados con respecto al eje del elemento.

8.6 DISEÑO DE ESTRIBOS

Los estribos deben ser diseñados para resistir,

$$V_s = \bar{V}_u - V_c \dots \dots \dots \left(\bar{V}_u = \frac{V_u}{\phi} = \frac{V_u}{0.75} \right) \quad [8.10]$$

a) ZONA NO SÍSMICA, SECCIÓN CRÍTICA

La sección crítica en la que calcularemos el corte de diseño ($V_u = V_{\text{diseño}}$). La separación de estribos se calculará con las ecuaciones 8.9 y 8.10.

- Se calculará una distancia d de la cara del apoyo como se muestra en la Figura 8.11b. Debe cumplirse que el elemento que se diseña produce compresión en los apoyos y que las cargas se aplican cerca del borde superior del elemento en cuestión.
- Se calculará en la cara del apoyo si el elemento produce tracción sobre este (Figura 8.11a). Debe cumplirse una o más de las condiciones siguientes,
La viga o losa tienden a separarse de sus apoyos.
Las cargas se aplican cerca del borde inferior del miembro.
Existen cargas concentradas a una distancia menor a d de la cara del apoyo.

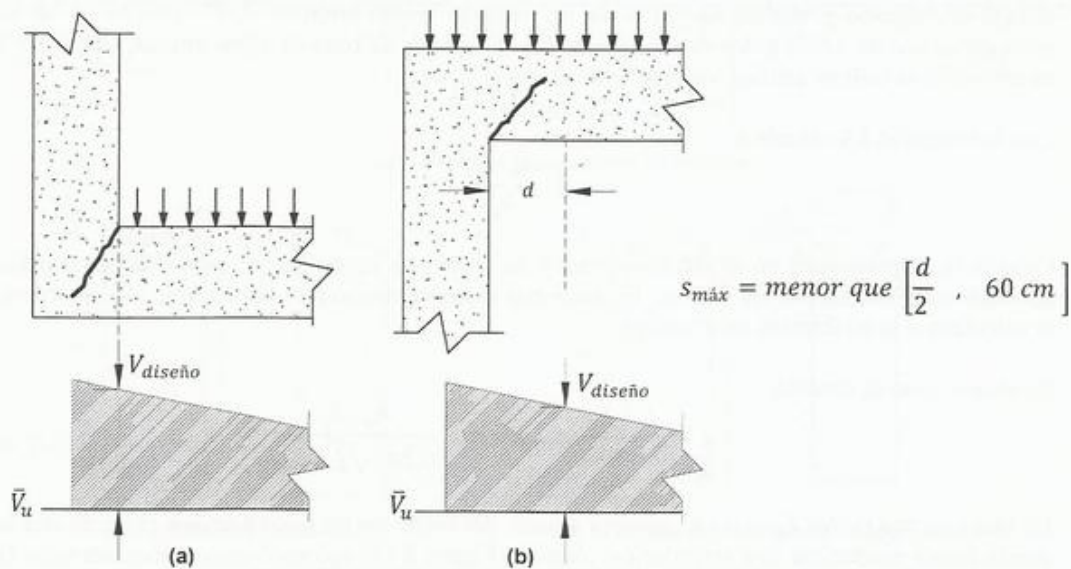


Fig. 8.11 Secciones críticas para el cálculo de ($V_u = V_{\text{diseño}}$) zona no sísmica

b) EN ZONA SÍSMICA

Calcularemos el corte de diseño usando las ecuaciones de estática y basados en la máxima demanda probable de corte en los extremos de la viga ó columna para garantizar que esta falle por flexión y no por corte (ver Blume, Newmark y Corning, 1963). Esta se calculará asumiendo que el extremo izquierdo y derecho de las vigas (inferior o superior en el caso de columnas) alcanzan su resistencia a flexión. La fuerza de tracción en el acero la calcularemos asumiendo un esfuerzo de $1.25 \cdot F_y$ para considerar el incremento en la resistencia a flexión de la viga originada por el endurecimiento del acero (Ver Ejemplo 8.4).

- Comience comprobando que el corte máximo en el miembro ($v_{u\text{ máx}}$) sea menor que $\phi \cdot 5 \cdot v_c$ (ACI 11.5.6.9). El término v_c lo obtendremos de la Ecuación 8.1,

$$\frac{V_{u\text{ máx}}/\phi}{b_w \cdot d} = \bar{v}_{u\text{ máx}} \leq 5 \cdot v_c \cong 2.65 \cdot \sqrt{f'_c}$$

Y sí no se cumple aumente la sección.

- Calcule V_c con la Ecuación 8.6 y el corte que debe resistir el acero con la Ecuación 8.10,

En estructuras sismo-resistentes Sozen (2004) recomienda,

$$v_{u\text{ máx}} \leq 25 \frac{kg}{cm^2}$$

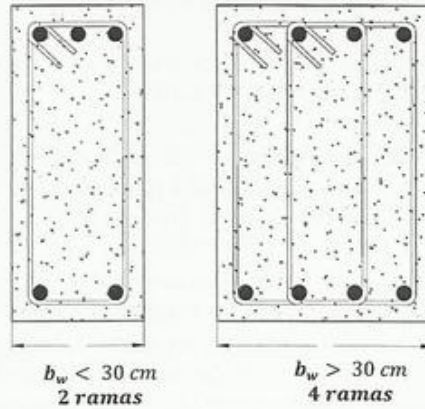


Fig. 8.12 Detalles típicos de estribos

- Escoja el diámetro y número de ramas de los estribos. Como mínimo $3/8''$ (o $1/4''$ si las cabillas principales son de $1/2''$) y dos ramas (Figura 8.12). Cuando se trate de vigas anchas, con $b_w > 30\text{ cm}$ es conveniente utilizar estribos de más de dos ramas.

Con la Ecuación 8.9 calcule s ,

$$s = d \cdot \frac{A_v \cdot F_y}{V_s}$$

Calcule las separaciones en la sección crítica y en secciones sucesivas, las cuales deben satisfacer las máximas establecidas por las normas. Es decir que como separación de diseño se tomará la menor entre la calculada y la establecida en el código.

En ningún caso se tendrá,

$$s > \frac{A_v \cdot F_y}{3.5 \cdot b_w} \dots y \dots s > \frac{A_v \cdot F_y}{0.20 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w} \quad [8.7] \text{ ACI 11.13}$$

- En una longitud crítica $L_o = 2 \cdot h$ medida a partir del borde del apoyo o a ambos lados de una sección donde pueda producirse una articulación plástica (Figura 8.13) colocaremos estribos cerrados (Figura 8.13c). El ACI 318-08 en su Sección 21.4.5.2 obliga a usar $V_c = 0$ si se cumple simultáneamente,

- 1) El corte producido por las fuerzas sísmicas es mayor que el inducido por las fuerzas de gravedad
→ se cumple para casi todas las columnas
- 2) La carga axial P_u es menor $0.05 \cdot f'_c \cdot \text{Area}$ → se cumple para casi todas las vigas

La resistencia al corte del concreto se deteriora rápidamente bajo la acción de cargas repetidas (Wight y Sozen, 1975, y Popov, Bertero y Krawinkler, 1972) por lo que el autor recomienda asumir $V_c = 0$ siempre que se calculen estribos a lo largo de L_o en zonas de alta sismicidad y para el cálculo de estribos en columnas.

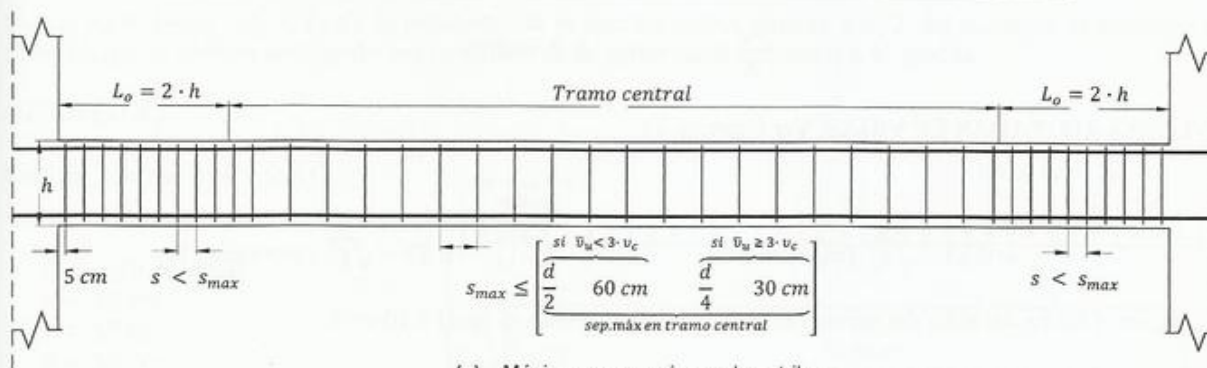
$$\therefore V_s = \bar{V}_u$$

La máxima separación de estribos a lo largo de L_o es, (ACI 21.3.3.2), (ver Tabla 8.2).

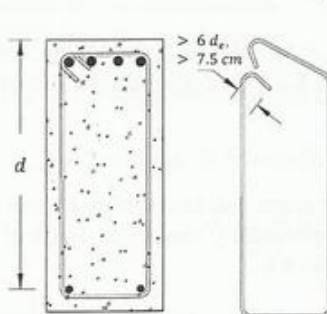
$$s_{\max 2h} = \text{menor que} \left[\frac{d}{4} \quad 24 \cdot \overset{\phi \text{ est.}}{\widehat{d_e}} \quad 8 \cdot \overset{\phi \text{ ppl.}}{\widehat{D_b}} \quad 30 \text{ cm} \right]$$

Tabla 8.2 Máxima separación de estribos en la longitud crítica L_o

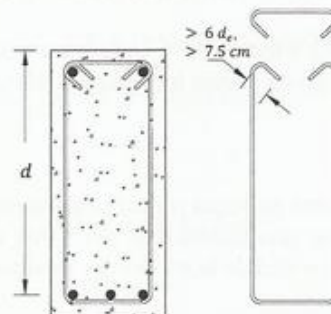
estribos d_e (pulg)	s_{\max} ($24 \cdot d_e$) (cm)	barras principales D_b (pulg)	s_{\max} ($8 \cdot D_b$) (cm)	barras principales D_b (pulg)	s_{\max} ($8 \cdot D_b$) (cm)
1/4"	15	1/2"	12	1"	20
3/8"	23	5/8"	13	1 1/8"	23
1/2"	31	3/4"	15	1 1/4"	25
5/8"	-	7/8"	18	1 3/8"	28



(c) Máximas separaciones de estribos



(a) Estribos cerrados



(b) Estribos abiertos (solo en tramo central)

Fig. 8.13 Detalles típicos de estribos en zona sísmica

Recomendación: Es necesario comprobar cada uno de los valores máximos en la zona. Observe que para estribos de 3/8" (los más usados) $s_{m\acute{a}ximo} = 23 \text{ cm}$ y para barras principales de 5/8" $s_{m\acute{a}ximo} = 13 \text{ cm}$.

Fuera de la zona crítica L_o en el tramo central pueden utilizarse estribos abiertos ó cerrados. La separación de estribos en el tramo central (Figura 8.13),

$$s_{m\acute{a}x} = \text{menor que } \left[\begin{array}{cc} \text{si } \bar{v}_u < 3 \cdot v_c & \text{si } \bar{v}_u \geq 3 \cdot v_c \\ \frac{d}{2} & 60 \text{ cm}, \\ \frac{d}{4} & 30 \text{ cm} \end{array} \right]$$

- Por último dibujaremos los estribos acotando debidamente. Las medidas se hacen por fuera. Nótese que, aún en zona sísmica, pueden utilizarse estribos abiertos en el tramo central de las vigas.
- En zonas de empates, de corte o doblez de barras, se colocarán estribos adicionales.

Observación

Los estribos a separaciones adecuadas con los ganchos anclados dentro del núcleo de la columna son los elementos más importantes para evitar la falla por corte, la más peligrosa e indeseada de todas. Muchísimas son las estructuras que han colapsado en terremotos por la colocación inadecuada de estribos en obra.

8.7 CORTE EN LOSAS

En losas no se coloca acero transversal de corte dadas las dificultades constructivas. Por esta razón debemos diseñarlas de manera que se cumpla (en la sección crítica),

$$\frac{v_u}{\phi} = \bar{v}_u \leq v_c \rightarrow \phi = 0.75$$

a) LOSAS APOYADAS EN VIGAS. Ver Capítulo 12.

$$v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \text{ (macizas)} \dots \dots \dots v_c = \overset{\text{ACI 318-08}}{\underset{\text{Sección 8.13.8}}{(1.1)}} \cdot 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \text{ (nervadas)}$$

b_w es el ancho del alma del nervio (en losas nervadas usuales es igual a 10 cm).

b) LOSAS SOBRE COLUMNAS (ZAPATAS DE FUNDACIÓN)

La carga se transmite a través de la columna o pedestal de lados t_1 y t_2 (siendo t_1 el menor) y la falla tiende a producirse a lo largo de planos inclinados a 45° como en la Figura 8.14. Se comprobarán dos casos,

Viga Ancha

Igual al caso de corte en zonas no sísmicas calculando V_u como la carga que actúa sobre el área sombreada de la Figura 8.14a una distancia d del borde de la columna o pedestal y siendo b_1 igual al lado de la fundación. La capacidad de la sección se verificará con la Ecuación 8.6.

Punzonado

Considerando la acción en dos direcciones con un valor de v_c mayor que el anterior, debido a que la presencia de compresiones perpendiculares aumenta el valor de la carga P_a necesaria para producir el agrietamiento.

Sean,

$$v_{c1} = (1 + 2 \cdot \beta') \cdot 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [8.11] \text{ ACI 11.3.3}$$

$$\beta' = \frac{t_1}{t_2} \leq 1 \dots \dots t_1 \text{ lado menor.}$$

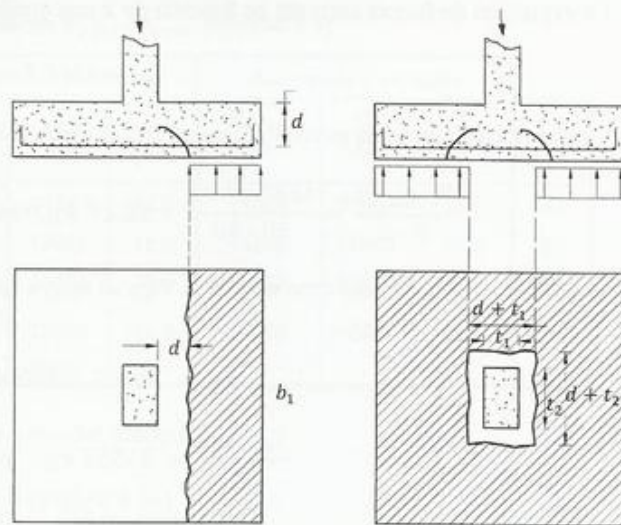
$$v_{c2} = (1 + \gamma') \cdot 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [8.12] \text{ ACI 11.3.4}$$

$$\gamma' = \frac{\alpha_s \cdot d}{b_o}$$

$$\alpha_s = \begin{cases} 20 \text{ columnas interiores} \\ 15 \text{ columnas exteriores} \\ 10 \text{ columnas esquineras} \end{cases}$$

$$v_{c3} = (2) \cdot 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [8.13] \text{ ACI 11.3.5}$$

$$v_c = \text{menor de } [v_{c1} \quad v_{c2} \quad v_{c3}]$$



(a) Viga ancha

(b) Punzonado

Fig. 8.14 Corte en zapatas o losas de fundación

Se debe satisfacer,

$$\frac{\overbrace{V_u \text{ diseño} / \phi}^{\text{carga que actúa sobre la zona sombreada 8.14b}}}{b_o \cdot d} \leq v_c$$

Siendo $b_o = 2 \cdot (t_1 + t_2 + 2 \cdot d)$ el perímetro de la sección crítica situada a $d/2$ del borde de la columna o pedestal, que se obtiene asumiendo una superficie de falla con caras inclinadas a 45 grados.

EJEMPLO 8.1

Calcular estribos de B hacia C

$$f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 55 \text{ cm}$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

$$M_{ub} = 40000 \text{ kg} \cdot \text{m} \text{ Tracción arriba}$$

$$M_{uc} = 30000 \text{ kg} \cdot \text{m} \text{ Tracción arriba}$$

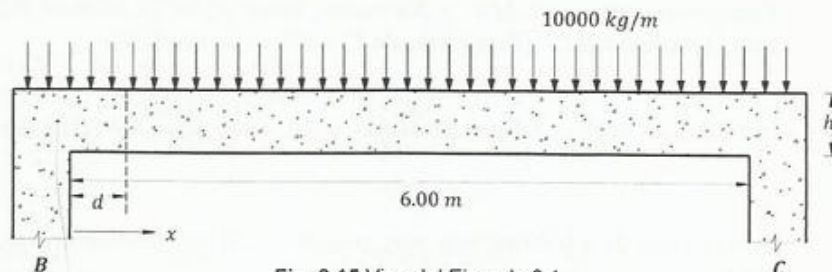


Fig. 8.15 Viga del Ejemplo 8.1

Entre $x = 0$ y $x = 1.3$ tenemos 5 cabillas de 1" con $A_s = 25.3 \text{ cm}^2$ y $\rho = 0.0169$

a) Para $v_c = v_{cte}$. Aplicando la Ecuación 8.1,

$$v_{cte} = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = 0.53 \cdot \sqrt{240} = 8.21 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{cte} = v_c \cdot b \cdot d = 12316 \text{ kg}$$

Por equilibrio de momentos,

$$\sum M_c = 0 \dots \dots -10000 \cdot 6 \cdot 3 - 40000 + 28000 + V_{ub} \cdot 6 = 0$$

$$V_{ub} = \frac{10000 \cdot 6 \cdot 3 + (40000 - 30000)}{6} = 10000 \cdot 3 + \frac{(40000 - 30000)}{6} = 31667 \text{ kg}$$

La expresión de fuerza cortante en función de x nos queda,

$$V_{ux} = 31667 - 10000 \cdot x$$

Verificaremos que no se exceda el corte máximo permitido por normas,

$$\frac{V_{u \text{ máx}}/\phi}{b \cdot d} = \frac{43333.7 \text{ kg}}{30 \cdot 50} = 28.15 \text{ kg/cm}^2 < 5 \cdot v_c = 41.05 \text{ kg/cm}^2 \quad O.K$$

La sección crítica en este caso en que la viga se apoya (produce compresión en la columna) dista $d = 50 \text{ cm}$ del borde B .

$$V_{u \text{ crítico}} = 31667 - 10000 \cdot 0.50 = 26667 \text{ kg}$$

$$\frac{V_{u \text{ crítico}}}{\phi} = 35556 \text{ kg} \quad \text{para corte } \phi = 0.75$$

Calcularemos el corte que debe resistir el acero usando la Ecuación 8.10,

$$V_{s \text{ crítico}} = \frac{V_{u \text{ crítico}}}{\phi} - V_c = 35556 - 12316 = 23240 \text{ kg}$$

$$\bar{v}_u = \frac{35556}{30 \cdot 50} = 23.70 \text{ kg/cm}^2 < 3 \cdot v_c = 24.63 \text{ kg/cm}^2$$

$$\Rightarrow s_{\text{máx}} = \text{menor de } \left[\frac{d}{2}, 60 \text{ cm} \right] = \frac{d}{2} = 25 \text{ cm}$$

Al aplicar la Ecuación 8.9,

$$s = d \cdot \frac{A_v \cdot F_y}{V_s}$$

Escogemos estribos de 3/8" y dos ramas, luego $A_v = 2 \cdot 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$ y calcularemos la separación para la sección crítica. (Para barras de 1" estribo mínimo 3/8").

$$s = d \cdot \frac{A_v \cdot F_y}{V_s} = 50 \cdot \frac{1.42 \cdot 4200}{23240} = 12.83 \text{ cm} < \overbrace{25 \text{ cm}}^{s_{\text{máx}}}$$

Sí este valor de s hubiera sido muy pequeño, $< 8 \text{ cm}$, tendríamos que usar estribos de 1/2" ó más de dos ramas.

En la Tabla 8.3 aparecen los valores para distintas secciones.

b) Para $v_c = v_{c \text{ var}}$. Usaremos la ecuación 8.2

$$v_{c \text{ var}} = 0.5\sqrt{f'_c} + 176 \cdot \rho_w \cdot V_u \cdot \overbrace{\frac{d}{M_u}}^{\leq 1.0} < 0.93 \cdot \sqrt{f'_c}; \quad V_{c \text{ var}} = v_{c \text{ var}} \cdot b \cdot d$$

Los resultados se presentan en la Tabla 8.3.

Tabla 8.3 Separación de estribos usando v_{cte} y v_{var} (Ejemplo 8.1)

x (m)	ρ	V_u (kg)	$ V_u $ (kg)	M_u (kg · m)	Asumiendo V_c constante			Asumiendo V_c variable			s_{max} (cm)
					V_{cte} (kg)	V_s (kg)	s (cm)	$V_{c var}$ (kg)	V_s (kg)	s (cm)	
0.50	0.0169	26667	35556	25417	12316	23240	12.8	14052	21504	13.9	25
0.75	0.0169	24167	32223	19062	12316	19907	15.0	14540	17683	16.9	25
1.00	0.0169	21667	28889	13333	12316	16573	18.0	15337	13552	22.0	25
1.25	0.0169	19167	25556	8229	12317	13239	22.5	16908	8648	34.5	25
1.50	0.0169	16667	22223	2223	12316	9907	30.1	-	-	-	25

Distribución de estribos: El primer estribo se colocará a 5 cm del borde B

- Para V_c variable primer estribo a 5 cm del borde B (Figura 8.16)
 $+ 6$ Estribos $3/8"$ 14 cm..... $x_2 = 5 + 70 = 75$ cm
 $+ 5$ Estribos $3/8"$ 20 cm..... $x_3 = 75 + 100 = 175$ cm
 $+ 5$ Estribos $3/8"$ 25 cm..... $x_4 = 175 + 125 = 300$ cm
 Total hasta centro viga = 16 estribos de $3/8"$

- Para V_c constante primer estribo a 5 cm del borde B
 $+ 7$ Estribos $3/8"$ a 12 cm..... $x_2 = 5 + 60 = 77$ cm
 $+ 2$ Estribos $3/8"$ a 15 cm..... $x_3 = 77 + 30 = 107$ cm
 $+ 3$ Estribo $3/8"$ a 18 cm..... $x_4 = 107 + 54 = 161$ cm
 $+ 2$ Estribos $3/8"$ a 20 cm..... $x_5 = 161 + 40 = 201$ cm
 $+ 4$ Estribos $3/8"$ a 25 cm..... $x_5 = 201 + 100 = 301$ cm
 Total hasta centro viga = 18 estribos de $3/8"$

Detalle estribos

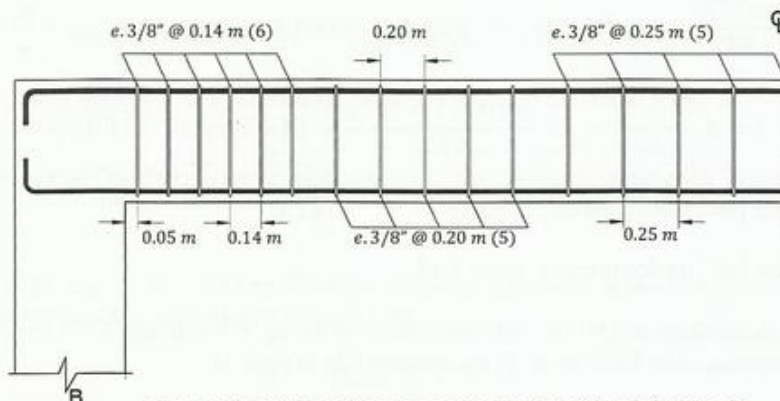
Usaremos estribos cerrados en la zona próxima al apoyo y abiertos los restantes. Para un recubrimiento neto de 2.5 cm tenemos ganchos de $6 \cdot d_e = 6$ cm (mínimo).

$$b_1 = 25 \text{ cm} ; h_1 = 50 \text{ cm}$$

$$\text{Para estribos cerrados: } L = 2 \cdot (25 + 50 + 6) = 1.62 \text{ m}$$

$$\text{Para estribos abiertos: } L = \dots \dots \dots = 1.37 \text{ m}$$

La diferencia es de 0.25 m o sea de 0.14 kg por estribo. (Los estribos cerrados pueden contribuir a resistir torsión). ■

Fig. 8.16 Estribos por corte asumiendo V_c variable. Ejemplo 8.1

EJEMPLO 8.2

Zona no sísmica. Vigueta apoyada en la parte inferior de una viga principal.

$$b = 20 \text{ cm}, f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2, d = 30 \text{ cm}, \\ F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2, V_{uB} = 13600 \text{ kg}, \\ w_u = 6000 \text{ kg/m. Estribos de } 3/8" \text{ } 2R.$$

Sección crítica: en el borde,

$$V_{u \text{ crítico}} = 13600 \text{ kg} = V_{u \text{ max}}$$

Al aplicar la Ecuación 8.1 nos viene,

$$v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = 0.53 \cdot \sqrt{240} = 8.21 \text{ kg/cm}^2,$$

$$V_c = v_c \cdot b \cdot d = 4926 \text{ kg}$$

Verificaremos que no se exceda el corte máximo permitido por normas,

$$\bar{v}_{u \text{ crítico}} = \frac{V_{u \text{ máx}}/\phi}{b \cdot d} = \frac{\overbrace{13600 \text{ kg}/(0.75)}^{\bar{V}_u=18133}}{20 \cdot 30} = 30.22 \text{ kg/cm}^2 < 5 \cdot v_c = 41.05 \text{ kg/cm}^2 \quad O.K$$

$$\bar{v}_{u \text{ crítico}} = 30.22 \text{ kg/cm}^2 > 3 \cdot v_c = 24.63 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow s_{\text{máx}} = \text{menor} \left[\frac{d}{4}, 30 \text{ cm} \right] \rightarrow \frac{d}{4} = 7.50 \text{ cm}$$

$$V_s = \bar{V}_{u \text{ crítico}} - V_c = 18133 - 4926 = 13207 \text{ kg}$$

$$s = d \cdot \frac{A_v \cdot F_y}{V_s} = 30 \cdot \frac{2 \cdot (0.71) \cdot 4200}{13207} = 13.54 \text{ cm} > \frac{s_{\text{máx}}}{2}$$

Sección para $x = 0.50 \text{ m}$ (medido a partir de la cara del apoyo)

$$V_u = 13600 - 6000 \cdot 0.50 = 10600 \text{ kg} \dots V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c = \frac{10600/0.75}{14133} - 4926 = 9207 \text{ kg} \\ \bar{v}_u = \frac{10600/(0.75)}{20 \cdot 30} = 23.55 \text{ kg/cm}^2 < 3 \cdot v_c = 24.63 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow s_{\text{máx}} = \frac{d}{2} = 15 \text{ cm}.$$

$$s = d \cdot \frac{A_v \cdot F_y}{V_s} = 30 \cdot \frac{2 \cdot (0.71) \cdot 4200}{9207} = 19.43 \text{ cm} > \frac{s_{\text{máx}}}{2}$$

Al diseñar la viga principal debe tomarse en consideración que las viguetas "cuelgan" de aquella, transmitiéndole una fuerza de 13600 kg por cada vigueta.

Distribución de estribos 3/8" de dos ramas (Figura 8.17).

El primer estribo lo colocaremos a 3.50 cm del borde hacia el tramo + 4 estribos a 7.5 cm (dentro del apoyo). Usaremos estribos separados cada 15.0 cm en la parte central de la viga. ■

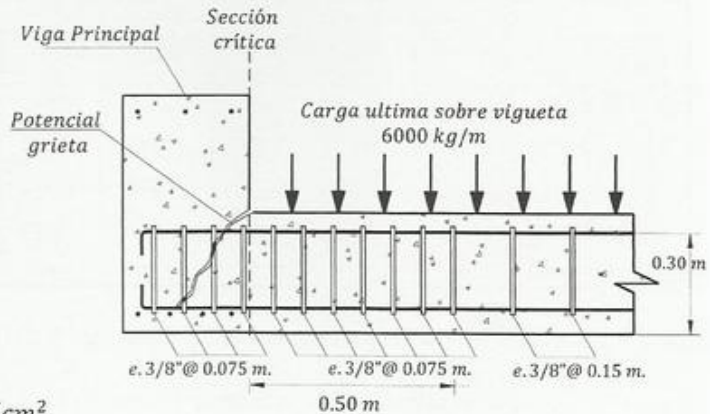


Fig. 8.17 Vigueta del Ejemplo 8.2

EJEMPLO 8.3

Zapata de fundación.

Pedestal de 30 cm x 30 cm

 $P_{muerta} = 50 \text{ ton}$ $P_{viva} = 20 \text{ ton}$ $f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma_{adm} = 3.2 \text{ kg/cm}^2$ $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Dimensiones de la zapata: Calcularemos las dimensiones usando la carga de servicio

$$P_{servicio} = 50 + 20 = 70 \text{ ton}$$

$$A_{contacto} \geq \frac{70 \cdot 10^3}{3.2} = 21875 \text{ cm}^2$$

Si asumimos una zapata cuadrada de lado L

$$L = \sqrt{A_{contacto}} = 147.09 \text{ cm} \sim 150 \text{ cm}$$

La zapata se diseñará usando la carga última

$$P_u = 1.2 \cdot 50 + 1.6 \cdot 20 = 92 \text{ ton}$$

La reacción del suelo sobre el terreno en condiciones últimas,

$$\sigma_{ult} = \frac{92000}{150 \cdot 150} = 4.09 \text{ kg/cm}^2 < 1.33 \cdot \sigma_{adm} \quad O.K$$

- **Acero por flexión.** Se calculará en la sección del borde de la columna, para un ancho de 150 cm (Figura 8.19)

$$M_u = \sigma_{ult} \cdot \overbrace{150}^{\text{ancho}} \cdot \overbrace{\frac{60^2}{2}}^{\text{vuelo}} = 4.09 \cdot 150 \cdot \frac{60^2}{2} = 1104300 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_u = 11043 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad M_u / \phi = \bar{M}_u = 12270 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

La altura mínima para diseñar con armadura sencilla, aplicando la Ecuación 5.26,

$$d_{min} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{b \cdot f'_c}} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{1227000}{150 \cdot 210}} = 14.35 \text{ cm}$$

Asumiremos $d = 28 \text{ cm} \dots h = 35 \text{ cm}$. Para que la zapata distribuya la presión de contacto de manera más o menos uniforme al suelo se recomienda (Figura 8.18),

$$Vuelo \leq 2 \cdot h$$

Asumiremos $h = d + rec = 35 \text{ cm}$ y cumpliremos con la ecuación anterior.

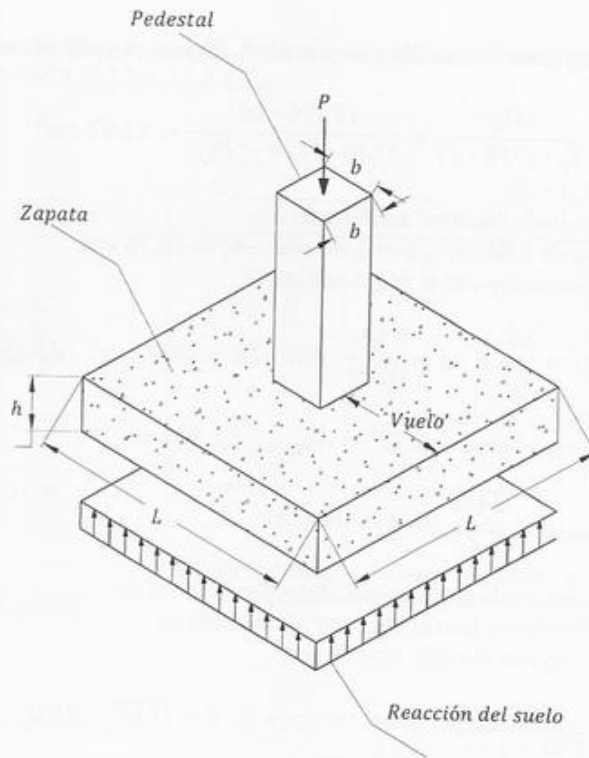


Fig. 8.18 Zapata de fundación. Ejercicio 8.3

Utilizaremos la fórmula aproximada 5.28 para calcular el área de acero

$$A_s = \frac{\bar{M}_u}{F_y \cdot (7/8 \cdot d)} = \frac{12270 \cdot 10^2}{4200 \cdot (7/8 \cdot (28))} = 11.92 \text{ cm}^2$$

El resultado "exacto" asumiendo un

Ancho de 150 cm ... $a = 1.68 \text{ cm}$... $A_s = 10.75 \text{ cm}^2$.

Verificaremos con el acero mínimo,

$$A_{s \min} = \frac{14}{F_y} \cdot b \cdot d = \frac{14}{4200} \cdot 150 \cdot 28 = 14.0 \text{ cm}^2 \text{ (domina)}$$

Usaremos barras de 1/2" $\rightarrow A_{\text{barra}} = 1.27 \text{ cm}^2$

$$N^{\circ} \text{ barras} = \frac{14.0}{1.27} = 11.02 \text{ barras}$$

Espaciamiento entre barras: Asumiendo 7 cm de recubrimiento lateral por estar el concreto en contacto con el suelo tendríamos,

$$s = \frac{136}{\frac{150 - 2 \cdot 7}{9.05 - 1}} \approx 14.00 \text{ cm}$$

Verificaremos la máxima separación de barras permisible para limitar el ancho de grietas. Asumiremos,

$$f_s = 0.60 \cdot F_y$$

$$s_{\max} = \frac{95}{f_s \left(\frac{\text{ton}}{\text{cm}^2} \right)} - 2.5 \cdot c_c \leq \frac{75}{f_s \left(\frac{\text{ton}}{\text{cm}^2} \right)} \quad (\text{ACI 10 - 4})$$

$$s_{\max} = \frac{95}{0.6 \cdot 4.2} - 2.5 \cdot 7.0 = 20 \text{ cm} \leq \frac{75}{0.6 \cdot 4.2} = 30 \text{ cm}$$

$$\therefore s_{\max} \leq 20 \text{ cm O.K.}$$

Usaremos barras de 1/2" espaciadas cada 13.50 cm.

Las barras de 1/2" deben desarrollarse desde las caras de la columna hacia los bordes izquierdo y derecho de la zapata. En nuestro caso disponemos de unos $60 \text{ cm} - 7 \text{ cm} = 53 \text{ cm}$ hacia cada borde para desarrollar las barras. En los extremos de las barras de 1/2" usaremos ganchos, lo que arroja una longitud de desarrollo por el orden de $20 \cdot D_b = 25.4 \text{ cm} < 53 \text{ cm}$. O.K.

Observaciones

En zapatas cuadradas como las del Ejemplo 8.3 distribuiremos el refuerzo a flexión a espaciamiento constante en ambas direcciones.

En zapatas rectangulares distribuiremos el refuerzo a flexión de la siguiente manera,

- El refuerzo paralelo a la dirección larga (L_2) de la zapata se colocará a un espaciamiento constante.

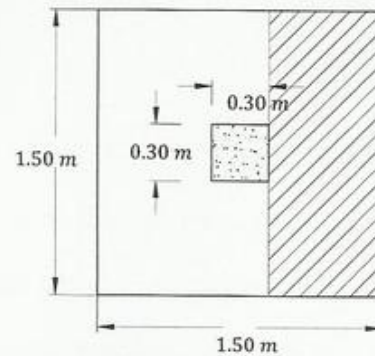
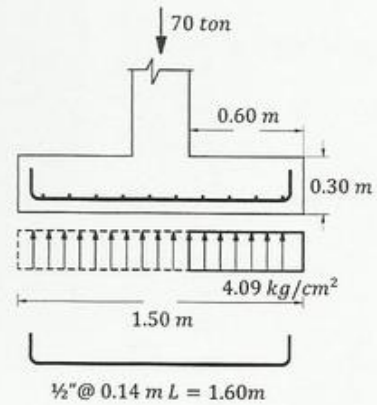


Fig. 8.19 Cálculo del acero a flexión. Ejercicio 8.3

- El refuerzo A_s paralelo a la dirección corta (L_1) calculado para una sección de ancho (L_2) de la zapata se colocará de la siguiente manera (ACI 318-08, 15.4.4.2),

Si definimos,

$$r = \frac{2}{\frac{L_2}{L_1} + 1}$$

En la franja central de ancho L_1 colocaremos un total de $r \cdot A_s$ y el restante será distribuido en las franjas externas, según se muestra en la Figura 8.20.

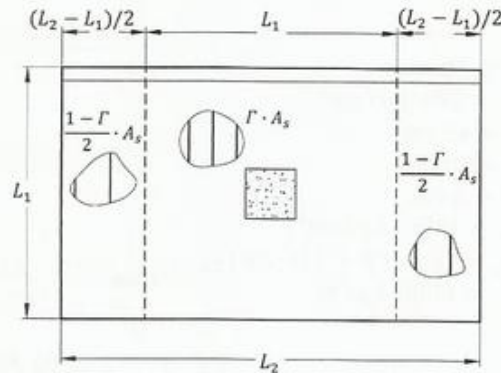


Fig. 8.20 Distribución del refuerzo a flexión en zapatas rectangulares

- Comprobación por corte viga ancha**

Sección crítica a $d = 28 \text{ cm}$ del borde de la columna (Figura 8.14a)

$$\bar{v}_{u \text{ crítico}} = \frac{\bar{V}_{u \text{ diseño}}}{\frac{150}{L} \cdot \frac{28}{d}} = \frac{\sigma_{ult} \cdot 150 \cdot (60 - 28) / \phi}{150 \cdot 28} = 6.23 \text{ kg/cm}^2$$

Aplicando la Ecuación 8.1, $v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = (0.53 \cdot \sqrt{240}) = 8.21 \text{ kg/cm}^2 > \bar{v}_{u \text{ crítico}} \text{ O.K.}$

- Fundación como losa en dos direcciones**

(Figura 8.14b). Aplicaremos las ecuaciones 8.11, 8.12 y 8.13, para calcular v_{c1} , v_{c2} y v_{c3} , respectivamente.

$$v_{c1} = (1 + 2 \cdot \beta') \cdot 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \dots \beta' = \frac{t_1}{t_2} = \frac{30}{30} = 1 \leq 1$$

$$v_{c1} = \frac{3.0}{(1 + 2 \cdot 1)} \cdot 0.53 \cdot \sqrt{240} = 24.63 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{c2} = (1 + \gamma') \cdot 0.53 \sqrt{f'_c} \dots \gamma' = \frac{\alpha_s \cdot d}{2 \cdot (t_1 + t_2 + 2 \cdot d)} = \frac{20 \cdot 28}{2 \cdot (30 + 30 + 2 \cdot 28)} = 2.41$$

$$v_{c2} = \frac{1+2.41}{(3.41)} \cdot 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = 27.99 \text{ kg/cm}^2 \dots v_{c3} = (2) \cdot 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = 16.42 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_c \leq \left[\frac{24.63}{v_{c1}} \quad \frac{27.99}{v_{c2}} \quad \frac{16.42}{v_{c3}} \right] \text{ kg/cm}^2$$

$$v_c = 16.42 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{debe cumplirse} \quad v_c \geq \frac{V_{u \text{ diseño}} / \phi}{b_o \cdot d}$$

$$V_{u \text{ diseño}} = \frac{4.09 \text{ kg/cm}^2}{92000} [150 \cdot 150 - (28 + 30) \cdot (28 + 30)] = 78245 \text{ kg}$$

$$\frac{16.42}{v_c} \text{ kg/cm}^2 \geq \frac{78245 / 0.75}{\frac{232 \cdot 28}{\bar{v}_u}} = 16.06 \text{ kg/cm}^2 \text{ O.K.} \blacksquare$$

EJEMPLO 8.4

Viga en zona sísmica

$$\begin{aligned} b &= 30 \text{ cm} \\ f'_c &= 240 \text{ kg/cm}^2 \\ d &= 45 \text{ cm} \\ h &= 50 \text{ cm} \\ d' &= 5 \text{ cm} \\ F_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\ w_u &= (1.2 \cdot CP + 1.0 \cdot CV) \\ &= 6000 \text{ kg/m} \end{aligned}$$

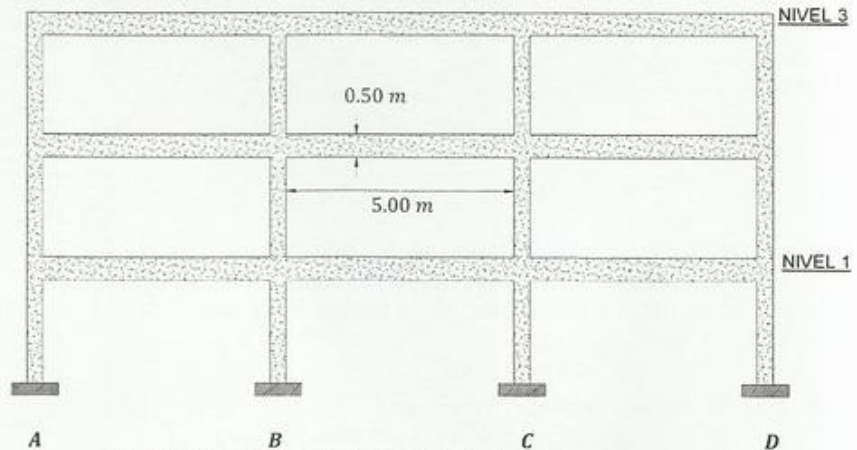


Fig. 8.21 Pórtico en estudio para diseño de estribos en zona sísmica. Ejercicio 8.4

Calcular la separación de estribos para la viga B – C del nivel 2.

Sección crítica: en el borde de B y C

Al calcular los aceros en B y C para las combinaciones más desfavorables de cargas verticales y sismo, se decidió colocar las barras siguientes,

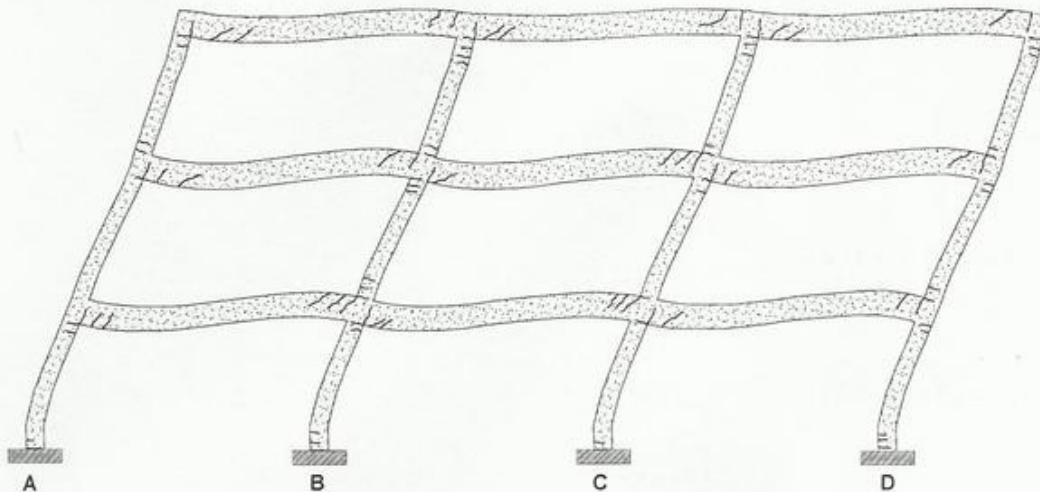


Fig. 8.22 Deformada del pórtico bajo el sismo. Ejercicio 8.4

• **En apoyo B**

$$\begin{aligned} \text{Arriba } 5 \text{ de } 1'' &= 25.30 \text{ cm}^2 \\ \text{Abajo } 3 \text{ de } 1'' &= 15.18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Capacidad a flexión positiva (tracción abajo). Al aplicar la Ecuación 5.28 nos viene,

$$\bar{M}_{uB}^+ = A_s \cdot [1.25 \cdot F_y] \cdot 7/8 \cdot d \rightarrow 15.18 \cdot [1.25 \cdot 4200] \cdot 7/8 \cdot 45 \therefore \bar{M}_{uB}^+ = 31380 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Capacidad a flexión negativa (tracción arriba),

$$\bar{M}_{uB}^- = 25.30 \cdot [1.25 \cdot 4200] \cdot 7/8 \cdot 45 \dots \dots \bar{M}_{uB}^- = 52300 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Un análisis exacto asumiendo que el acero endurece hasta alcanzar un esfuerzo de $1.25 \cdot F_y$ arroja,

Flexión positiva, $c = 6.90 \text{ cm} \dots \epsilon_s = 3.3 \cdot \epsilon_y \dots \bar{M}_{uB}^+ = 32656 \text{ kg} \cdot \text{m}$

(4.0 % mayor que la fórmula aproximada)

Flexión negativa, $c = 14 \text{ cm} \dots \epsilon_s = 8.3 \cdot \epsilon_y \dots \bar{M}_{uB}^- = 53030 \text{ kg} \cdot \text{m}$

(1.3% mayor que la fórmula aproximada)

- **En apoyo C**

Arriba 5 de 7/8" = 19.39 cm^2

Abajo 3 de 7/8" = 11.63 cm^2

Capacidad a flexión positiva,

$$\bar{M}_{uC}^+ = 11.63 \cdot [1.25 \cdot 4200] \cdot 7/8 \cdot 45$$

$$\bar{M}_{uC}^+ = 24041 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Capacidad a flexión negativa,

$$\bar{M}_{uC}^- = 19.39 \cdot [1.25 \cdot 4200] \cdot 7/8 \cdot 45$$

$$\bar{M}_{uC}^- = 40082 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

El análisis exacto asumiendo $T = 1.25 \cdot F_y$ arroja,

Flexión positiva, $c = 6.45 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 9.0 \cdot \epsilon_y$, $\bar{M}_{uC}^+ = 25163 \text{ kg} \cdot \text{m}$

Flexión negativa, $c = 11.6 \text{ cm}$, $\epsilon_s = 4.3 \cdot \epsilon_y$, $\bar{M}_{uC}^- = 40854 \text{ kg} \cdot \text{m}$

Usaremos los resultados arrojados por las fórmulas aproximadas debido a que las diferencias con los exactos son insignificantes para la precisión requerida en el cálculo de estribos (no llegan al 5%).

- **Calcularemos los máximos cortes que se pueden producir en los extremos de la viga.**

i) Los cortes debidos a cargas verticales (Figura 8.23),

$$V_o = \frac{w_u \cdot L}{2} = \frac{6000 \cdot 5}{2} = 15000 \text{ kg}$$

ii) Los cortes debido al sismo en sentido este (figuras 8.23 y 8.24): se obtienen haciendo sumatoria de momentos respecto a un extremo de la viga,

$$V_h^{\rightarrow} = \frac{M_{nB}^+ + M_{nC}^-}{L} = \frac{31380 + 40082}{5} = 14292 \text{ kg}$$

iii) Los cortes debido al sismo en sentido oeste (figuras 8.23),

$$V_h^{\leftarrow} = \frac{M_{nB}^- + M_{nC}^+}{L} = \frac{52300 + 24041}{5} = 15268 \text{ kg}$$

- **Los cortes totales (gravedad+sismo). Por estática obtenemos (Figura 8.23),**

Sismo ...	este. Corte en el apoyo B (Figura 8.23a)	$V_o + V_h^{\leftarrow} = 15000 - 14292 = 708 \text{ kg} \uparrow$
	este. Corte en el apoyo C (Figura 8.23a)	$V_o + V_h^{\rightarrow} = 15000 + 14292 = 29293 \text{ kg} \uparrow$
	oeste. Corte en el apoyo B (Figura 8.23b)	$V_o + V_h^{\rightarrow} = 15000 + 15258 = 30268 \text{ kg} \uparrow$
	oeste. Corte en el apoyo C (Figura 8.23b)	$V_o + V_h^{\leftarrow} = 15000 - 15268 = -268 \text{ kg} \downarrow$

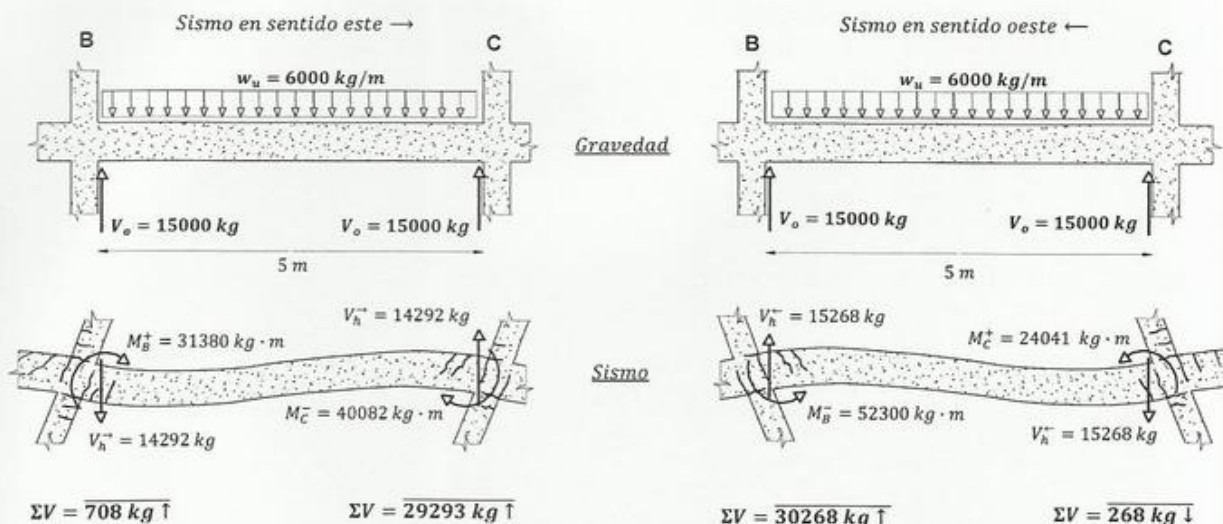


Fig. 8.23 Cálculo de los cortes de diseño. Ejemplo 8.4

- Verificaremos que el corte máximo permitido por norma no se exceda.

$$\bar{v}_{u,max} = \frac{\bar{V}_{u,max}}{b \cdot d} = \frac{30268 / (0.75)}{30 \cdot 45} = 29.89 \text{ kg/cm}^2 < 5 \cdot v_c = 41.05 \text{ kg/cm}^2 \quad O.K$$

- Las expresiones de fuerza cortante tomando a x como la distancia medida desde el apoyo B en dirección a C, quedarán así,

$$\text{Sismo en sentido este, } V_u^-(x) = 708 - \bar{w}_u \cdot x$$

$$\text{Sismo en sentido oeste, } V_u^+(x) = 30268 - \bar{w}_u \cdot x$$

Los resultados se resumen en las tablas 8.4, 8.5 y 8.6.

- Separaciones máximas

En la zona confinada $2 \cdot h \sim 1.00 \text{ m}$.

$$s_{m\acute{a}x \text{ conf.}} = \left[\frac{d}{4}, \quad 24 \cdot d_e, \quad 8 \cdot D_b, \quad 30 \text{ cm} \right]$$

$$s_{m\acute{a}x \text{ conf.}} = [11.25, \quad 23, \quad 17.78, \quad 30] \text{ cm}$$

$$s_{m\acute{a}x \text{ conf.}} = 11.25 \text{ cm}$$

En zona no confinada (tramo central)

$$\bar{v}_u \leq 3 \cdot v_c = 24.63 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow s_{m\acute{a}x} = \left[\frac{d}{2}, \quad 60 \right] \text{ cm} \dots s_{m\acute{a}x} = 22.5 \text{ cm}$$

$$\bar{v}_u > 3 \cdot v_c = 24.63 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow s_{m\acute{a}x} = \left[\frac{d}{4}, \quad 30 \right] \text{ cm} \dots s_{m\acute{a}x} = 11.25 \text{ cm}$$

Usaremos estribos de 3/8" de 2 ramas. Para el cálculo de estribos en zona sísmica recomendamos asumir $V_c = 0$ en zona confinada ($2 \cdot h \sim 1.00 \text{ m}$).

Tabla 8.4 Separación de estribos para $sismo^+$ (sentido este)

x (cm)	zona	V_u (kg)	$ \bar{V}_u $ (kg)	\bar{v}_u (kg/cm ²)	$S_{m\acute{a}x}$ (cm)	V_c (kg)	V_s (kg) [8.10]	S (cm) [8.9]	S^+ (cm)
0.0	Conf	707	942	0.70	11.25	0.00	943	285	11.25
1.0		-5293	7057	5.23	22.5	11084	-	-	22.50
2.0	Tramo	-11293	15057	11.15	22.5	11084	-	-	22.50
3.0		-17293	23057	17.08	22.5	11084	11973	22.4	22.40
4.0	Conf	-23293	31057	23.01	11.25	11084	19973	13.4	11.25
5.0		-29293	39057	28.93	11.25	0.00	39057	6.9	6.87

Tabla 8.5 Separación de estribos para $sismo^-$ (sentido oeste)

x (cm)	zona	V_u (kg)	$ \bar{V}_u $ (kg)	\bar{v}_u (kg/cm ²)	$S_{m\acute{a}x}$ (cm)	V_c (kg)	V_s (kg) [8.10]	S (cm) [8.9]	S^- (cm)
0.0	Conf	30268	40357	29.89	11.25	0.00	40357	6.65	6.65
1.0		24268	32357	23.97	11.25	11084	21273	12.6	11.25
2.0	Tramo	18268	24357	18.04	22.5	11084	13273	20.2	20.20
3.0		12268	16357	12.12	22.5	11084	-	-	22.50
4.0	Conf	6268	8357	6.19	11.25	11084	-	-	11.25
5.0		268	357	0.26	11.25	0.00	357	751.1	11.25

Tabla 8.6 Separación definitiva de estribos

x (cm)	zona	S^+ (cm)	S^- (cm)	S (cm)
0.0	Conf	11.3	6.7	6.7
1.0		22.5	11.3	11.3
2.0	Tramo	22.5	22.5	22.5
3.0		22.5	22.5	22.5
4.0	Conf	11.3	11.3	11.3
5.0		6.9	11.3	6.9

Conclusión

Entre 0 y 1 metros del apoyo B , y 4 y 5 metros usaremos estribos de $3/8'' @ 7 \text{ cm}$ (extremos, zona confinada).

Entre 1 y 4 metros del apoyo B , usaremos estribos de $3/8'' @ 21 \text{ cm}$ (tramo, zona central).

El primer estribo lo colaremos a una distancia menor o igual a 5 cm del apoyo. (Figura 8.24) ■

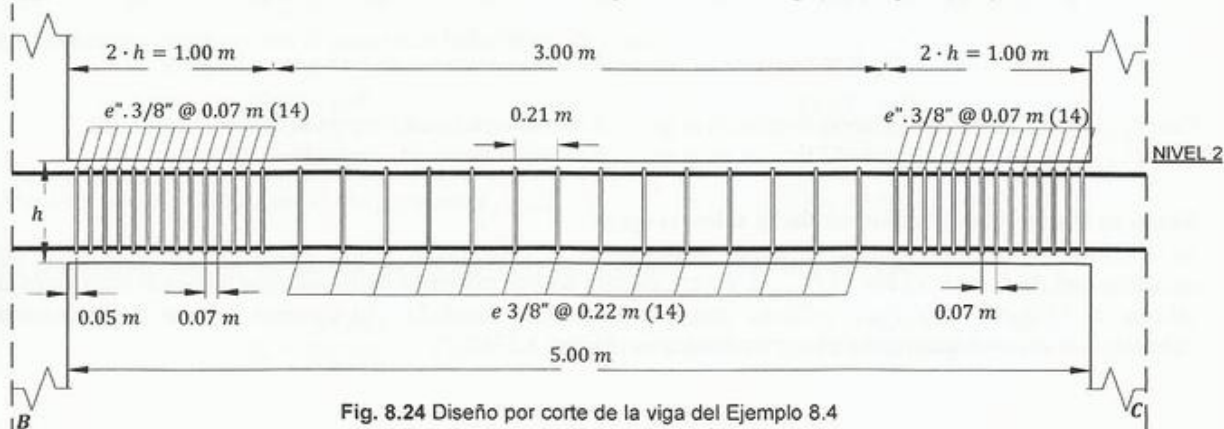


Fig. 8.24 Diseño por corte de la viga del Ejemplo 8.4

EJEMPLO 8.5

Calcular la separación de estribos requeridos en la columna
Del ejemplo 7.1.

$$P_u = 100 \text{ ton}$$

$$\text{Sismo actuando en el eje } x \quad P_{u \text{ sismo-eje } x} = 20 \text{ ton}$$

$$\text{Sismo actuando en el eje } y \quad P_{u \text{ sismo-eje } y} = 40 \text{ ton}$$

$$\rho = 2.5\% \dots h_{\text{piso}} = 2.70 \text{ m} \dots f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$$

El diagrama de interacción para la columna (Figura 7.15) se presenta nuevamente para mayor claridad en la Figura 8.26. Tendríamos las cargas $P_{exc x}$ y $P_{exc y}$ con excentricidades en x y en y que originan flexión en los ejes y , y x respectivamente.

$$P_{u \text{ exc } x} = P_u + P_{u \text{ sismo-eje } x} = 120 \text{ ton} \rightarrow \text{flexión sobre eje } y$$

$$P_{u \text{ exc } y} = P_u + P_{u \text{ sismo-eje } y} = 140 \text{ ton} \rightarrow \text{flexión sobre eje } x$$

Debido a que las fuerzas axiales son mayores que $0.05 \cdot A_g \cdot f'_c = 29 \text{ ton}$ se puede contar con V_c (Sección 8.6d)

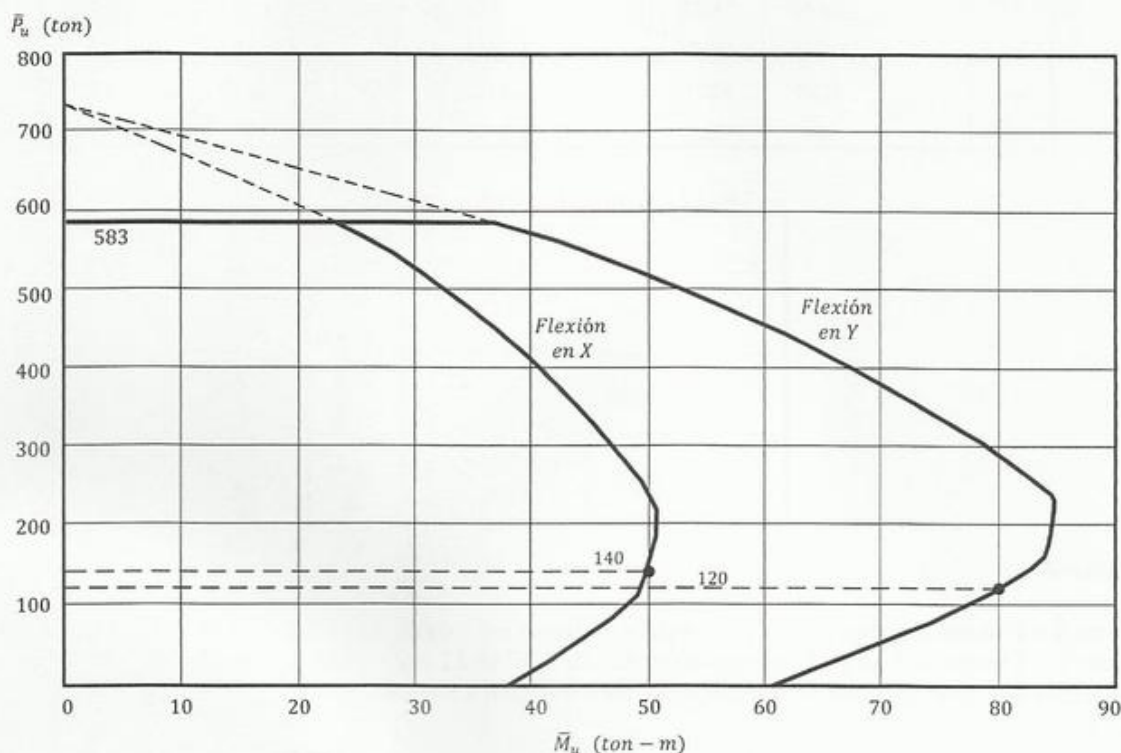


Fig. 8.26 Diagrama de interacción para las columnas de los ejemplos 7.1 y 7.2

Para $P_{u \text{ exc } x} = 120 \text{ ton}$ originando flexión en el eje y , el máximo momento esperado es de $80 \text{ ton} \cdot \text{m}$

Para $P_{u \text{ exc } y} = 140 \text{ ton}$ originando flexión en el eje x , el máximo momento esperado es de $50 \text{ ton} \cdot \text{m}$

Sismo en la dirección x (columna flecta sobre el eje y)

La máxima fuerza cortante que se puede producir en la columna al flectar sobre el eje y , es decir con excentricidad de P sobre el eje x ($P_{exc x}$), ocurre cuando ambos extremos de la columna alcanzan momentos de $80 \text{ ton} \cdot \text{m}$ (Figura 8.26). Por equilibrio, sumando momentos alrededor del extremo inferior de la columna calcularemos el corte actuante en el extremo superior (Figura 8.27a),

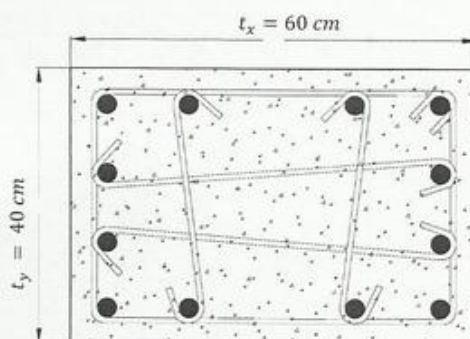


Fig. 8.25 Colocación adecuada del acero transversal en columnas (los ganchos se doblan hacia el centro de la columna)

$$V_{u,sismo x} = \frac{80 + 80}{2.70} = 59.26 \text{ ton} \rightarrow \dots \bar{V}_{u,sismo x} = \frac{V_{u,sismo x}}{\phi} = 79.01 \text{ ton}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales encontraremos el corte en el extremo inferior de la columna, 59.26 ton ←

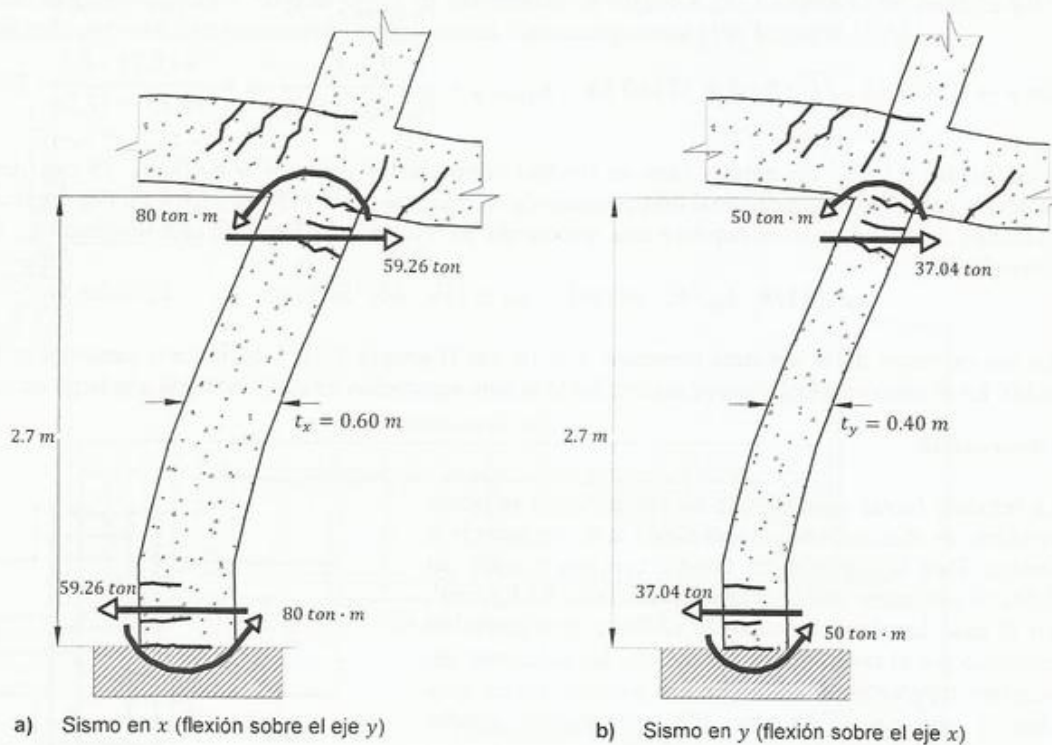


Fig. 8.27 Cortes máximos probables en los extremos de la columna (Ejemplo 8.5)

Sismo en la dirección y (columna flexa sobre el eje x)

Aplicando el mismo razonamiento calcularemos la máxima fuerza cortante que actúa sobre la columna cuando flexa sobre el eje y (Figura 8.26b) Para el extremo superior de la columna,

$$V_{u,sismo y} = \frac{50 + 50}{2.70} = 37.04 \text{ ton} \dots \bar{V}_{u,sismo y} = \frac{V_{u,sismo y}}{\phi} = 49.39 \text{ ton}$$

La fuerza cortante en el extremo inferior la calcularemos por equilibrio de fuerzas horizontales: 37.04 ton ←

Los esfuerzos cortantes con el sismo actuando en x y en y son,

$$\bar{v}_{u,sismo x} = \frac{79.01 \cdot 10^3}{40 \cdot 55} = 35.91 \text{ kg/cm}^2 \quad \bar{v}_{u,sismo y} = \frac{49.39 \cdot 10^3}{35 \cdot 60} = 23.52 \text{ kg/cm}^2$$

Menores que el máximo permitido por norma $\dots \dots 5 \cdot v_c = 5 \cdot (0.53 \cdot \sqrt{f'_c}) = 41.05 \text{ kg/cm}^2$ (O.K)

Se recomienda que v_u no exceda los 25 kg/cm² en columnas.....en nuestro caso,

$$v_u = \frac{59260}{40 \cdot 55} = 26.93 \dots \dots \text{Digamos O.K (7\% por encima)}$$

Usaremos estribos y ligaduras de 3/8" con cuatro ramas, con el detalle que se muestra en la Figura 8.25. La separación de estribos requerida por corte la calcularemos aplicando la Ecuación 8.9. Las separaciones requeridas cuando el sismo actúa en x y en y serían,

$$\text{En } x \rightarrow V_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b \cdot d = 18063 \text{ kg} \dots s_{\text{sismo } x} = \frac{A_v \cdot F_y}{\bar{V}_{u, \text{sismo } x} - V_c} \cdot d = \frac{4 \cdot 0.71 \cdot 4.2}{79.01 - 18.06} \cdot 55 = 10.76 \text{ cm}$$

$$\text{En } y \rightarrow V_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b \cdot d = 17243 \text{ kg} \dots s_{\text{sismo } y} = \frac{A_v \cdot F_y}{\bar{V}_{u, \text{sismo } y} - V_c} \cdot d = \frac{4 \cdot 0.71 \cdot 4.2}{49.39 - 17.24} \cdot 35 = 12.99 \text{ cm}$$

Asumiremos 11 cm. En ningún caso se tendrán separaciones mayores a $6 \cdot D_b$ ni 15 cm, donde D_b es el diámetro del refuerzo longitudinal más pequeño de la columna (ACI 318-08, 21.6.4.5). Por confinamiento en los extremos de la columna se requiere una separación de 10 cm a lo largo de una longitud L_o (Sección 7.8d, Ejemplo 7.4),

$$L_o \geq [1/6 \cdot L_u, h, 50 \text{ cm}], \quad L_o \geq [45, 60, 50] \text{ cm} \quad \therefore \quad L_o = 60 \text{ cm}$$

En los extremos de la columna usaremos $s = 10 \text{ cm}$ (Ejemplo 7.4), y en la parte central $s = 11 \text{ cm}$ (Figura 8.28). En el nodo viga-columna se mantendrá la misma separación de estribos usada a la largo de L_o .

Observación

La máxima fuerza cortante que en una columna se puede producir es directamente proporcional a su resistencia a flexión. Para la columna en estudio con una cuantía del 2.5% se encuentra un esfuerzo máximo de 26.93 kg/cm^2 . En el caso común del diseño de edificios con alturas de entrepiso por el orden de los 3.0 metros, las columnas con cuantías superiores al 2.5% pueden producir cortes muy altos y peligrosos. Es por ello conveniente diseñar columnas con cuantías inferiores al 2.5%.

El incremento en la resistencia de una columna se logra preferiblemente aumentando el área de la sección transversal sin exceder cuantías del 2.5%.

Un caso común de la práctica del diseño de edificios es encontrar un par de columnas en los pisos inferiores que luego del análisis estructural requieren cuantías superiores al 2.5%, digamos del 4.0%. La reacción inmediata pudiese ser la de aumentar la dimensión de éstas y realizar un segundo análisis estructural. La sorpresa es que luego de este las columnas ensanchadas requieren cuantías superiores al 4.0%. La razón es que al aumentar el área de la columna, sobretodo su profundidad, se hace esta un elemento más rígido que por ende atrae más corte y momento. La solución a este problema es la de aumentar las dimensiones de todas las columnas y en muchas ocasiones es necesario aumentar también la profundidad de las vigas.

A los interesados en el comportamiento de columnas bajo cortante por cargas sísmicas se les recomienda consultar a Pujol, Sozen y Ramírez (2002), Wight y Sozen (1975), Ghannoum, Shin, y Moehle (2005) y a Bett, Klingner, y Jirsa (1988) sobre el reforzamiento de columnas existentes.

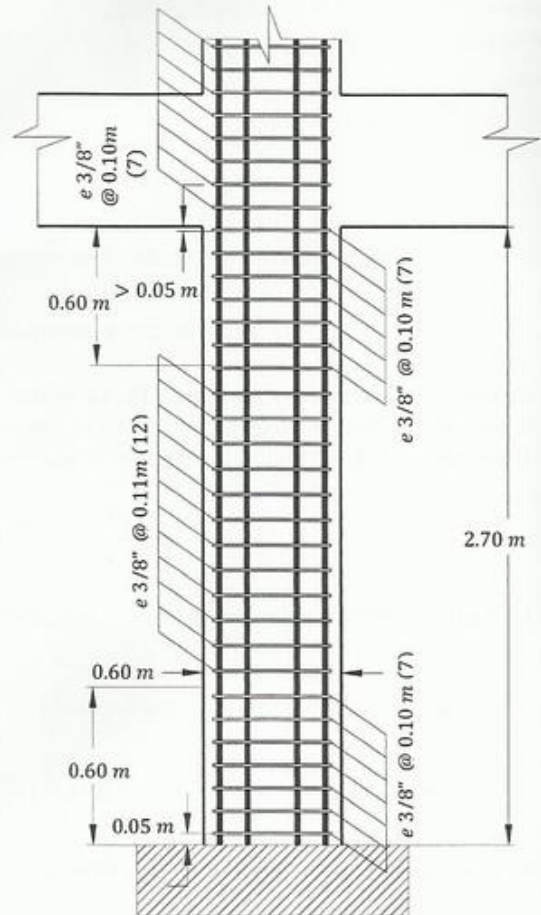


Fig. 8.28 Diseño de los estribos (Ejemplo 8.5)

8.8 MÉTODO DE DISEÑO DE CORTANTE POR FRICCIÓN

El método de cortante por fricción es muy útil para verificar la resistencia al corte directo en elementos de concreto armado, como se muestra en la Figura 8.29. Por ejemplo, en construcciones de concreto prefabricado, conexiones, cartelas etc. En el diseño de cortante por fricción se identifican los potenciales planos de falla y se proporciona refuerzo para cruzarlo o coserlo como se muestra en la Figura 8.29. El método de cortante por fricción es el utilizado para calcular los conectores de corte en vigas compuestas (Ver Ejemplo 15.6).

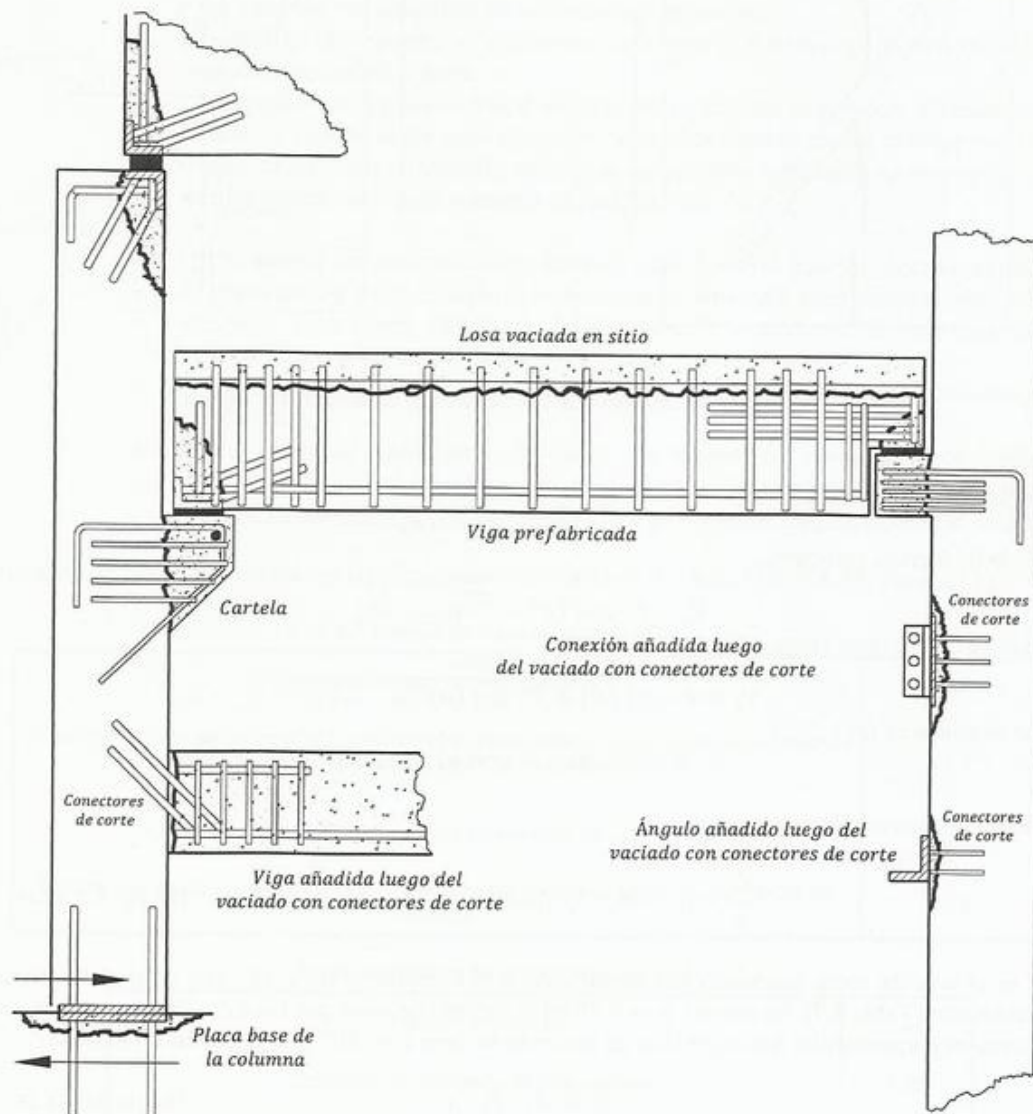


Fig. 8.29 Ejemplo de la aplicación del método de cortante por fricción adaptado de Fanella y Rabbat (2002)

Al intentar deslizarse un elemento sobre el plano de falla se producen (Figura 8.30)

- Fuerzas de tracción en el acero.
- Fuerzas de roce entre las dos superficies de concreto. El coeficiente de fricción entre ambas superficies de concreto se define como μ .

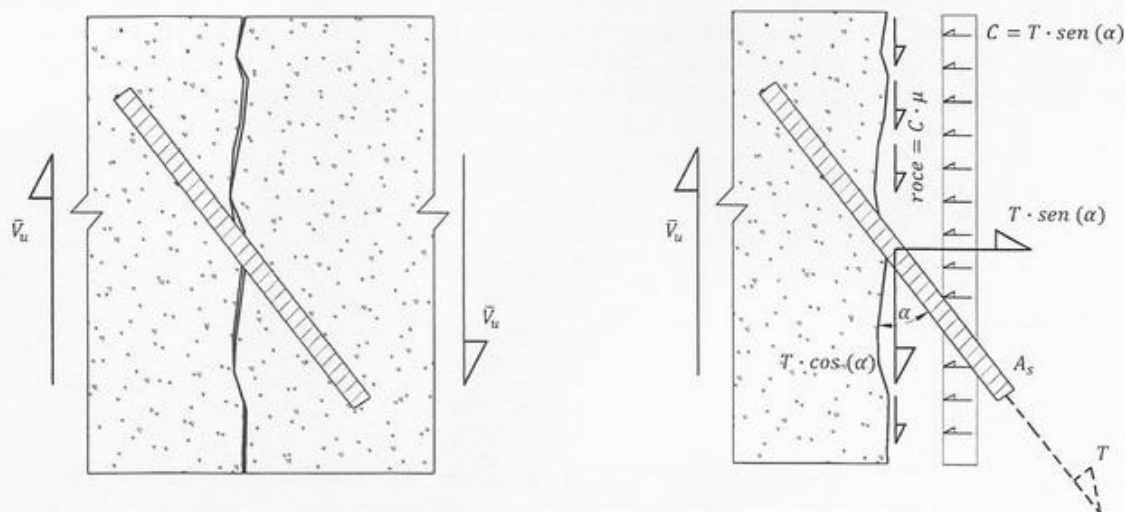


Fig. 8.30 Diagrama de cuerpo. Método de cortante por fricción.

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$T \cdot \text{sen}(\alpha) = C \dots \dots (a)$$

Por equilibrio de fuerzas verticales,

$$\bar{V}_u = T \cdot \cos(\alpha) + \overbrace{C \cdot \mu}^{\text{roce}} \dots \dots (b)$$

Sustituyendo (a) en (b) nos viene,

$$\bar{V}_u = T \cdot \cos(\alpha) + \overbrace{T \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \mu}^{\text{roce}} \dots \dots (c)$$

Arreglando términos en (c),

$$\bar{V}_u = T \cdot [\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha)] \dots \dots (d)$$

Asumiendo que el acero cede nos queda,

$$\frac{V_u}{\phi} = \bar{V}_u = A_s \cdot F_y \cdot [\cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha) \cdot \mu] \quad [8.14a] \text{ ACI 11.26}$$

Donde A_s es el área de acero que cruza la superficie de deslizamiento o falla. El valor de μ se ha determinado experimentalmente (Tabla 8.7). Se tomará $\phi = 0.75$ en el método de corte por fricción. En el caso más común en que el refuerzo es perpendicular a la superficie de concreto se tiene $\alpha = 90^\circ$ y la ecuación 8.14 queda,

$$\bar{V}_u = A_s \cdot F_y \cdot \mu \quad [8.14b] \text{ ACI 11.25}$$

Bass, Carrasquillo, Jirsa (1989) Realizaron estudios donde involucraron las siguientes variables,

- Rugosidad de la superficie existente.
- La cantidad y calidad del acero que atraviesa el plano de falla o deslizamiento.
- Detalles del refuerzo en el concreto existente y el nuevo.
- La resistencia a compresión de ambos concretos.
- Procedimientos de vaciado.

Encontrando que,

- A mayor longitud de anclaje a ambos lados de la superficie de falla hay mejor desarrollo del refuerzo y aumenta la capacidad a corte por fricción.
- A mayor cantidad de refuerzo que cruza la superficie de contacto mayor es la capacidad a corte.
- Para concreto con rugosidades grandes en el plano de contacto o deslizamiento se encontró que mientras mayor es la resistencia a compresión mayor es la resistencia al corte por fricción. La resistencia a compresión del concreto tiene poca influencia cuando las rugosidades de la superficie de contacto son pequeñas.
- Los detalles del refuerzo en el concreto existente y el nuevo tuvieron poco efecto sobre la capacidad resistente a corte.
- La dirección de vaciado vertical u horizontal afectaron muy poco la resistencia al corte siempre y cuando el concreto nuevo se vació directamente contra el viejo y se vibró bien.
- El uso de concreto proyectado resultó en capacidades resistentes a corte un poco más bajas que las encontradas para concreto vaciado en sitio.

Se recomienda,

- La resistencia del concreto nuevo debe ser igual o mayor a la del concreto existente.
- El refuerzo que cruza la superficie de contacto debe estar bien anclado dentro del concreto existente. Este estará distribuido uniformemente a través de la potencial superficie de grieta y se anclará a ambos lados de la misma.
- Se recomienda que la superficie de contacto tenga rugosidades de aproximadamente 0.5 cm de altura.
- En el caso de conectores de corte sembrados en concreto endurecido mediante perforaciones hechas con taladro es muy importante limpiar muy bien el agujero donde se sembrará el conector luego de culminada la perforación y antes de colocar el gel epóxico.

El coeficiente de fricción μ tendrá los siguientes valores (Tablas 8.7 y 8.8, ACI-318-08, Sección 11.7.4.3)

Tabla 8.7 Valores de μ sugeridos por ACI (11.7.4.3)

Concreto vaciado monolíticamente	1.4 λ
Concreto vaciado sobre concreto endurecido cuya superficie tenga rugosidades hechas intencionalmente y que su altura sobrepase los 0.5 cm	1.0 λ
Concreto vaciado sobre concreto endurecido sin rugosidades	0.6 λ
Concreto anclado a acero estructural laminado por medio de pernos o por barras de refuerzo	0.7 λ

Tabla 8.8 Valores de λ sugeridos por ACI (11.7.4.3)

Tipo de Concreto	λ
Concreto de agregado de peso normal	1.00
Concreto de agregado liviano con arena	0.85
Concreto de agregado totalmente liviano	0.75

La sección 11.6.5 del ACI-318-08 limita para efectos del diseño el máximo esfuerzo cortante \bar{V}_u/A_c que se puede producir en la superficie de la grieta de concreto con área A_c a los siguientes valores,

$$\frac{\bar{V}_u}{A_c} \leq \text{menor} [(33 + 0.08 \cdot f'_c), 110 \text{ kg/cm}^2, 0.20 \cdot f'_c]$$

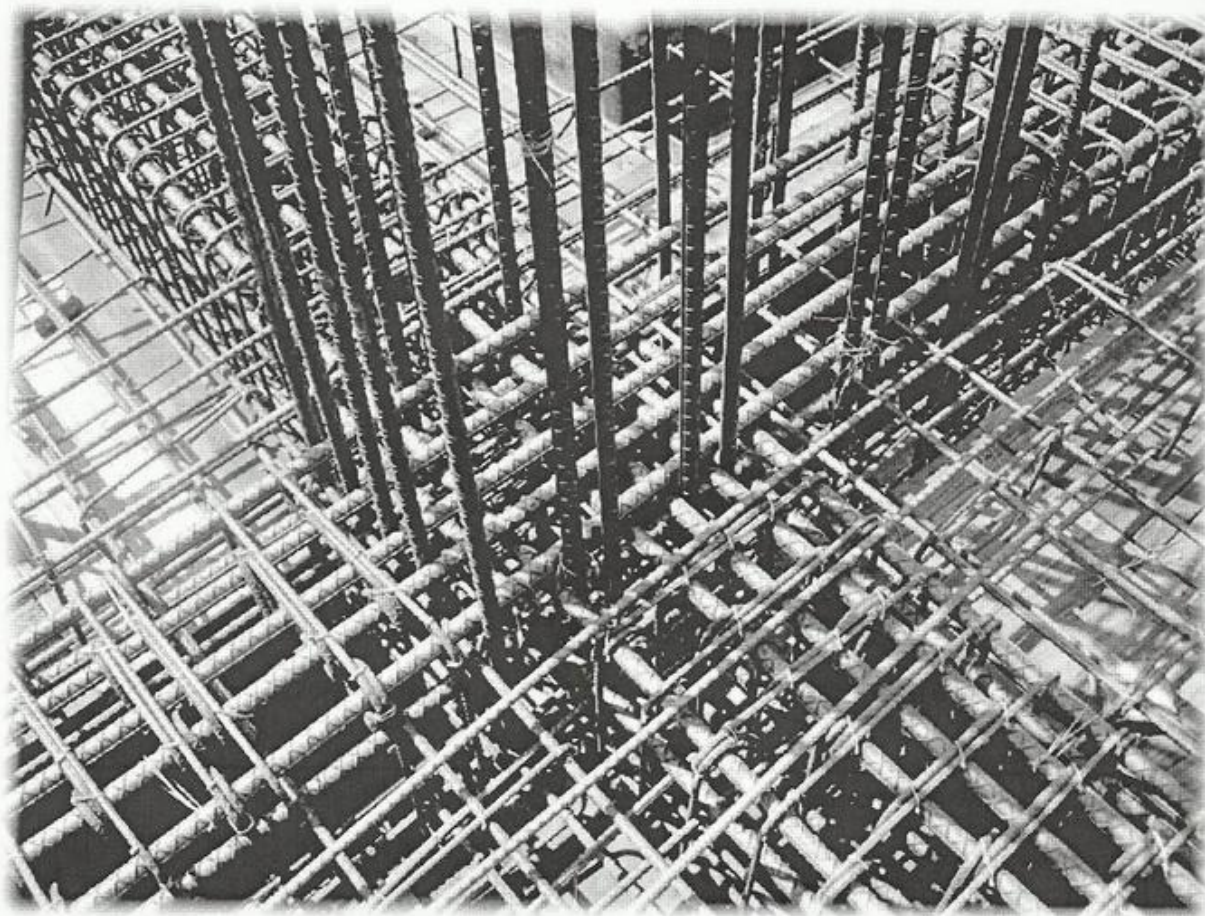


Fig. 8.31 Detalle de estribos en zona confinada
Cortesía de Pablo A. Fargier G.

9.1 DEFINICIÓN

A la unión entre el concreto y el acero la llamamos adherencia. Hace posible que los dos materiales trabajen juntos y los esfuerzos se transmitan del uno al otro (Figura 9.1). El esfuerzo de adherencia solo se produce cuando la tracción o compresión en el acero cambia de un punto a otro. Si no hay adherencia entre A y B, el esfuerzo en el acero se mantiene constante, es decir se tendría $T_1 = T_2$.

Por esfuerzo u de adherencia se entiende el corte unitario que se produce en la superficie de contacto entre el concreto y el acero debido a la variación de la tracción o de la compresión. La barra de la Figura 9.1 tiende a deslizarse hacia la derecha debido a que $T_2 > T_1$. Los factores que impiden este deslizamiento del acero sobre el concreto son,

- La adhesión que es relativamente débil.
- La fricción que aumenta con la rugosidad de las barras.
- El efecto de cuña que se produce al utilizar cabillas estriadas, debido a las protuberancias o estrías que dan lugar a compresiones que impiden el deslizamiento (Figura 9.1).

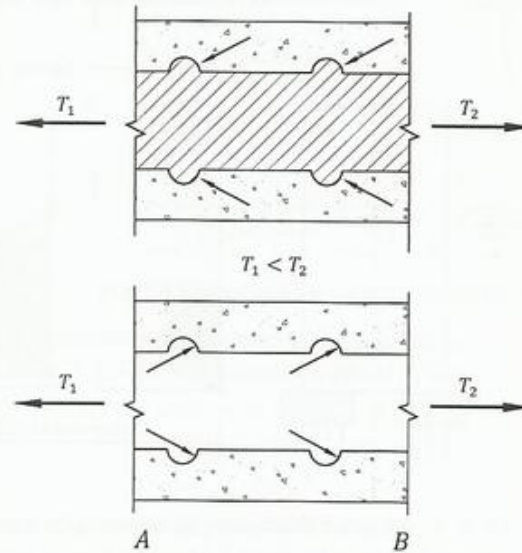


Fig. 9.1 Transferencia de fuerzas entre el acero y concreto en barras estriadas

9.2 ENSAYOS PARA ESTUDIAR LA ADHERENCIA ENTRE EL CONCRETO Y EL ACERO.

a) ENSAYO DE EXTRACCIÓN DE BARRAS DE CILINDROS DE CONCRETO

Un primer tipo de ensayo que describiremos consiste en extraer una barra embebida en un cilindro o prisma de concreto (Figura 9.2). La barra sobresale en uno de los extremos A, donde se aplica la fuerza y se miden la tracción T y el deslizamiento.

El esfuerzo de adherencia varía a lo largo de la longitud de anclaje de la barra dentro del cilindro y la forma de variación depende del tipo de cabilla ensayada, sea esta lisa o estriada.

La falla final se puede producir,

- **Por rotura de la barra** cuando se tiene longitud de anclaje grande y F_y pequeño.
- **Por agrietamiento longitudinal del concreto** que es el caso más común tanto para cabillas lisas como estriadas.
- **Por deslizamiento de la barra** cuando esta es excepcionalmente lisa.
- **Por corte a lo largo del cilindro de concreto**, caso que ocurre para cabillas estriadas que al fallar salen de la probeta recubiertas de una capa de concreto.

En este tipo de ensayo con cabilla lisa se tiene (Figura 9.2),

- Aun para cargas pequeñas el esfuerzo u es grande cerca del extremo cargado A y la parte superior de la barra está libre de esfuerzos.

- Al aumentar la carga el deslizamiento es mayor y el esfuerzo de adherencia se extiende a una mayor porción de la barra, hasta alcanzarse la falla final.

Actualmente solo está permitido el uso de barras estriadas.

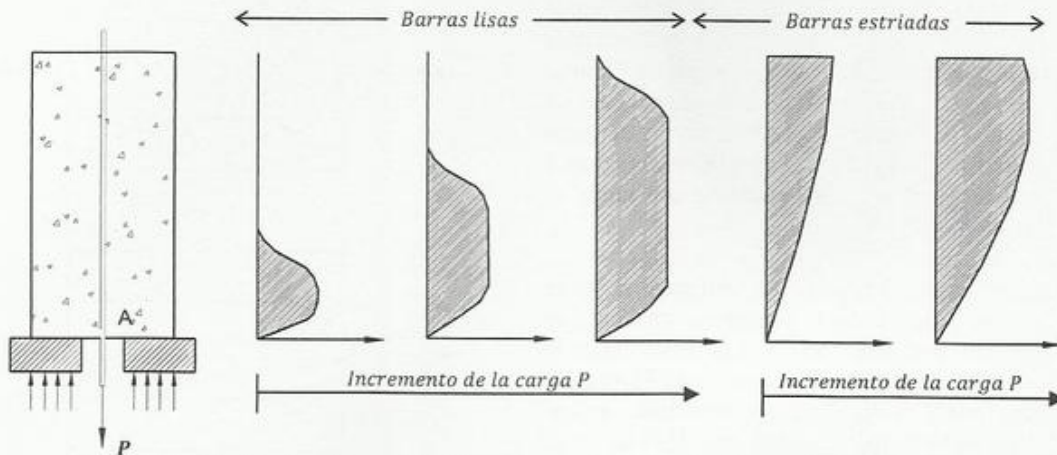


Fig. 9.2 Distribución de esfuerzos de adherencia en el contorno de la barra (Ensayo de extracción)

Aunque este ensayo de extracción es ilustrativo del comportamiento del concreto armado, no interpreta fielmente el problema de adherencia ya que el concreto que rodea a la barra está sometido a compresión y no a tracción, como ocurre en la zona del acero A_s en vigas o losas.

b) ENSAYOS DE GOTO (1971)

Se aplica tracción en ambos extremos de una cabilla estriada embebida en un prisma de concreto de sección cuadrada usualmente de 12 cm de lado, imitando así lo que ocurre en la zona de tracción de una viga. Observaciones experimentales reportadas por Goto indican,

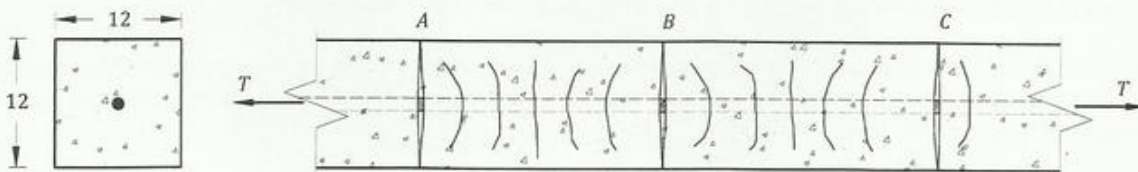


Fig. 9.3 Ensayo de Goto (1971)

- Se producen grietas primarias verticales por tracción cuando en la barra $f_s \approx 570 \text{ kg/cm}^2$ (Figura 9.3), indicadas como A, B, C, espaciadas cada 22 a 28 cm, similares a las fisuras de tracción por flexión.
- Para esfuerzos mayores ($f_s \approx 3000 \text{ kg/cm}^2$) se forman grietas secundarias que salen de las estrias, inclinándose hacia la primaria más próxima. En la estria central (entre dos grietas primarias) la fisura es casi vertical.
- En los extremos de la probeta, la distribución de grietas es igual que en la zona media.

Esfuerzos en el contorno de barras estriadas

Sean,

D' = Diámetro de la barra entre dos estrias.

D = Diámetro promedio $D' + a$.

La ecuación de equilibrio de fuerzas (ver Figura 9.4) es,

$$v_c \cdot \pi \cdot (D + a) \cdot c = v_a \cdot \pi \cdot (D - a) \cdot c + f \cdot \pi \cdot D \cdot a$$

$$v_c \cdot (D + a) \cdot c = v_a \cdot (D - a) \cdot c + f \cdot D \cdot a$$

Donde v_c es el corte unitario a lo largo de AB ; v_a es el esfuerzo en el área de contacto barra-concreto y f es la compresión unitaria que actúa contra las estrias de altura a . Al aumentar la tracción v_a se anula rápidamente, resultando,

$$v_c \cdot \left(\frac{c}{a}\right) = f \cdot \frac{D}{D + a} \cong f$$

- Si c es pequeño la falla es por corte a lo largo de AB .
- Si c es grande el concreto próximo a la estria se aplasta produciéndose agrietamiento longitudinal.
- Para evitar la falla por corte se toma $c/a > 14$. Las normas A.S.T.M. recomiendan utilizar c/a entre 14 y 17.5.

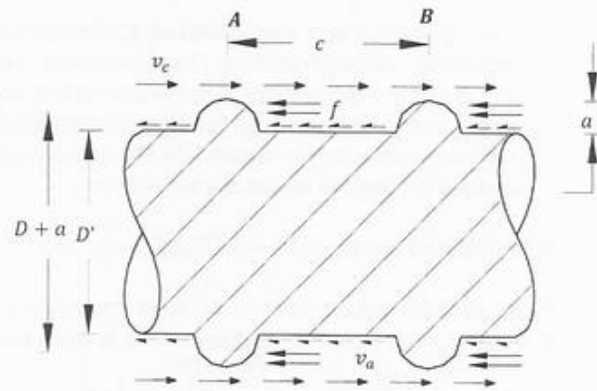


Fig. 9.4 Esfuerzos en el contorno de las barras

c) ENSAYOS DE UNTRAUER Y WARREN (1977)

Realizados en vigas de concreto armado: $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ y $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. $b = 46 \text{ cm}$, $h = 51 \text{ cm}$, recubrimiento neto $rec = 5.4 \text{ cm}$, $A'_s = 2$ barras # 6, estribos de 5/8" cada 13 cm. El acero de tracción A_s formado por cabillas # 9 a separaciones netas variables (s), según se utilicen 3, 4, 5 ó 6 barras. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 9.1. Observemos como la presencia de estribos contribuye a aumentar los valores de u .

Tabla 9.1 Resumen de los resultados de los ensayos de Unitrauer y Warren

No. de cabillas	A_s (cm ²)	s_{neta} (cm)	r/s_{neta}	Esfuerzo ultimo u (kg/cm ²)	
				Viga sin estribos	Viga con estribos
3	19.32	13.3	0.40	29	37
4	25.76	7.9	0.68	23	29
5	32.2	5.2	1.04	15	20
6	38.64	3.6	1.50	12	16

Cuando el recubrimiento es grande en relación con la separación (r/s mayor que $\frac{1}{2}$) la falla final se produce como en la Figura 9.5c. El caso de r/s menor que $\frac{1}{2}$ aparece en las figuras 9.5a y 9.5b.

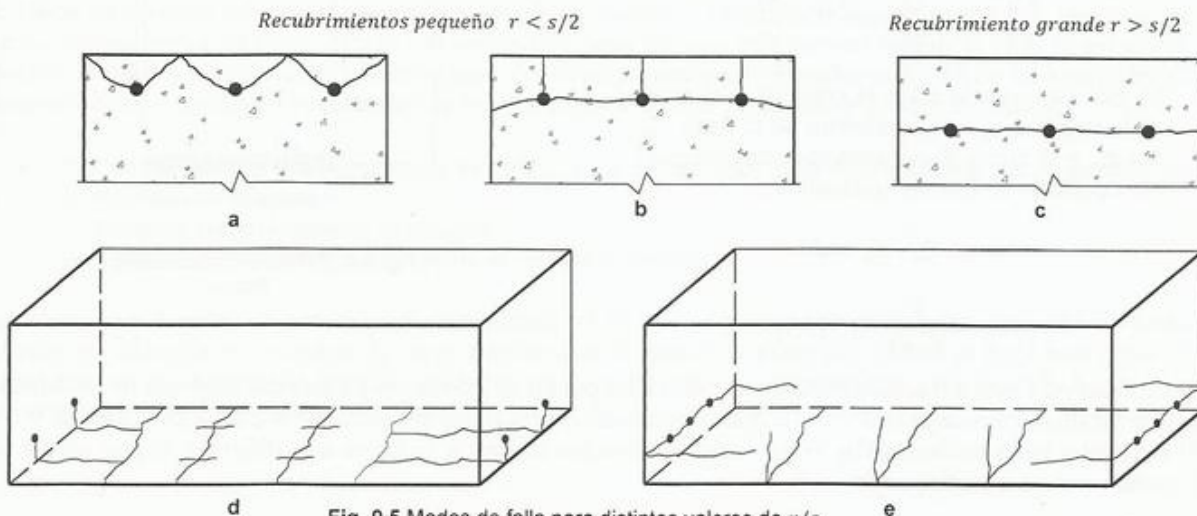


Fig. 9.5 Modos de falla para distintos valores de r/s
Adaptado de Winter, Urquhart, O'Rourke y Nilson (1964)

Las figuras 9.5 d y e muestran el agrietamiento típico en vigas con separaciones entre barras (s) grandes y pequeñas, respectivamente. La resistencia al desgarramiento disminuye para recubrimientos pequeños $r < 5 \text{ cm}$ y separaciones $s < 10 \text{ cm}$. (Para casos en que s es pequeño hay poco concreto entre barras la grieta se produce entre las cabillas, horizontalmente, -Figura 9.5e-). En algunos casos puede ser mejor utilizar menos barras a mayor separación sin excederse de las máximas -ver Ecuación 4.3, ACI 318-08, Sección 10.4, aunque la longitud de anclaje sea mayor-.

9.3 ADHERENCIA POR ANCLAJE

Es el valor del esfuerzo promedio en la longitud L de anclaje, cuando la fuerza en la barra cambia de un valor T ó C a un valor cero. Sea D_b el diámetro de la barra tendríamos,

$$A_b = \pi \cdot \frac{D_b^2}{4} \dots \Sigma_o = \overbrace{\pi \cdot D_b}^{\text{perímetro}} \text{ por equilibrio de fzas horizontales } \rightarrow \frac{\text{Fza en la barra}}{A_b \cdot F_y} = \Sigma_o \cdot L \cdot u$$

$$\therefore L = A_b \cdot \frac{F_y}{\Sigma_o \cdot u} \text{ es decir } L = F_y \cdot \frac{D_b}{4 \cdot u}$$

Es necesario enfatizar la importancia de anclar las barras una longitud suficiente en los extremos de vigas y losas. Por lo menos un tercio y preferiblemente la mitad de las cabillas del acero positivo (abajo) debe anclarse en los apoyos.

9.4 ADHERENCIA POR FLEXIÓN

Es el valor del esfuerzo promedio en la longitud x debido al cambio de fuerza en la barra producido por la variación de la flexión (Figura 9.6).

En 1 tenemos, M_1 y V

En 2 tenemos,

$$M_2 = M_1 + \overbrace{V \cdot dx}^{dM} \dots V - w \cdot dx$$

Definiremos,

$$T_2 - T_1 = dT \quad dM = dT \cdot z$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad dM = V \cdot dx$$

$$dT = \frac{dM}{dz} = V \cdot \frac{dx}{dz} \rightarrow V = \frac{dT}{dx}$$

El área de contacto entre el concreto y el acero en la longitud d_x es el perímetro de la barra Σ_o por d_x , y la fuerza de adherencia la calcularemos por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$= u \cdot \Sigma_o \cdot d_x = dT$$

$$\therefore u = \frac{V}{\Sigma_o \cdot z} \quad [9.1]$$

Los valores máximos del esfuerzo u corresponden a los puntos de máxima pendiente del diagrama de momentos o corte máximo. Para carga uniforme (la más común) esto ocurre en los apoyos y en los puntos de inflexión. El valor de u varía mucho más de lo que indica la ecuación anterior e inclusive u es diferente de cero para $V = 0$, como veremos a continuación.

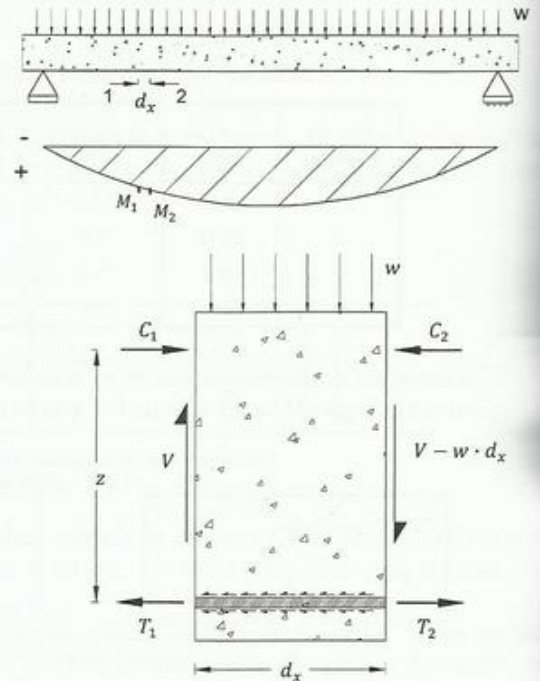


Fig. 9.6 Esfuerzos de adherencia por flexión

a) VIGA A FLEXIÓN PURA BAJO DOS CARGAS P

Entre las cargas P de la Figura 9.7 tenemos flexión pura (corte cero) y se producen grietas por flexión en a, b, c, \dots y entre dos grietas consecutivas la situación es similar a la de los ensayos de hechos por Goto (1971), donde los extremos libres de las barras corresponden al sitio de las grietas.

- En la grieta toda la tracción la resiste el acero

$$T = A_s \cdot f_s$$

La adherencia $u = 0$ y la inercia,

$$I = b \cdot \frac{x^3}{3} + n \cdot A_s \cdot (d - x)^2$$

- Entre grietas el concreto sano resiste una parte T_c de la tracción total y en el acero se tiene $T_s = T - T_c$ (Figura 9.7) es decir que la tracción en el acero varía, lo que solo puede ocurrir si la adherencia u es diferente de cero. (La Ecuación 9.1 nos viene $u = 0$ para $V = 0$). Entre grietas se tiene,

$$I \cong \frac{b \cdot h^3}{12}$$

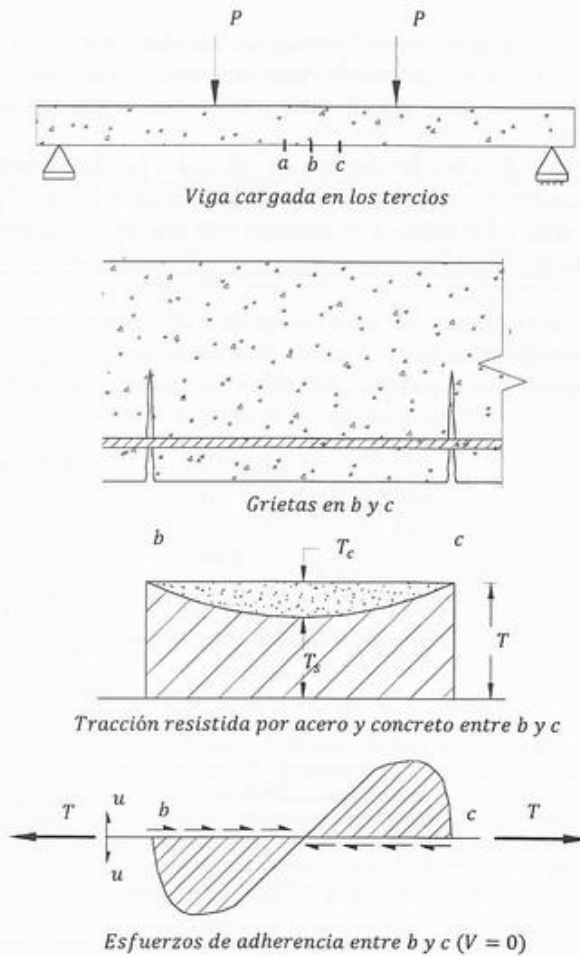


Fig. 9.7 Viga a flexión pura bajo dos cargas

9.5 LONGITUD DE DESARROLLO L_d A PARTIR DE UNA SECCIÓN DE $T = A_s \cdot F_y$

Es la mínima longitud de la barra necesaria para desarrollar por adherencia un esfuerzo F_y (ó una fuerza $T = A_b \cdot F_y$). Se designa como L_d . Preliminarmente asumiremos $L_d = 50 \cdot D_b$ (ACI-IPS1, 2002). Los valores "exactos" sugeridos por la norma se resumen en el Apéndice F. En las barras superiores de vigas que tienen más de 30 cm de concreto por debajo usaremos $L_d = 65 \cdot D_b$ porque el concreto de la parte superior de la viga es de menor calidad que el del fondo debido a el ascenso del agua de la mezcla hacia el tope de la viga. El trabajo de Moehle, Wallace y Hwang (1991) describe paso a paso los procedimientos usados para calibrar las longitudes de desarrollo con los resultados encontrados de ensayos experimentales. El diseñador debe tener presente,

- Las barras deberán prolongarse una longitud $\geq L_d$ a ambos lados de la sección donde son requeridas. En la práctica esto ocurre en,
 - Puntos donde el momento es máximo.
 - Puntos donde el refuerzo **adyacente** es cortado o doblado.

Las barras que a partir de una sección determinada ya no son necesarias, se prolongarán más allá de dicha sección una distancia m no menor de: doce diámetros de la barra y la altura útil d . Esto se hace para cubrir el incremento en las fuerzas de tracción del acero una vez ocurrido el agrietamiento (ver Sección 8.4a). Este requerimiento es de cumplimiento difícil en,

- 1) Los extremos libres de los voladizos por lo que usaremos barras con ganchos (Sección 9.7) y
- 2) En los apoyos de vigas simplemente apoyadas en las que recomendamos extender las barras más allá de los apoyos o alternativamente usar barras con ganchos, sobretodo en el caso de vigas profundas.

En la Figura 9.8 se muestra en planta las barras a tracción de la zona inferior de una viga. En la sección 2 se necesitan 4 y en la sección 1 son suficientes 2 barras ($T_1 \cong T_2/2$). Las barras *a* llegarán a los apoyos o más allá de ellos y las barras *b* se cortarán más allá de la sección 2 a una distancia $m \geq d$ y $m \geq 12 \cdot D_b$ (ACI 318-08, Sección 12.10.3).

Hacia la derecha de 1 la fuerza de tracción por barra es igual $T/4$ y se duplica ($T/2$) hacia la izquierda de 1 pudiendo estas llegar a ceder. Si además se tiene corte apreciable en 1, podría iniciarse una grieta por tracción diagonal que aumentaría aún más el esfuerzo en las barras *a* (Capítulo 8, Sección 8.4).

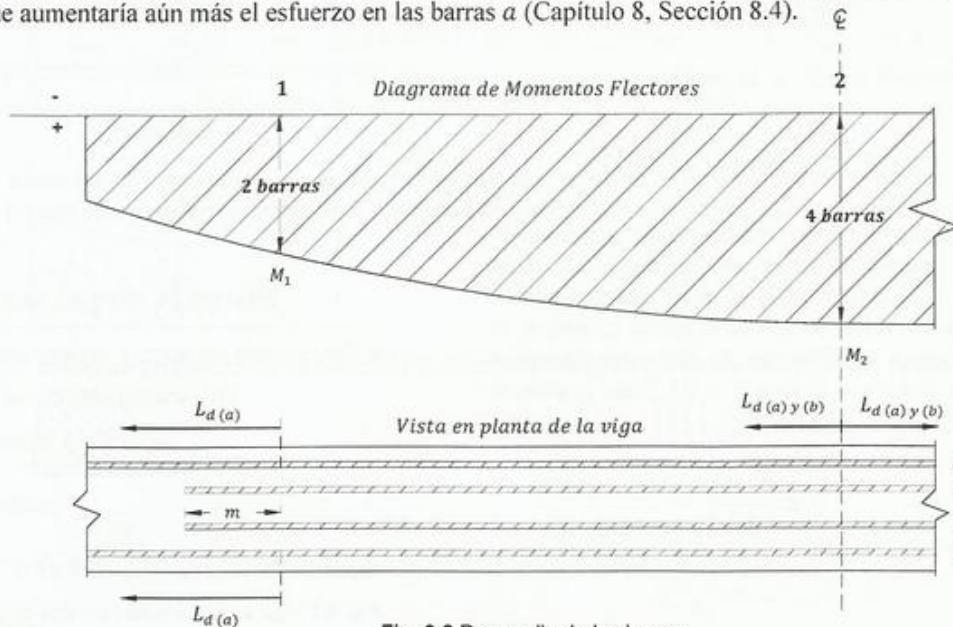


Fig. 9.8 Desarrollo de las barras

Es pues recomendable,

- Cortar las barras en zonas de tracción y corte bajos.
- Hacer cortes escalonados es decir, no cortar varias barras en el mismo sitio.
- Colocar estribos adicionales en la zona de corte de cabillas.

Los cortes en las barras deben hacerse lo menos posible. El código A.C.I. 318-08 en la Sección 12.10.5 prohíbe el corte de barras en zonas de tensión por flexión a menos que una de las siguientes condiciones se satisfaga,

- V_u en el punto de corte es menor que,

$$2/3 \cdot \phi^{0.75} \cdot (V_c + V_s) = \frac{V_c + V_s}{2}$$

- Estribos adicionales son colocados en una distancia de al menos $0.75 \cdot d$, empezando en la punta de la barra cortada y extenderlas a lo largo de esta. El espaciamiento máximo de dichos estribos es

$$s = \frac{d}{8 \cdot \beta_d}$$

β_d es la relación entre el área de acero terminada en una sección dividida entre el área total de acero para la misma sección.

EJEMPLO 9.1

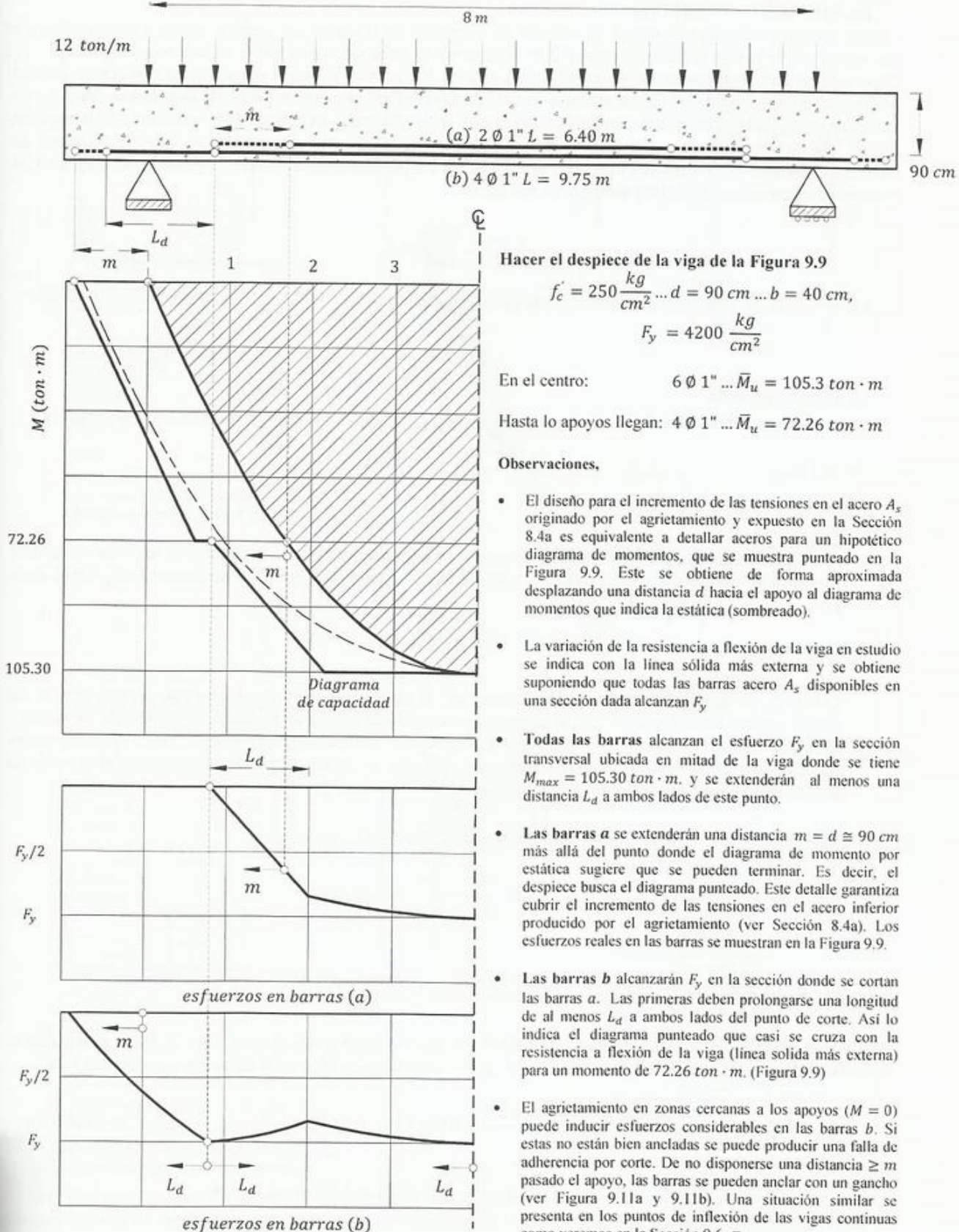


Fig 9.9 Despiece de la viga. Ejemplo 19.1

9.6 LONGITUD DE DESARROLLO EN APOYOS SIMPLES O PUNTOS DE INFLEXIÓN EN ZONAS DE MOMENTO POSITIVO

La resistencia de la viga entre los puntos 1-2 de la Figura 9.10 debe ser mayor que el momento actuante M_u . Supongamos que no disponemos de espacio más allá de los apoyos y que el diagrama de resistencia para el problema anterior es como el que se muestra en la Figura 9.10. Para ello determinaremos la máxima longitud de desarrollo permisible para que la pendiente de la línea 1-2 del diagrama de capacidad o resistencia de la viga sea mayor que la línea 1-o tangente al diagrama de momentos en 1. Así garantizaremos que el diagrama de momentos siempre este dentro del diagrama de capacidad. La pendiente de una recta tangente al del diagrama de momentos viene dada por el corte actuante en ese punto.

$$\frac{1}{1-o} = \frac{dM_u}{dx} = V_u$$

La pendiente del diagrama de resistencias es aproximadamente,

$$\frac{1}{1-2} = \frac{M_u}{L_d}$$

La desigualdad sería,

$$V_u \leq \frac{M_u}{L_d} \quad \therefore \quad L_d \leq \frac{M_u}{V_u}$$

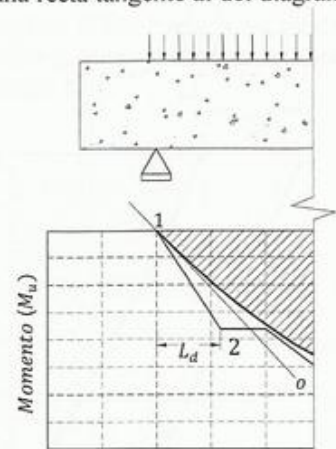


Fig. 9.10 L_d en apoyos simples

- El ACI 318-08 en su Sección 12.11.3 exige que en soportes simples en los cuales la reacción ejerce una fuerza de compresión que confina el concreto, el máximo valor de la longitud de desarrollo L_d venga dado por,

$$L_d \leq 1.3 \cdot \frac{\bar{M}_u}{V_u} + L_a \dots \dots \dots [9.2a]$$

Donde L_a es una longitud de anclaje adicional de la cabilla que continua después de la línea central del apoyo o punto de inflexión. Si no se cumple esta relación es necesario disminuir el tamaño de las barras y en consecuencia disminuirá L_d . El factor 1.3 incluye el efecto beneficioso de la fuerza de compresión inducida por el soporte que ayuda a mejorar la adherencia de las barras. Si la reacción del soporte no induce compresión se tomará un factor de 1.0.

- En los puntos de inflexión de vigas continuas debe cumplirse,

$$L_d \leq 1.0 \cdot \frac{\bar{M}_u}{V_u} + m \dots \dots \dots [9.2b]$$

EJEMPLO 9.2

Verificar la longitud de desarrollo para el Ejemplo 9.1 en las cercanías de los apoyos. $L_d = 1.30 \text{ m}$. Las barras se extienden 0.90 m. más allá de los apoyos. $A_s < A_{s \text{ bal}} \rightarrow$ calcularemos \bar{M}_u con la Ecuación aproximada 5.28,

$$\begin{aligned} \bar{M}_u &\cong A_s \cdot F_y \cdot \frac{7}{8} \cdot d = \frac{4 \cdot 5.06 \cdot 4200 \cdot 78.75}{100} \cong 66943 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots \bar{V}_u = \frac{\bar{w}_u \cdot L}{2} = \frac{12000 \cdot 8}{2} = 48000 \text{ kg} \\ &\text{para llevar a kg} \cdot \text{m} \\ L_d &= \frac{1.30 \text{ m}}{50 \cdot D_b} \leq 1.3 \cdot \frac{48000}{66943} + 0.90 = 1.84 \text{ m} \quad O.K. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9.7 LONGITUD DE DESARROLLO PARA BARRAS CON GANCHOS L_{dh}

El gancho ayuda a anclar la barra. La longitud de desarrollo en tracción de barras con gancho se tomará como $L_{dh} = 20 \cdot D_b$.

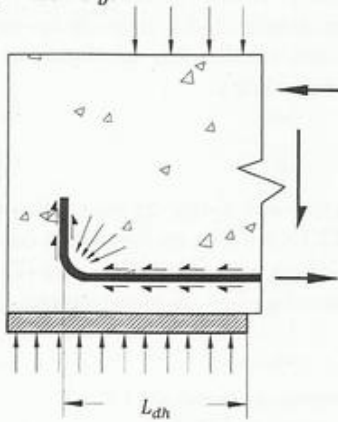


Fig. 9.11a Gancho a 90 grados

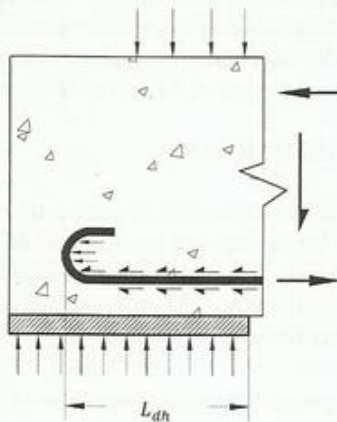


Fig. 9.11b Gancho a 180 grados



Fig. 9.11c Gancho para el estribo

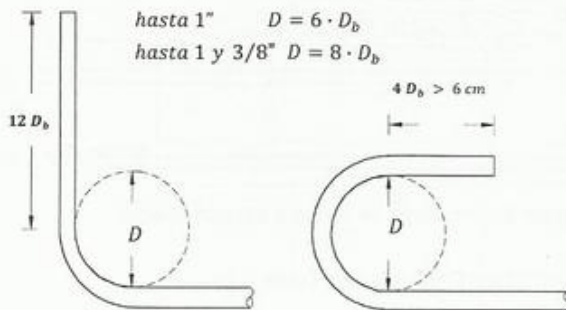


Fig. 9.11d Diámetros mínimos de doblar en barras principales

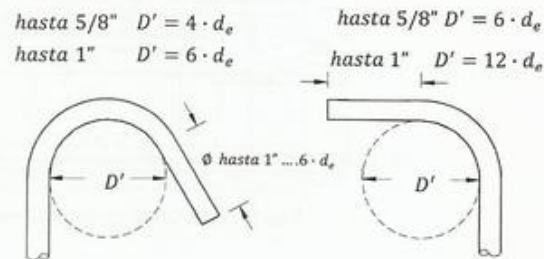


Fig. 9.11e Diámetros mínimos de doblar en estribos

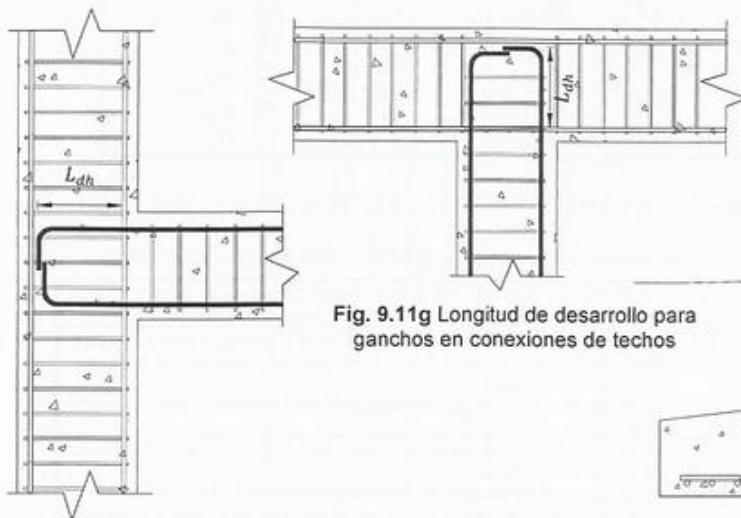


Fig. 9.11f Longitud de desarrollo para ganchos en conexiones viga-columna exteriores

Fig. 9.11g Longitud de desarrollo para ganchos en conexiones de techos

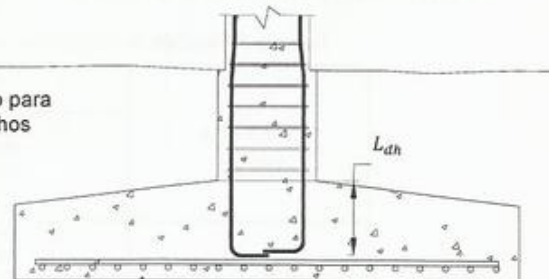


Fig. 9.11h Longitud de desarrollo para ganchos en conexiones pedestal-zapata

Las fórmulas "exactas" para determinar L_{dh} de acuerdo al ACI 318-08 se resumen en el Apéndice F.

Nota: Frecuentemente las dimensiones mínimas de los miembros donde se anclan los ganchos están restringidas por L_{dh} (Tabla 13.2)

9.8 LONGITUD DE DESARROLLO PARA BARRAS EN COMPRESIÓN L_{dc}

Las barras en compresión requieren una longitud de desarrollo menor que las barras en tracción. La punta de la barra se apoya en el concreto para ayudar a transmitir las fuerzas de un material a otro. Tomaremos, $L_{dc} = 25 \cdot D_b$. En zonas sísmicas existe la posibilidad de reversión de esfuerzos, principalmente en las caras de las juntas viga-columna, por lo que casi siempre desarrollaremos las barras superiores e inferiores en tracción. Las fórmulas para calcular L_{dc} recomendadas por el ACI 318-08 se resumen en el Apéndice F.

9.9 EMPALMES O EMPATES DE BARRAS

La transferencia de fuerzas entre barras solapadas se hace a través del concreto y con ayuda de los estribos que resisten la componente vertical de las fuerzas que se muestran en la Figura 9.12. Es por ello recomendado colocar estribos extras a cada 10 cm. en zonas de empalmes de barras. No se harán solapes en la zona confinada ($2 \cdot h$ a partir de la cara de las vigas hacia el tramo). En columnas solo se permiten solapes en la mitad central de la altura libre cuando se trate de zonas sísmicas (Apéndice G).

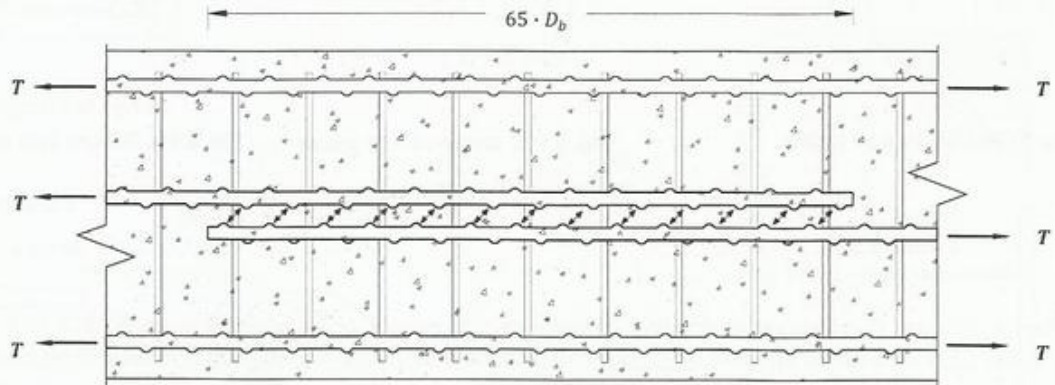


Fig. 9.12 Mecanismo de transferencia de fuerzas en empalmes de barras a tracción (planta)

9.10 RESUMEN LONGITUDES DE DESARROLLO RECOMENDADAS (Tabla 9.2)

Tabla 9.2 Resumen de longitudes de desarrollo

Tipo de esfuerzo	Detalle ($D_b \leq 1"$)	Long. de desarrollo
Barras en Tracción	Rectas	$50 \cdot D_b$
	Con gancho	$20 \cdot D_b$
	Solapes	$65 \cdot D_b$
Barras en Compresión	Rectas	$25 \cdot D_b$
	Solapes	$25 \cdot D_b$

9.11 DETALLES DE OBLIGATORIO CUMPLIMIENTO PARA EL DESPIECE (Tabla 9.3)

Tabla 9.3 Detalles de obligatorio cumplimiento en los despieces (Wight y MacGregor, 2008)

Todas las barras	a)	Las barras se deben extender el mayor valor entre d y $12 \cdot D_b$ más allá del punto de corte teórico excepto en vigas en volado y en los soportes.
	b)	Las barras deben extenderse una longitud de al menos L_d a ambos lados del punto de máximo momento y a ambos lados del punto en que las barras adyacentes son cortadas.
	c)	No se solaparán barras en una distancia igual a $2 \cdot h$ medida a partir de la cara de la columna.
Barras inferiores	a)	En apoyos simples: al menos $1/3$ del refuerzo positivo debe extenderse 15 cm dentro del apoyo.
	b)	Vigas continuas: al menos $1/4$ del refuerzo positivo A_{s+} debe ser continuo o debe ser empalmado sobre el apoyo con un empalme en tracción y en apoyos exteriores debe ser terminado con un gancho.
	c)	En las caras de las columnas A_{s-} inferior $\geq 1/2 \cdot A_{s+}$ superior.
	d)	En los puntos de inflexión o en los apoyos simples el refuerzo positivo debe satisfacer los requerimientos de la Ecuación 9.2.
Barras superiores	a)	Al menos $1/3$ del refuerzo negativo debe ser extendido más allá del punto de inflexión una distancia mayor que m y d .

9.12 MOMENTOS MÁXIMOS EN VIGAS CONTINUAS Y EL DESPIECE (Figuras 9.13 y 9.14)

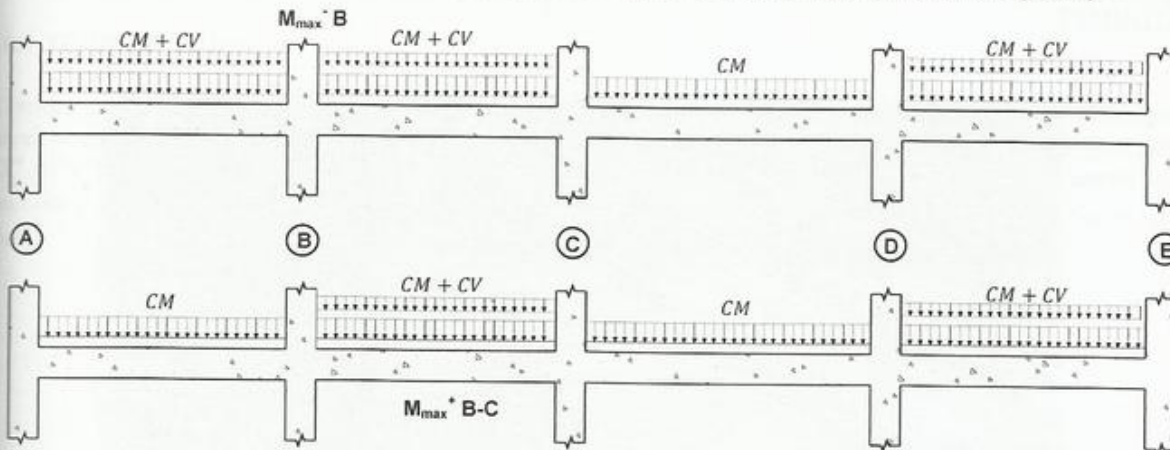


Fig. 9.13 Obtención de momentos máximos en vigas continuas basado en el principio de las líneas de influencia

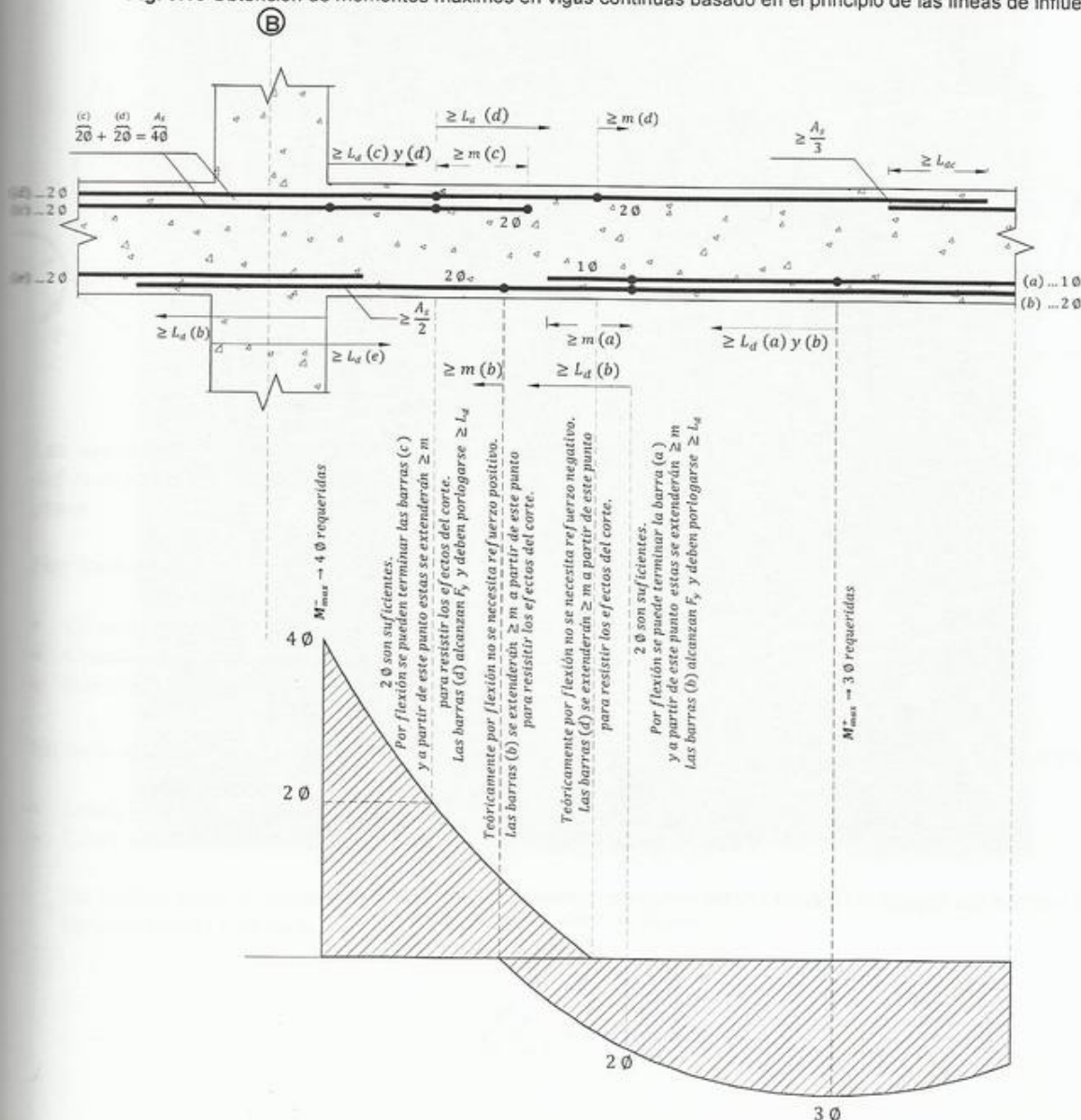


Fig. 9.14 Detalles del despiece típico en vigas continuas y colocación de acero

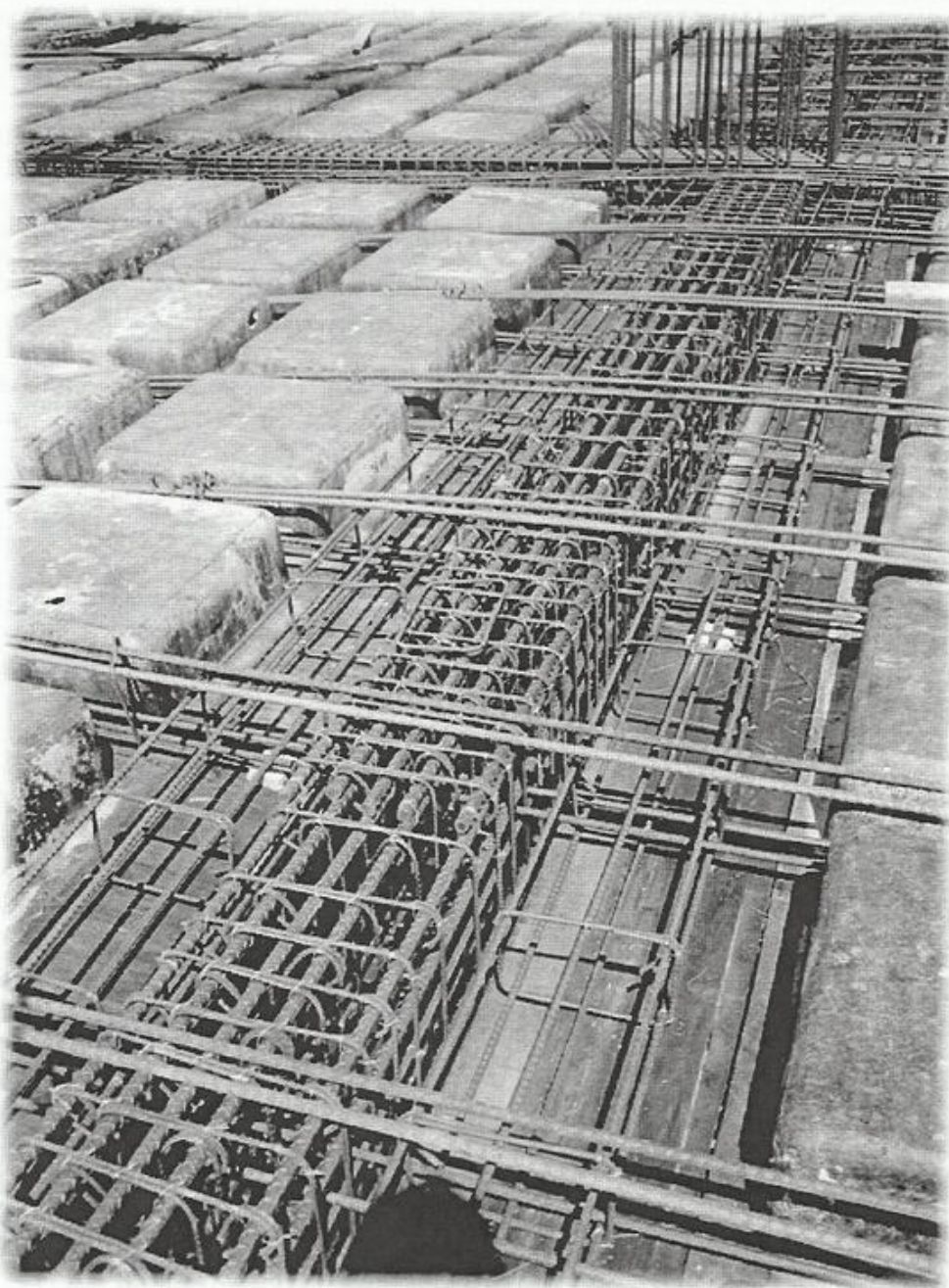


Fig. 9.15 Acero principal y transversal en una viga de carga
Cortesía de Pablo A. Fargier G.

9.12 MOMENTOS MÁXIMOS EN VIGAS CONTINUAS Y EL DESPIECE (Figuras 9.13 y 9.14)

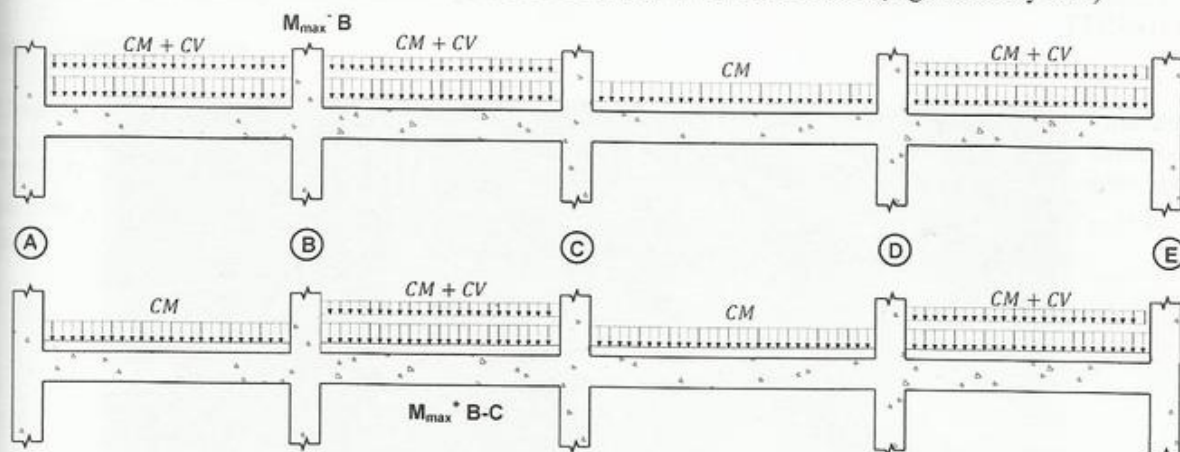


Fig. 9.13 Obtención de momentos máximos en vigas continuas basado en el principio de las líneas de influencia

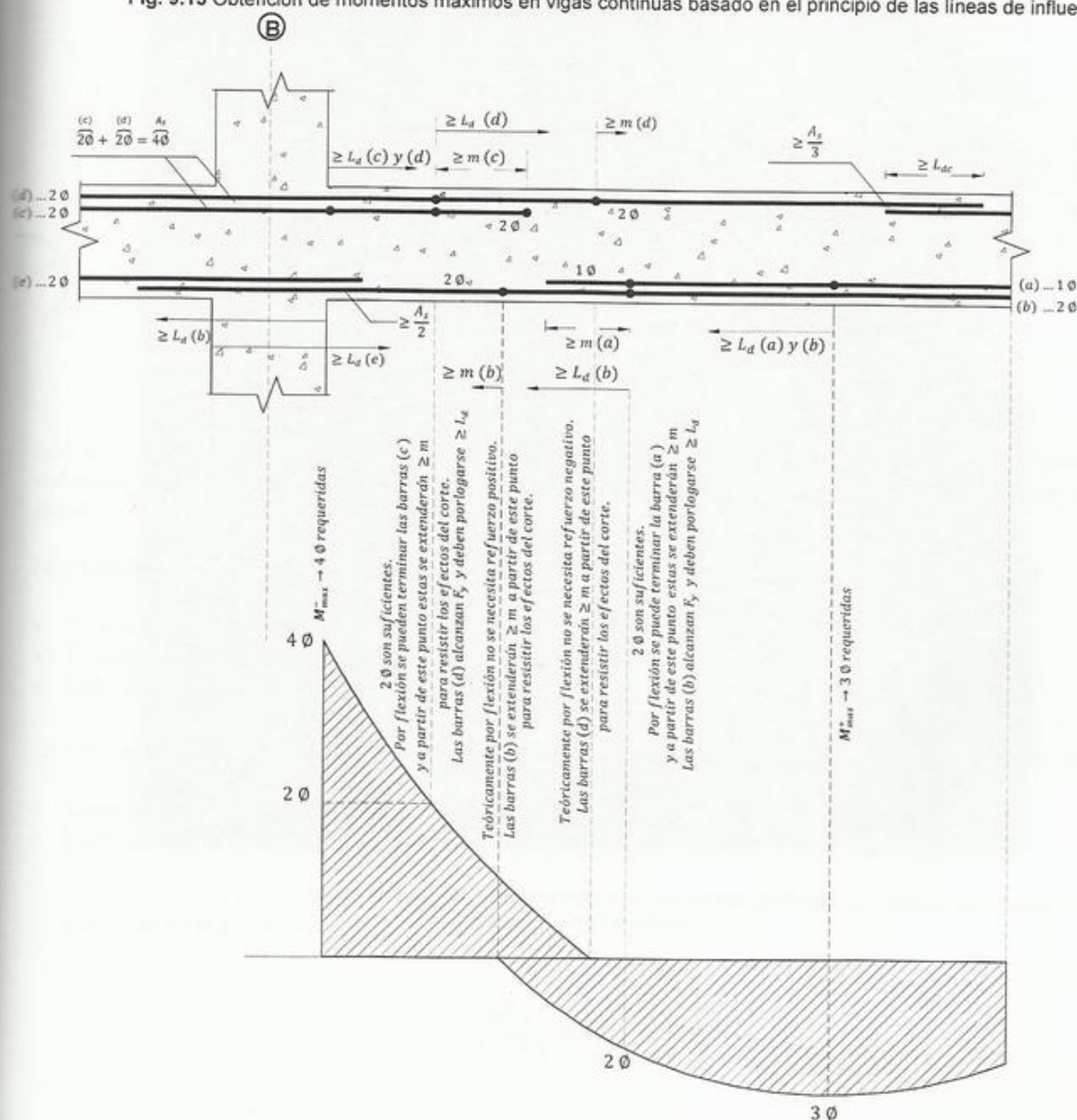


Fig. 9.14 Detalles del despiece típico en vigas continuas y colocación de acero

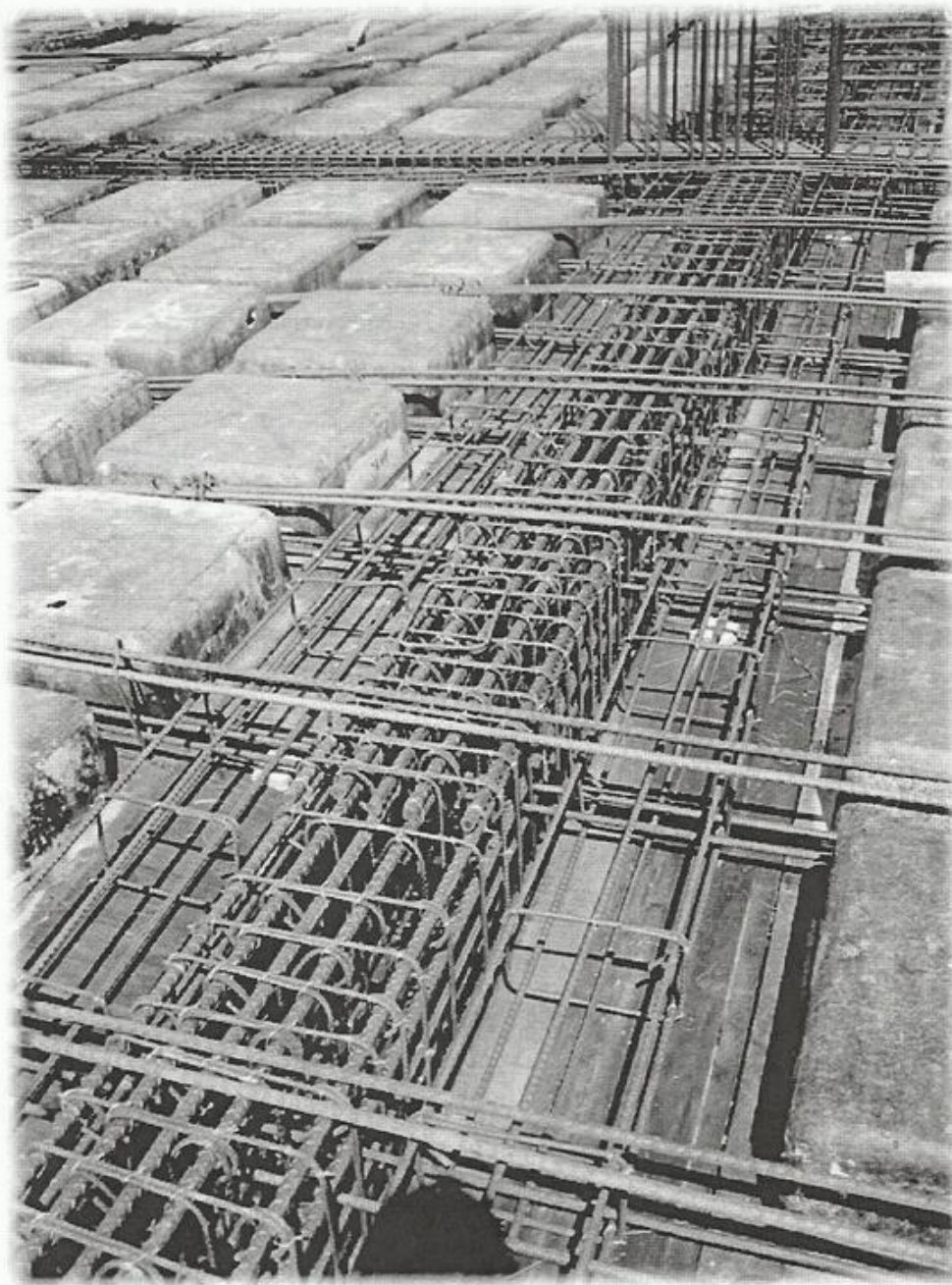


Fig. 9.15 Acero principal y transversal en una viga de carga
Cortesía de Pablo A. Fargier G.

10.1 TORSIÓN PURA

Consideremos una viga de eje longitudinal Z sometida únicamente a la acción de un momento torsor T que actúa en el plano XY de una sección (Figura 10.1). El momento torsor produce esfuerzos cortantes en las direcciones " X " y " Y ", y los esfuerzos normales son nulos: Los valores de τ_{zx} y τ_{zy} son iguales a cero en el centro de la sección y aumentan hasta un máximo en la mitad de las caras más anchas. En las esquinas se tiene $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

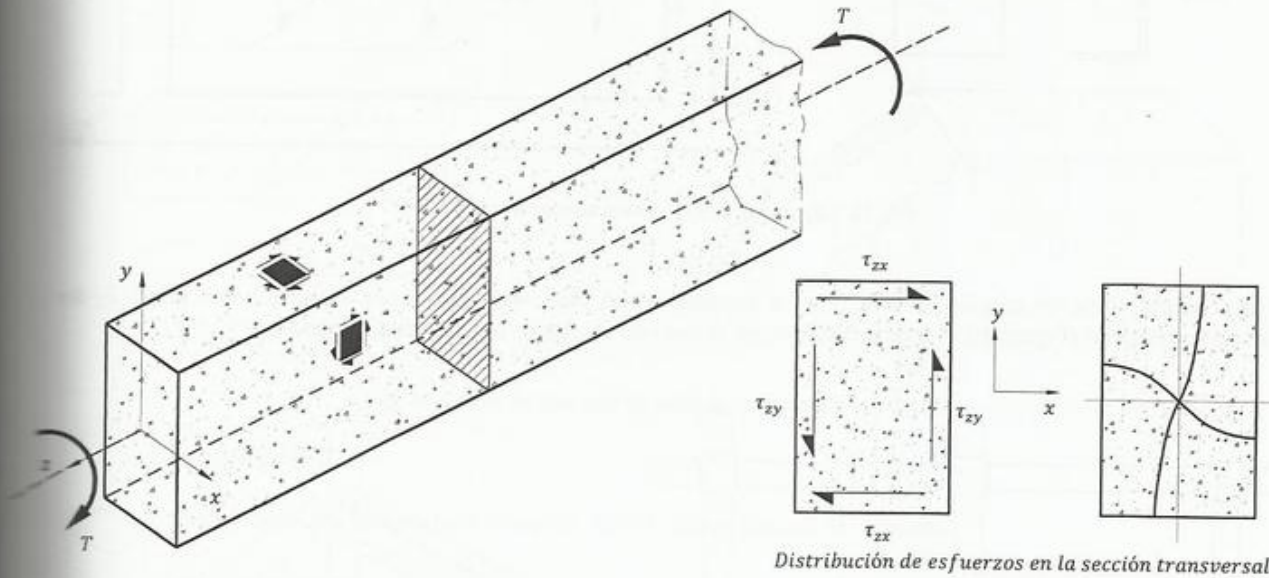


Fig. 10.1 Torsión en una viga de concreto

Las secciones no circulares sometidas a torsión se alabea, es decir no se mantienen planas, presentando deformaciones a lo largo del eje de las Z . En cambio, para cargas de trabajo, la sección circular se mantiene plana.

Hay torsión en vigas cuando el plano de las cargas no pasa por el centro de torsión (o centro de corte),

- En secciones asimétricas: en U , L , etc (Figura 10.2).
- Cuando el eje de la viga no coincide con la recta que une los apoyos.
- Bajo acción directa de momentos torsores.

En losas se produce torsión cuando la superficie elástica tiene doble curvatura (Figura 12.14), por ejemplo,

- Losas apoyadas en dos lados no paralelos (luz variable).
- Losas apoyadas en tres o más lados (Figura 10.2 y 10.3).

En ambos casos la torsión es debida a la diferencia de momentos flectores en franjas adyacentes donde la curvatura varía y se tiene,

$$\frac{d^2 z}{dx \cdot dy} \neq 0 \text{ (torcedura)}$$

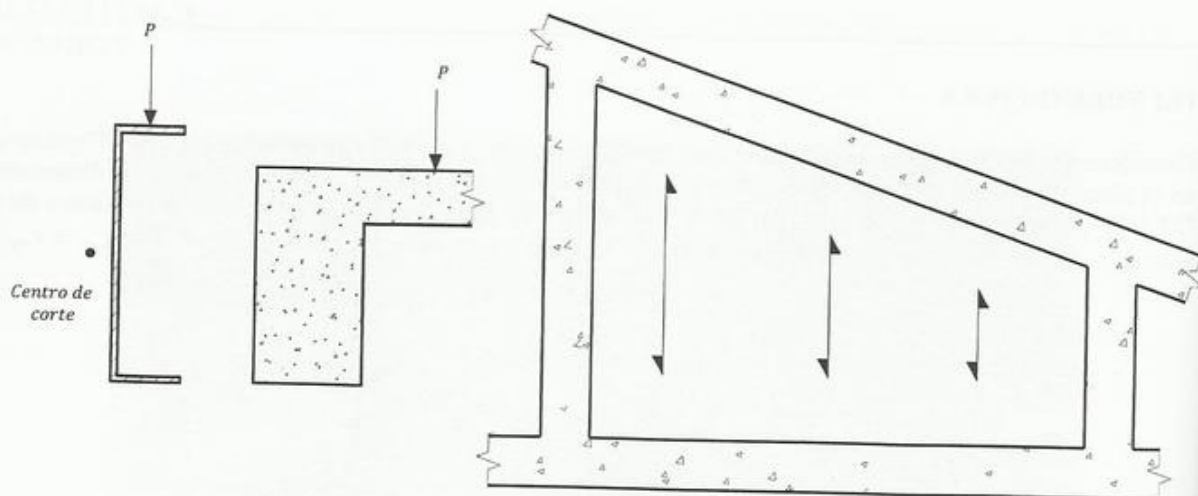


Fig. 10.2 Ejemplos de elementos sujetos a torsión

Para cualquier tipo de sección la falla final se presenta en un plano inclinado unos 45 grados con el eje Z, de forma rectangular (Figura 10.4) o de una elipse, en el caso de secciones transversales circulares.

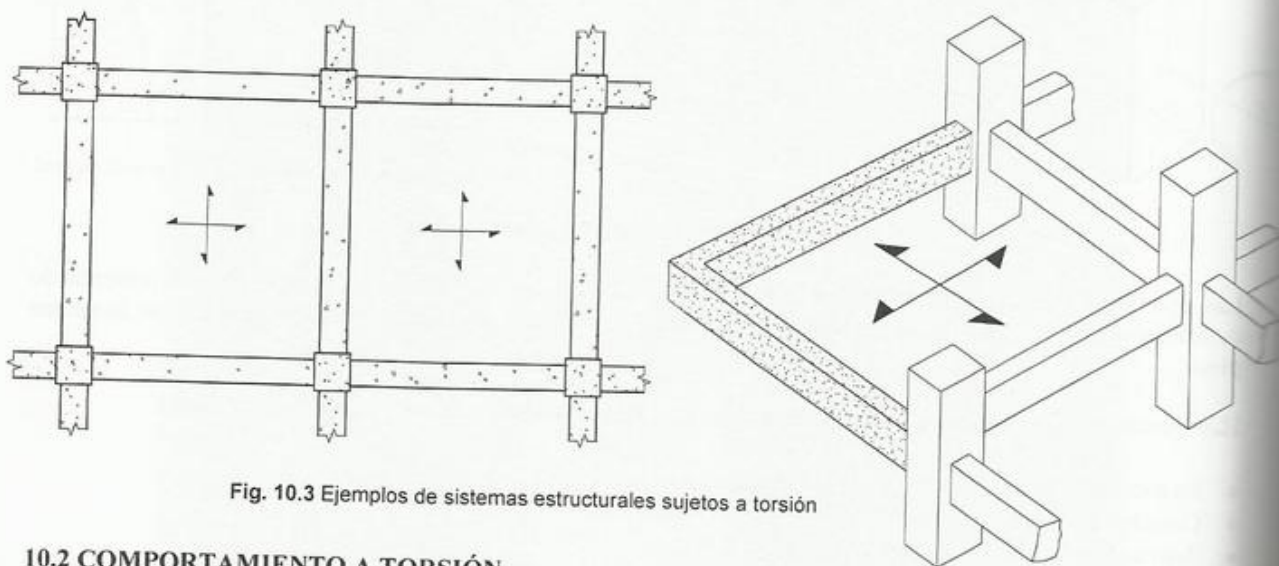


Fig. 10.3 Ejemplos de sistemas estructurales sujetos a torsión

10.2 COMPORTAMIENTO A TORSIÓN

a) TORSIÓN PURA – CONCRETO SIN ARMADURA

Sea una viga de concreto en masa sometida a la acción de un par torsor T que aumenta desde cero hasta la rotura. (Figura 10.4). La falla final se produce por **torsión y flexión** en una superficie alabeada $ABCD$ que aproximaremos a un plano inclinado $\cong 45$ grados con el eje de la viga.

El momento torsor T que actúa en el plano xy (Figura 10.1) produce en el plano de falla ($ABCD$) dos acciones (Figura 10.4),

- Torsión $T_a = T/\sqrt{2}$.
- Momento flector $M = T/\sqrt{2}$ que tracciona la zona cercana a AB y comprime hacia el borde CD .

Ensayos de la Portland Cement Association, bajo la dirección de Thomas Hsu (1968) permitieron observar el recorrido de las grietas utilizando una filmadora de alta velocidad.

- La grieta se inicia en el punto *A* de la cara anterior y sube hasta *B* a 45° en una centésima de segundo.
- Sigue por la cara superior del lado *x* hasta *C* y continúa bajando por la cara posterior hasta *D*. Todo el proceso dura 1/5".
- La falla final se produce por aplastamiento del concreto en la cara posterior por la acción de un momento flector *M* y torsor *T_a* componentes de *T_u* que actúan en *ABCD*.

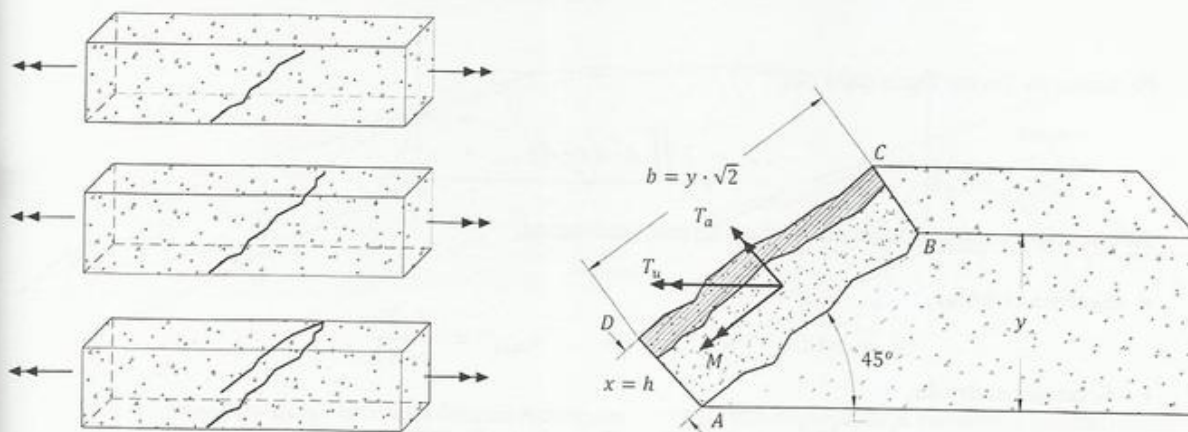


Fig. 10.4 Falla de una viga de concreto sometida a torsión.

Formula de HSU

Si aproximamos la superficie alabeada *ABCD* por un plano a 45° tenemos,

Sección resistente,

$$h = BC = x \dots \dots b = AB = y \cdot \sqrt{2}$$

Módulo de sección,

$$S = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{y \cdot \sqrt{2} \cdot x^2}{6}$$

Momento flector,

$$M = T_a = \frac{T_u}{\sqrt{2}} = \tau_u^{esf.} \cdot S$$

Sustituyendo tendríamos,

$$\tau_u = 3 \cdot \frac{T_u}{x^2 \cdot y}$$

Esta expresión es igual a la obtenida por teoría elástica (en valor mínimo) como veremos a continuación.

b) TEORÍA ELÁSTICA DE LA TORSIÓN

Sean,

G = módulo de elasticidad transversal

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

μ = relación de Poisson (0.15 a 0.20)

α = ángulo de torsión por unidad lineal

ϕ = función de esfuerzo en la ecuación de torsión:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \phi}{dy^2} = -2 \cdot G \cdot \alpha \quad [10.1a]$$

$$\tau_{zy} = -\frac{d\phi}{dx} \dots \dots \dots \tau_{zx} = \frac{d\phi}{dy} \quad (\text{cortes})$$

El momento Torsor viene dado por:

$$T = 2 \iint \phi \cdot dx \cdot dy$$

Para secciones transversales de diversas formas tendríamos,

- Sección circular,

$$R = \text{radio} \quad \rightarrow \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{2 \cdot T}{\pi \cdot R^3}$$

- Sección cuadrada,

$$b = \text{lado} = x = y \quad \rightarrow \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{4.8 \cdot T}{b^3}$$

- Sección rectangular,

x = lado menor, y = lado mayor de la sección:

$$\tau_{\text{máx}} = \left(3 + 1.8 \cdot \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{T}{x^2 \cdot y}$$

Si x/y tiende a cero τ es mínimo,

$$\tau_{\text{mín}} = 3 \cdot \frac{T}{x^2 \cdot y}$$

Analogía de la membrana (Ludwig Prandtl, 1903)

El físico Alemán L. Prandtl presentó en 1903 una forma conveniente de visualizar los esfuerzos por torsión en el rango elástico. La analogía establece que cuando una membrana fina y elástica se coloca en un marco o tambor que tiene la forma de la sección transversal de la viga y se infla con una presión p , en la membrana se producirá una tensión t constante. Las coordenadas x, y, z de su superficie satisfacen la ecuación,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = -\left(\frac{p}{t}\right) \quad [10.1b]$$

Esta ecuación es similar a la de torsión (Ecuación. 10.1a) y por analogía tenemos: z análogo a ϕ y p/t análogo a $2 \cdot G \cdot \alpha$. Se concluye,

1. Las pendientes dz/dx y dz/dy de la membrana en un punto cualquiera son directamente proporcionales a los esfuerzos cortantes,

$$-\tau_{zy} = \frac{d\phi}{dx} = \frac{2 \cdot G}{\left(\frac{p}{t}\right)} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right) \dots \dots \dots \tau_{zx} = \frac{d\phi}{dy} = \frac{2 \cdot G}{\left(\frac{p}{t}\right)} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

2. El doble del volumen encerrado por la membrana (Figura 10.5 y 10.6) es directamente proporcional al momento torsor,

$$T = \frac{2 \cdot G \cdot \alpha}{\left(\frac{p}{t}\right)} \cdot 2 \overbrace{\iint z \cdot dx \cdot dy}^{\text{Vol.}}$$

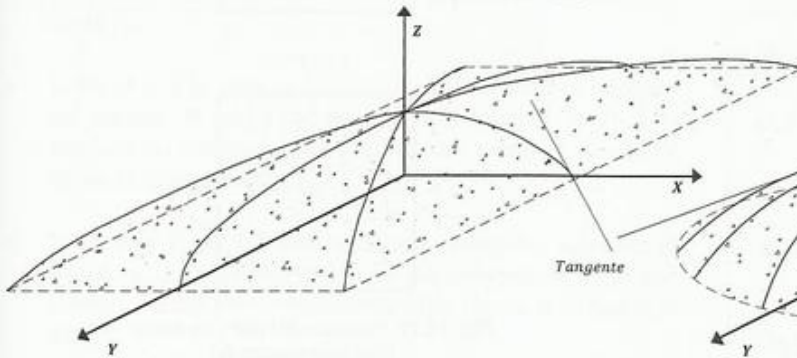


Fig. 10.5 Analogía de la membrana. Sección rectangular

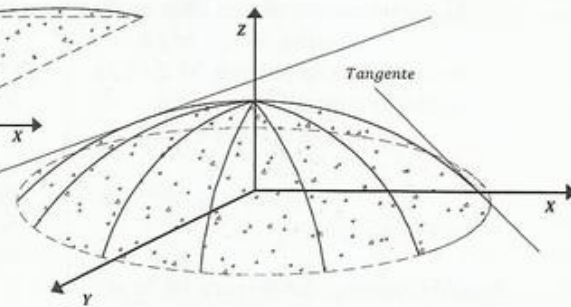


Fig. 10.6 Analogía de la membrana. Sección circular

c) TEORÍA PLÁSTICA DE LA TORSIÓN

Analogía del pilón de arena

Es una herramienta conveniente para visualizar los esfuerzos por torsión en el rango plástico. La analogía establece,

- La pendiente de un pilón de arena es directamente proporcional al valor del esfuerzo de corte por torsión,

$$\tau_u = \overset{\text{cte.}}{\tilde{K}} \cdot \text{pendiente}$$

- El doble del volumen de arena es directamente proporcional al momento torsor (Figuras 10.7 y 10.8),

En los ejemplos siguientes se resuelven casos sencillos
Para ilustrar la analogía.

Sección circular (Figura 10.7a y 10.8)

Radio = R

Pendiente del cono = Y/R

Volumen del cono = $\pi \cdot R^2 \cdot Y/3$

$$\tau_u = K \cdot Y/R \quad \therefore \quad Y = \tau_u \cdot R/K \dots \dots \dots (a)$$

$$T_u = K \cdot 2 \cdot \overbrace{\pi \cdot R^2 \cdot Y/3}^{\text{Volumen}} \quad \text{sustituyendo } Y \text{ de (a)}$$

$$T_u = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \tau_u/3 \quad \therefore \quad \tau_u = \frac{3 \cdot T_u}{2 \cdot \pi \cdot R^3} \quad \blacksquare$$

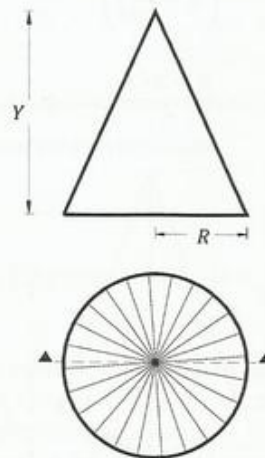


Fig. 10.7a Analogía del pilón de arena (Sección circular)

Sección cuadrada (Figura 10.7b y 10.8)

$$\text{Lado } b = x = y$$

$$\text{Pendiente pirámide} = (2 \cdot Y) / b$$

$$\text{Volumen pirámide} = Y \cdot b^2 / 3$$

Con el procedimiento anterior,

$$\tau_u = \frac{3 \cdot T_u}{b^3}$$

Si consideramos que en cada triángulo actúa,

$$\text{Fuerza} = \tau_u \cdot b^2 / 4$$

con un brazo de palanca = $2 \cdot b / 3$

sumando momento nos viene,

$$T_u = 2 \cdot (\tau_u \cdot b^2 / 4) \cdot (2 \cdot b / 3)$$

$$\therefore \tau_u = 3 \cdot T_u / b^3 \quad \blacksquare$$

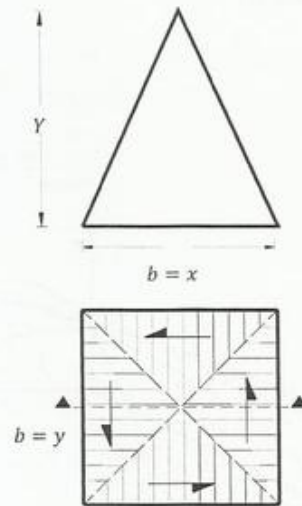


Fig. 10.7b Analogía del pilón de arena (Sección cuadrada)

Sección rectangular (Figura 10.7c y 10.8)

$$\text{Pendiente del pilón} = 2 \cdot Y / x$$

$$\tau_u = K \cdot 2 \cdot Y / x \therefore Y = \tau_u \cdot x / 2 \cdot K \dots \dots (b)$$

$$\text{Volumen pilón: } AB13 + CD24 = Y \cdot x^2 / 3$$

$$1 - 2 - 3 - 4 = Y \cdot x \cdot (y - x) / 2$$

$$V_{ot} = x \cdot Y \cdot (3 \cdot y - x) / 6$$

$$T_u = K \cdot 2 \cdot x \cdot Y \cdot \underbrace{\frac{3 \cdot y - x}{6}}_{Vol.}$$

Sustituyendo Y de (b)

$$\tau_u = \frac{6}{\left(3 - \left(\frac{x}{y}\right)\right)} \cdot \frac{T_u}{x^2 \cdot y}$$

$$T_u = \frac{3 - x/y}{6} \cdot x^2 \cdot y \cdot \tau_u \quad \blacksquare$$

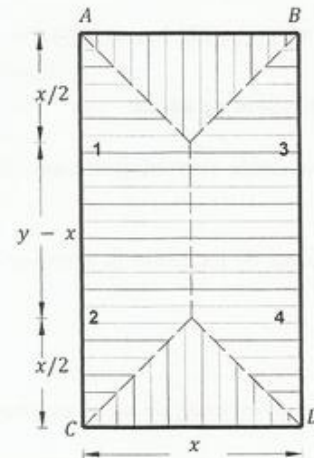


Fig. 10.7c Analogía del pilón de arena (Sección rectangular)

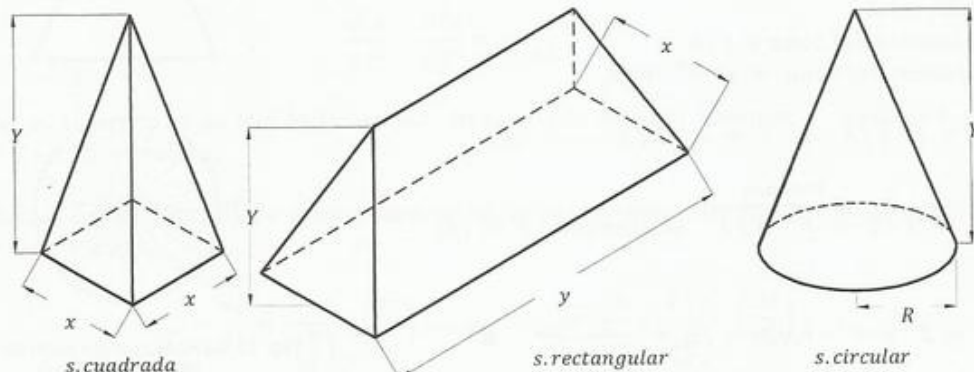


Fig. 10.8 Isometrías de los pilones de arena

d) TORSIÓN EN CONCRETO ARMADO

En pocas ocasiones es la torsión problemática durante la fase del diseño. Cuando es necesario considerarla se utilizan estribos cerrados (Figura 10.9) y barras longitudinales en los costados de las vigas para resistirla. El trabajo de Mitchell y Collins (1976) sobre el detallado para resistir torsión es de gran utilidad para el diseñador.

Comportamiento al aplicar un par torsor (Figura 10.10)

- El par torsor T se incrementará gradualmente desde O hasta \bar{T}_u .
- Entre O y A la viga se comporta elásticamente. El ángulo de torsión Φ es directamente proporcional a T . Los estribos no trabajan sino a partir del punto A donde se inicia el agrietamiento T_a .
- Entre A y B para T prácticamente constante, aumenta el ángulo y la capacidad resistente del concreto al corte por torsión disminuye considerablemente (hasta la mitad o el 40%).
- A partir de B el diagrama se curva, los estribos y el acero longitudinal trabajan resistiendo momentos torsores adicionales. La falla final se produce en C para un par torsor \bar{T}_u , después que las ramas verticales de los estribos han cedido.

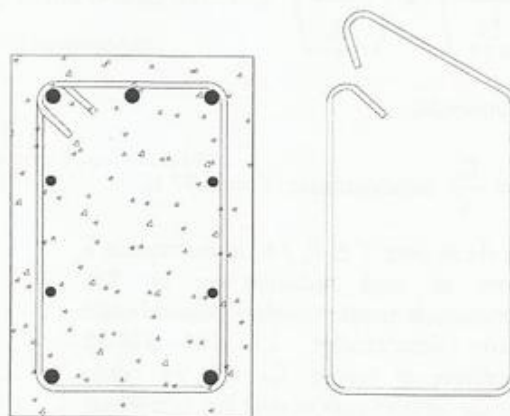


Fig. 10.9 Estribo cerrado en viga de concreto armado

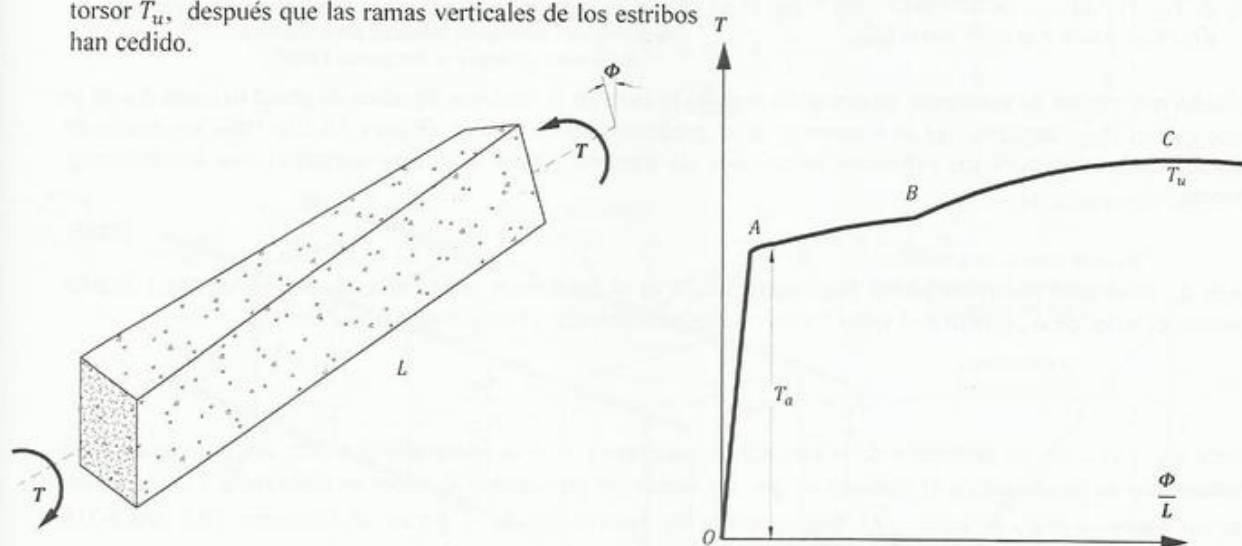


Fig. 10.10 Comportamiento de una viga de concreto armado sometida a un par torsor

e) TORSIÓN Y FLEXIÓN EN CONCRETO ARMADO

Ensayos realizados por Collins, Walsh, Archer y Hall (1958), Ersoy y Ferguson (1968), Hsu (1968), Zia y Cárdenas (1968), (A.C.I. SP-18) arrojan las conclusiones siguientes,

- En vigas sin armar la acción de un momento flector menor que \bar{M}_u no produce disminución significativa del par torsor que causa la falla por el agrietamiento. En vigas armadas a flexión y torsión, la presencia de un momento flector no muy grande, incrementa el valor de T necesario para producir la falla.
- En vigas armadas cuando se tiene valores grandes de M/T la falla se inicia por flexión al producirse grietas verticales que se inclinan al subir hacia la zona comprimida. Para M/T pequeño la falla es típica de torsión (Figura 10.4).

10.3 DISEÑO POR TORSIÓN

Observaciones experimentales (Figura 10.11) indican que un elemento macizo de concreto sin refuerzo y bajo la acción simultánea de corte V y torsión T es seguro si se cumple (Ersoy y Ferguson, 1968).

$$\left(\frac{V}{V_c}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_a}\right)^2 \leq 1 \dots \text{circunferencia} \Rightarrow$$

Asumiendo,

$$T = \frac{T_a}{4} \text{ tendríamos: } V = 0.97 V_c$$

Es decir para $T \leq T_a/4$ la resistencia a corte se verá reducida en un 3% aproximadamente, valor considerado como despreciable. El ACI 318-08 establece el torque $T_{th} = T_a/4$ como torque-umbral para el cual hay que tomar en cuenta la torsión en el diseño. Es decir si,

$\bar{T}_u \geq T_{th}$ [10.2] ... tendremos que diseñar para resistir torsión

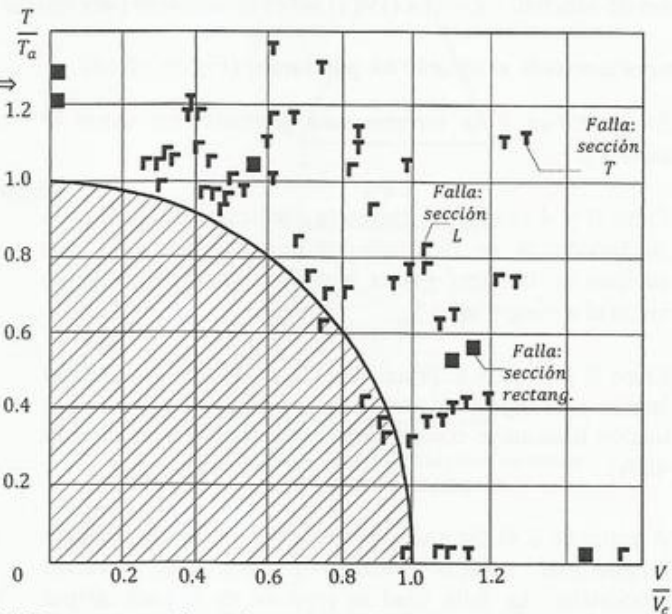


Fig. 10.11 Ensayos experimentales para estudiar la interacción entre corte y torsión en secciones macizas sin armadura Adaptado de Ersoy y Ferguson (1968)

El diseño por torsión de elementos de concreto armado se basa en la analogía de tubos de pared delgada donde se asume que el flujo cortante (q) se concentra en el perímetro de la sección (Figura 10.12). Bajo un estado de esfuerzos de torsión pura los esfuerzos principales de tracción tienen la misma magnitud que los esfuerzos cortantes,

$$\sigma_{ppal} = \tau = \frac{T}{2 \cdot A_o \cdot t} \quad \therefore \quad T = \tau \cdot 2 \cdot A_o \cdot t \quad [10.3a]$$

Donde A_o es el área encerrada por el flujo cortante y t es el espesor de las paredes de la sección. ACI 318-08 aproxima el valor de A_o y define el valor t equivalente para calcular el torque de agrietamiento,

$$A_o = \frac{2}{3} \cdot A_{cp} \quad y \quad t = \frac{3}{4} \cdot \frac{A_{cp}}{p_{cp}}$$

Donde p_{cp} y A_{cp} son el perímetro de la sección de concreto y el área encerrada por este, respectivamente. El agrietamiento se producirá en el instante en que los esfuerzos principales alcancen la resistencia a tracción del concreto $f_{tr} \rightarrow \tau = f_{tr} = 1.06 \cdot \sqrt{f'_c}$. Sustituyendo los valores de A_o , t y τ en la Ecuación 10.3 (ACI-318 sección 11.6.1),

$$T_a = 1.06 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right) \quad \therefore \quad T_{th} = \frac{T_a}{4} = 0.27 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right) \quad \text{secciones sólidas} \quad [10.4a]$$

Experimentalmente se ha determinado que para secciones huecas la resistencia a corte se verá reducida bajo la acción de un torque con magnitud $T_a/4$. Para secciones huecas el código ACI 318-08 recomienda,

$$T_{th} = 0.27 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(\frac{A_g^2}{p_{cp}}\right) \quad \text{secciones huecas} \quad [10.4b]$$

Donde A_g es el área de concreto excluyendo los huecos.

a) ESTRIBOS REQUERIDOS POR TORSIÓN

El flujo cortante (q) o fuerza cortante por unidad de longitud cercana al perímetro de la sección viene dado por la fórmula de Bredt para cilindros de pared delgada,

$$q = \frac{\bar{T}_u}{2 \cdot A_o} \quad [10.3b]$$

Las fuerzas resultantes en los costados horizontales y verticales de la armadura,

$$V_1 = V_3 = \frac{q}{\bar{T}_u} \cdot x_o \dots \dots V_2 = V_4 = \frac{q}{\bar{T}_u} \cdot y_o \dots \dots (c)$$

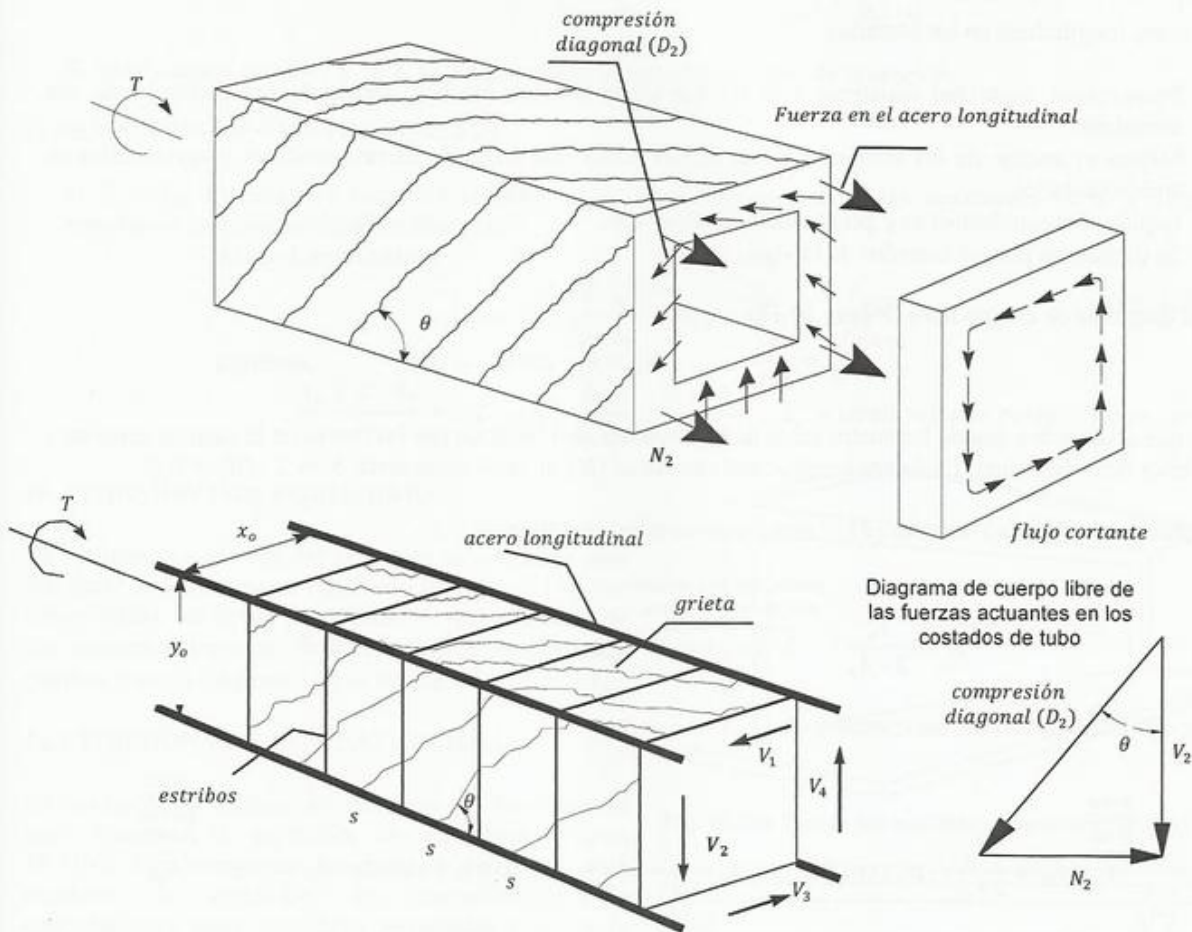


Fig. 10.12 Analogía de la armadura para torsión (adaptado de ACI 318-08)

Del diagrama de cuerpo libre, tenemos que el número de estribos que cruzan la grieta por una cara es,

$$n = \frac{y_o \cdot \cot \theta}{\sum \text{sep. entre estribos}}$$

y la fuerza desarrollada por los estribos, asumiendo que ceden, $n \cdot A_t \cdot F_y$

Por equilibrio de fuerzas verticales,

$$\frac{\overbrace{\bar{T}_u}^{V_2}}{2 \cdot A_o} \cdot y_o = \frac{\overbrace{y_o \cdot \cot \theta}^n}{s} \cdot \overbrace{\bar{A}_t}^{\text{área de una rama}} \cdot F_y$$

Despejando y sustituyendo,

$$\bar{T}_u = \frac{2 \cdot A_o \cdot A_t \cdot F_y}{s} \cdot \cot \theta \quad \therefore \quad \frac{A_t}{s} = \frac{\bar{T}_u}{2 \cdot A_o \cdot F_y \cdot \cot \theta} \quad [10.5 \text{ ACI 11.21}]$$

En condiciones últimas para el diseño, asumiremos $A_o = 0.85 \cdot A_{oh}$ en la Ecuación 10.5. La máxima separación de los estribos es $p_h/8$ donde p_h es el perímetro del estribo. (ACI-318-08, Sección 11.5.6.3).

b) ACERO LONGITUDINAL REQUERIDO POR TORSIÓN

El acero longitudinal en los costados,

- Proporciona capacidad resistente a la torsión junto con los estribos, formando los cordones de una armadura.
- Mejora el anclaje de los estribos con los cuales forma una malla de barras verticales y horizontales en ambos costados.
- Impide el ensanchamiento y penetración de las grietas.
- Se distribuirá por los costados de la viga.

Del diagrama de cuerpo libre (Figura 10.12)

$$D_2 = \frac{V_2}{\sin \theta} \dots \dots N_2 = V_2 \cdot \cot \theta \dots \dots (d)$$

N_2 que actúa sobre una de las cuatro caras de la armadura será resistida por las barras en la esquina superior e inferior de la armadura. La fuerza longitudinal resultante (N) de las 4 caras sería: $N = 2 \cdot (N_1 + N_2)$.

Sustituyendo V de (c), usando (d) y arreglando términos tendríamos,

$$N = \frac{\bar{T}_u}{2 \cdot A_o} \cdot \overbrace{2 \cdot (x_o + y_o)}^{\text{perímetro encerrado por los estribos} = p_h} \cdot \cot(\theta) = \frac{\bar{T}_u}{2 \cdot A_o} \cdot p_h \cdot \cot \theta$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$\overbrace{\bar{A}_l}^{\text{área acero long.}} \cdot F_y = \frac{\bar{T}_u}{2 \cdot A_o} \cdot p_h \cdot \cot \theta \dots \dots A_l = \frac{\bar{T}_u}{2 \cdot A_o \cdot F_y} \cdot p_h \cdot \cot \theta \dots \text{siendo } A_o = 0.85 \cdot \overbrace{\bar{A}_{oh}}^{\text{área encerr. por el estribo}}$$

$$A_l = \frac{\bar{T}_u}{1.7 \cdot A_{oh} \cdot F_y} \cdot p_h \cdot \cot \theta \rightarrow \text{al sustituir } \bar{T}_u \text{ de la Ecuación 10.5,}$$

$$A_l = \frac{A_t}{s} \cdot p_h \cdot \left(\frac{F_{y,est.}}{F_{y,long.}} \right) \cot^2 \theta \quad [10.6 \text{ ACI 11 - 22}]$$

Como armadura longitudinal se recomienda utilizar barras de diámetro igual o mayor que $s/16$, a una separación menor de 30 cm (en vigas es la distancia vertical). El refuerzo requerido por torsión deberá extenderse una distancia $(b_w + d)$ a partir de donde el torque actuante sea menor de T_{th} (ACI-318-08, Sección 11.6.6.3).

c) SECCIÓN CRÍTICA PARA EL CÁLCULO DEL REFUERZO A TORSIÓN

Por razones análogas a lo estudiado en el Capítulo de corte, la sección 11.6.2.4 del ACI 318-08 permite diseñar las secciones localizadas a una distancia menor de d del apoyo, para un torque \bar{T}_u localizado a una distancia d del apoyo.

d) MÁXIMO TORQUE PERMISIBLE

$$\text{Secciones macizas} \rightarrow \sqrt{\left[\frac{\bar{V}_u}{b_w \cdot d}\right]^2 + \left[\frac{\bar{T}_u \cdot p_h}{1.7 \cdot A_{oh}^2}\right]^2} \leq \frac{V_c}{b_w \cdot d} + 2.12 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [10.7 \text{ ACI 11.18}]$$

$$\text{Secciones huecas} \rightarrow \frac{\bar{V}_u}{b_w \cdot d} + \frac{\bar{T}_u \cdot p_h}{1.7 \cdot A_{oh}^2} \leq \frac{V_c}{b_w \cdot d} + 2.12 \cdot \sqrt{f'_c} \quad [10.8 \text{ ACI 11.19}]$$

Si no se cumple con 10.7 y 10.8 habrá que aumentar las dimensiones de la sección.

e) ARMADURA MÍNIMA POR TORSIÓN

Si $T_u \geq T_{th}$ El miembro requerirá armadura por Torsión de acuerdo a las ecuaciones 10.56 y 10.6 y respetando los mínimos establecidos por,

Acero Longitudinal,

$$A_{l,min} = \frac{1.33 \cdot \sqrt{f'_c}}{F_{y,long}} \cdot A_{cp} - \frac{A_t}{s} \cdot p_h \cdot \frac{F_{y,est}}{F_{y,long}} \quad [10.9 \text{ ACI 11.23}]$$

Estribos,

$$\frac{A_v + 2 \cdot A_t}{s} = 0.2 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w}{F_{y,est}} \geq \frac{3.5 \cdot b_w}{F_{y,est}} \dots A_v = \text{area est. por corte} \quad [10.10 \text{ ACI 11.24}]$$

10.4 TORSIÓN POR EQUILIBRIO

La resistencia a torsión del elemento es necesaria para mantener la estructura en equilibrio (Figura 10.13a, ver Ersoy 2000). No existe posibilidad de redistribución de los momentos torsores. Para estos casos, colocaremos estribos y acero longitudinal por torsión para resistir \bar{T}_u .

10.5 TORSIÓN POR COMPATIBILIDAD

La resistencia a torsión del elemento no es necesaria para mantener la estructura en equilibrio (Figura 10.13b). Los momentos torsores se producen para mantener la condición de compatibilidad de deformaciones entre miembros adyacentes y existe la posibilidad de redistribución de los momentos torsores. Para estos casos, el A.C.I 11.6.2.2 permite reducir el torque de diseño T_u al valor de \bar{T}_a (Ecuación 10.4a),

$$\bar{T}_a = \frac{1.06 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right)}{0.75 \phi}$$

El diseño por corte y flexión debe ser consistente con las resistencias a torsión asignadas. **El equilibrio de fuerzas debe mantenerse.** Si se reduce el torque de diseño con respecto a las fuerzas indicadas por en análisis estructural, aumentarán posiblemente las acciones de diseño en las secciones adyacentes (el momento y el corte).

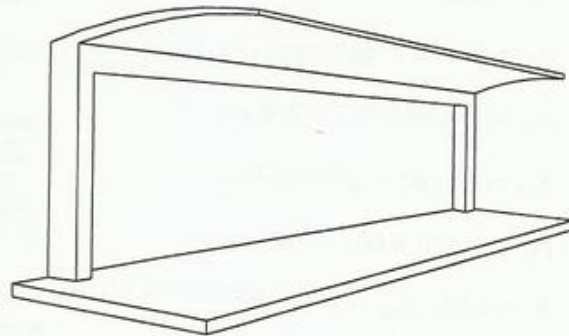


Fig. 10.13a Torsión por equilibrio (adaptado de ACI 318 - 08)

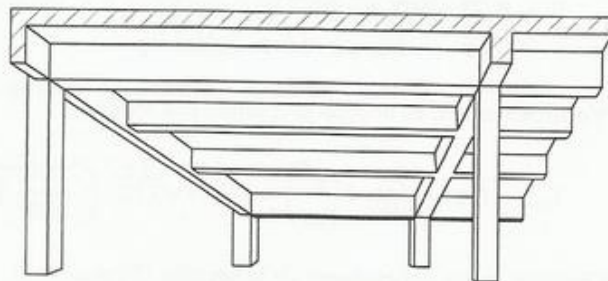


Fig. 10.13b Torsión por compatibilidad (adaptado de ACI 318 - 08)

EJEMPLO 10.1

Diseñar la viga en
balcón de la Figura 10.14.

$$f'_c = 220 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$rec = d' = 5 \text{ cm}$$

$$w_u = 5.77 \text{ ton/m}$$

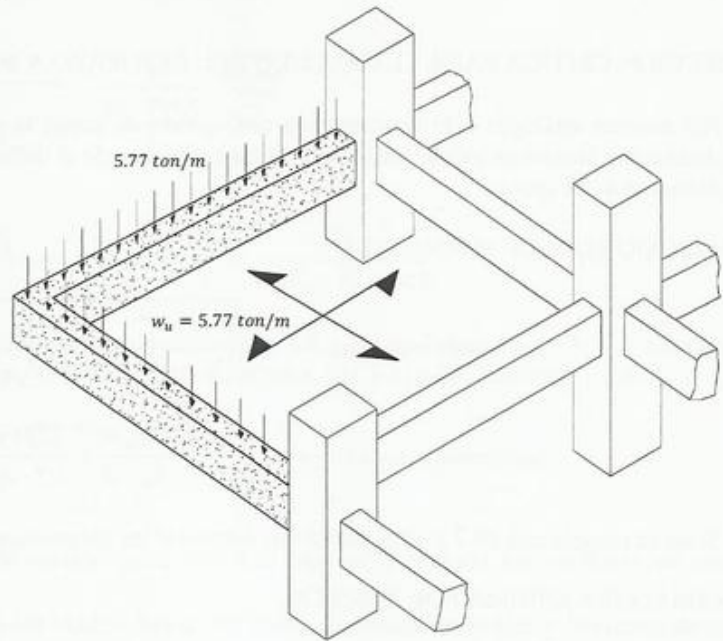
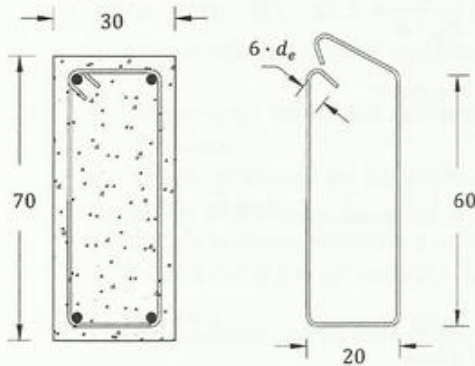


Fig. 10.14 Viga en Balcón (Ejemplo 10.1)

Configuración Preliminar



Tendríamos,

$$\bar{T}_u = \frac{3.42}{0.75} = 4.56 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$A_g = 30 \cdot 70 = 2100 \text{ cm}^2$$

$$p_{cp} = 2 \cdot (30 + 70) = 200 \text{ cm}$$

$$A_{oh} = 20 \cdot 60 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$p_h = 2 \cdot (20 + 60) = 160 \text{ cm}$$

$$A_o = 0.85 \cdot A_{oh} = 1020 \text{ cm}^2$$

Corte resistido por el concreto, Ecuación 8.6

$$\begin{aligned} V_c &= 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \\ &= 0.53 \cdot \sqrt{220} \cdot 30 \cdot 65 \cong 15000 \text{ kg} \end{aligned}$$

Verificaremos si es necesario reforzar por torsión,

$$T_{th} = 0.27 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(\frac{A_g^2}{p_{cp}} \right) = 0.27 \cdot \sqrt{220} \cdot \left(\frac{2100^2}{200} \right) = 88304 \text{ kg} \cdot \text{cm} < \bar{T}_u \therefore \text{reforzar por torsión}$$

Chequeo de las dimensiones de la sección (Ecuación 10.7),

$$\sqrt{\left[\frac{\bar{V}_u}{b_w \cdot d} \right]^2 + \left[\frac{\bar{T}_u \cdot p_h}{1.7 \cdot A_{oh}^2} \right]^2} = \sqrt{\left[\frac{23070/0.75}{30 \cdot 65} \right]^2 + \left[\frac{342000/0.75 \cdot 160}{1.7 \cdot 1200^2} \right]^2} = 33.72 \text{ kg/cm}^2$$

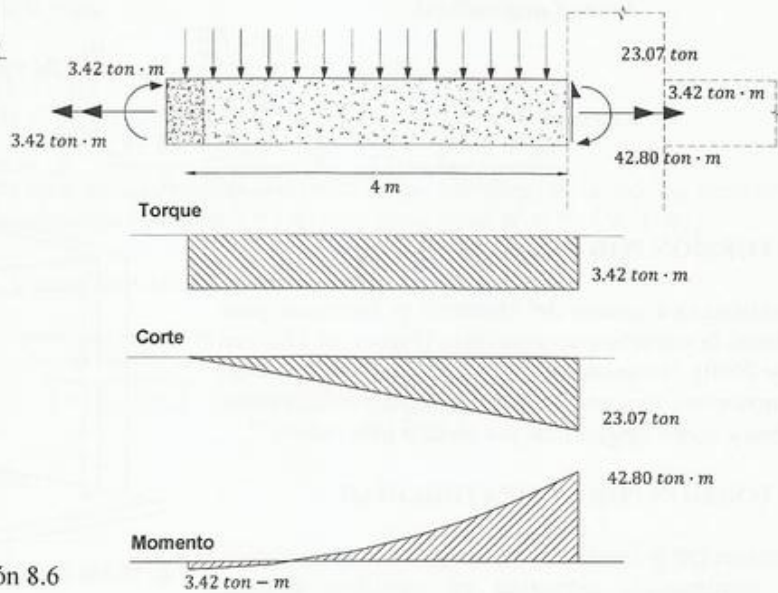


Fig. 10.15 Fuerzas últimas actuantes en la viga (Ejemplo 10.1)

$$\leq \frac{V_c}{b_w \cdot d} + 2.12 \cdot \sqrt{f'_c} = \frac{15330}{30 \cdot 65} + 2.12 \cdot \sqrt{220} = 39.31 \frac{kg}{cm^2} \dots \dots \dots O.K$$

Existe posibilidad de redistribución de momentos, podemos diseñar para \bar{T}_a (Torsión por compatibilidad)

$$T_a = 1.06 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(\frac{A_g^2}{p_{cp}} \right) = 1.06 \cdot \sqrt{220} \cdot \left(\frac{2100^2}{200} \right) = 346678 \text{ kg} \cdot \text{cm} > T_u = 342000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

No es necesario reducir el torque de diseño pues $T_a > T_u$. Calcularemos aceros para $\bar{T}_u = 456000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$

Del diagrama de cuerpo libre tendremos (Figura 10.14, x medido desde el extremo izquierdo de la viga),

$$\frac{V_u}{\phi} = \bar{V}_u = \frac{5770}{0.75} \cdot x = 7963 \cdot x; \quad \text{Ecuación 8.10} \quad \bar{V}_s = \bar{V}_u - V_c = 7963 \cdot x - 15000$$

Estribos por corte, (Ecuación 8.9)

$$\frac{A_v}{s} (\text{corte}) = \frac{V_s}{F_y \cdot d} = \frac{7963 \cdot x - 15000}{4200 \cdot 65} \quad \frac{T_u}{\phi} = \frac{T_u}{0.75} = \bar{T}_u = 452000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Estribos por torsión (Ecuación 10.5),

$$\frac{\overbrace{\bar{A}_t}^{\text{1 rama del estribo}}}{s} = \frac{\bar{T}_u}{2 \cdot A_o \cdot F_y \cdot \cot(\theta)} = \frac{456000}{2 \cdot 1020 \cdot 4200 \cdot \cot(45)} = 0.0532$$

Acero Longitudinal por torsión (Ecuación 10.6),

$$A_t = \frac{A_t}{s} \cdot p_h \cdot \left(\frac{F_{y,est}}{F_{y,long.}} \right) \cot^2(\theta) = 0.0532 \cdot 160 \cdot \left(\frac{4200}{4200} \right) \cot^2(45) = 8.5 \text{ cm}^2$$

Aceros por flexión,

$$\frac{M_u}{\phi} = \bar{M}_u = \frac{\overbrace{\bar{M}_u}^{42.80}}{0.90}$$

Determinaremos si necesitamos armadura sencilla o doble con la Ecuación aproximada 5.27

$$d_{min} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{b \cdot f'_c}} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{47551 \cdot 10^2}{30 \cdot 220}} = 61.73 \text{ cm} < d = 65 \text{ cm} \therefore \text{armadura sencilla}$$

El área de acero por flexión la calcularemos con la Ecuación aproximada 5.28b

$$A_s = \frac{\bar{M}_u}{F_y \cdot \frac{7}{8} \cdot d} = \frac{47.551 \cdot 10^5}{4200 \cdot \frac{7}{8} \cdot 65} = 19.91 \text{ cm}^2$$

Acero mínimo por torsión (Ecuación 10.10).

$$\frac{A_v + 2 \cdot A_t}{s} = \overbrace{0.2 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w}{F_{y,est}}}^{0.0212} \geq \overbrace{\frac{3.5 \cdot b_w}{F_{y,est}}}^{0.025} \dots \dots \frac{A_v + 2 \cdot A_t}{s} (\text{min}) = 0.025$$

Los resultados se resumen en la Tabla (10.1).

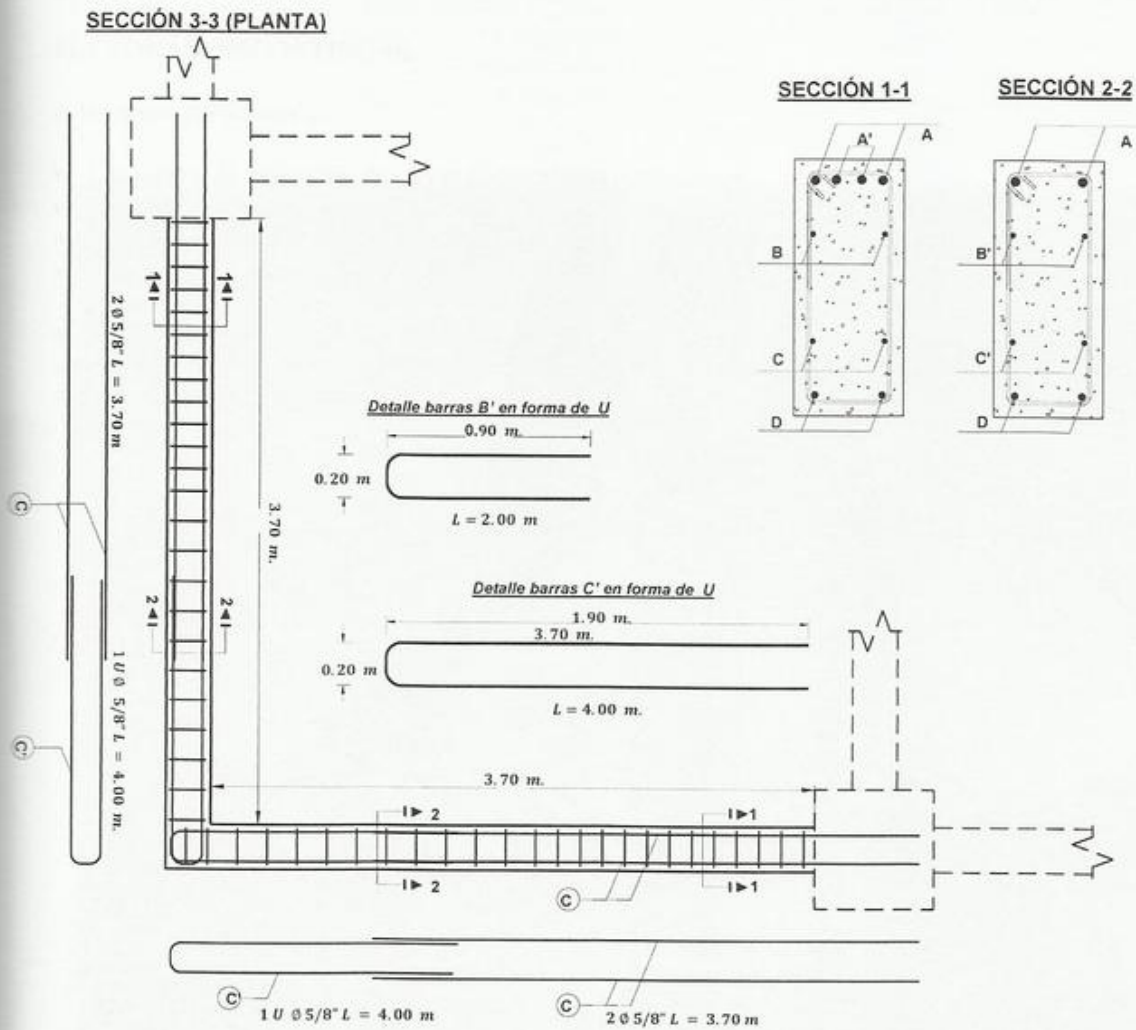


Fig. 10.17 Despiece de la viga del Ejemplo 10.1 (En planta)

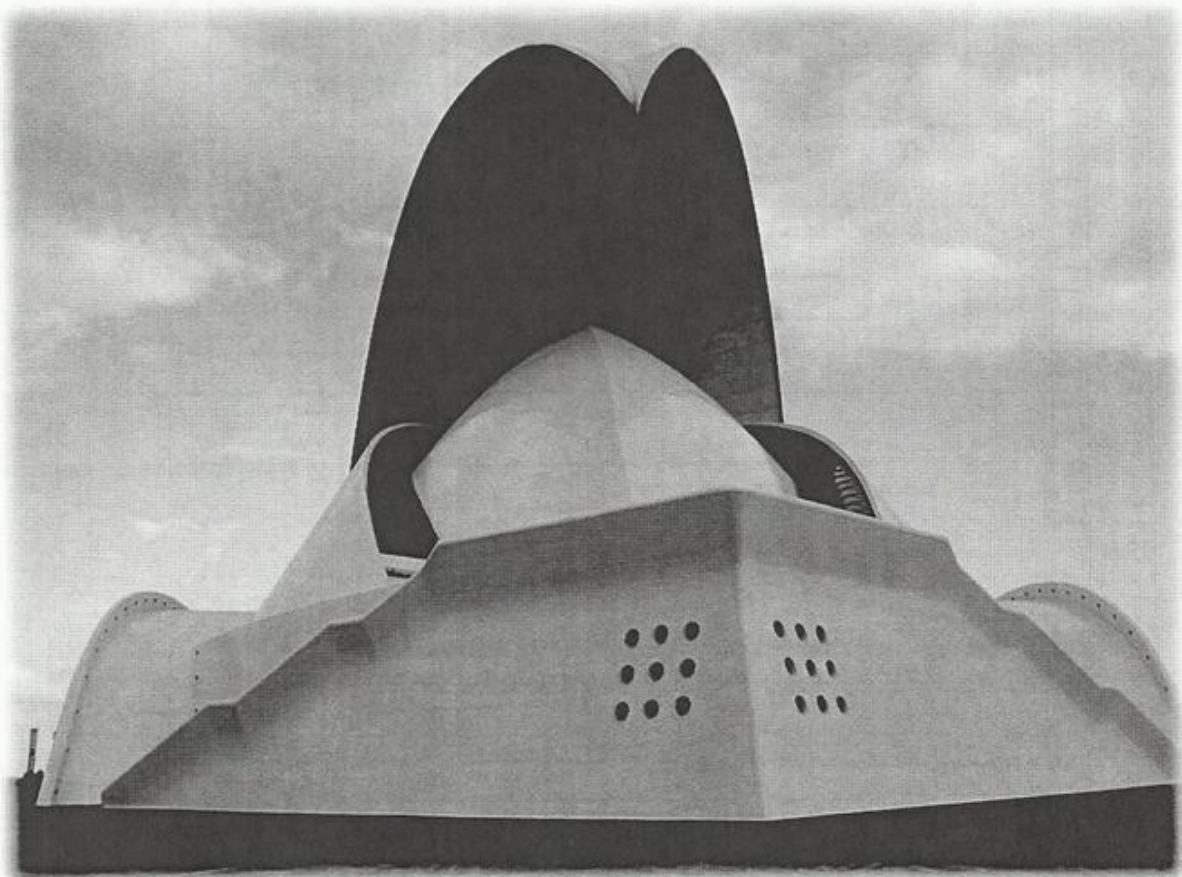


Fig. 10.18 Auditorio de Santa Cruz de Tenerife
Cortesía de Luis B. Fargier G.

11.1 ZONAS DISCONTINUAS

A las zonas adyacentes a,

- Los puntos de aplicación de cargas concentradas o reacciones.
- Los puntos donde se doblan cabillas.
- Los cambios bruscos de geometría en un miembro.
- Y en miembros en que la relación de esbeltez (*largo/alto*) es menor que 4,

se les conocen como discontinuas (Figura 11.1). En estas regiones las secciones planas no se mantienen planas luego de aplicar las cargas. La distribución de deformaciones unitarias en la sección transversal no es lineal como se asumió en los capítulos 3, 4, 5 y 7.

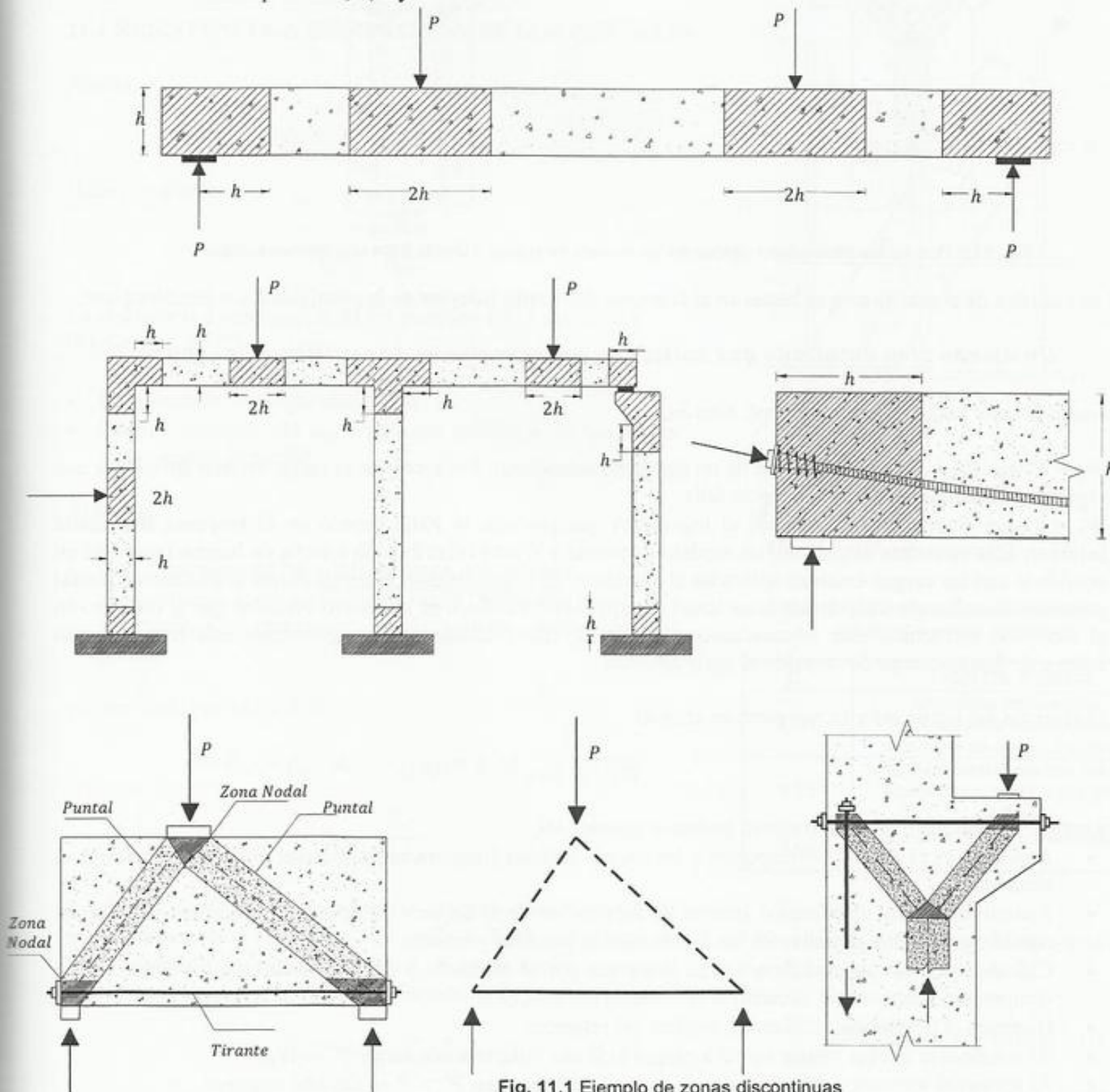


Fig. 11.1 Ejemplo de zonas discontinuas

En las zonas discontinuas es conveniente visualizar el camino que siguen las fuerzas haciendo la analogía con el funcionamiento de una cercha, inicialmente propuesto por Ritter en 1899 (Figura 8.9, ver Ramírez y Breen, 1991). En nuestro caso tendremos puntales que transmiten compresiones y tirantes a tracción unidos entre sí por juntas articuladas. Bastará con: a) seleccionar un modelo de puntal y tirante cónsono y en equilibrio con las cargas aplicadas, b) proporcionar la cantidad de acero requerida por cada tirante y c) verificar que las dimensiones de los puntales y nodos son suficientes para no exceder los esfuerzos de compresión últimos en el concreto, para asegurar que nuestro diseño es seguro.

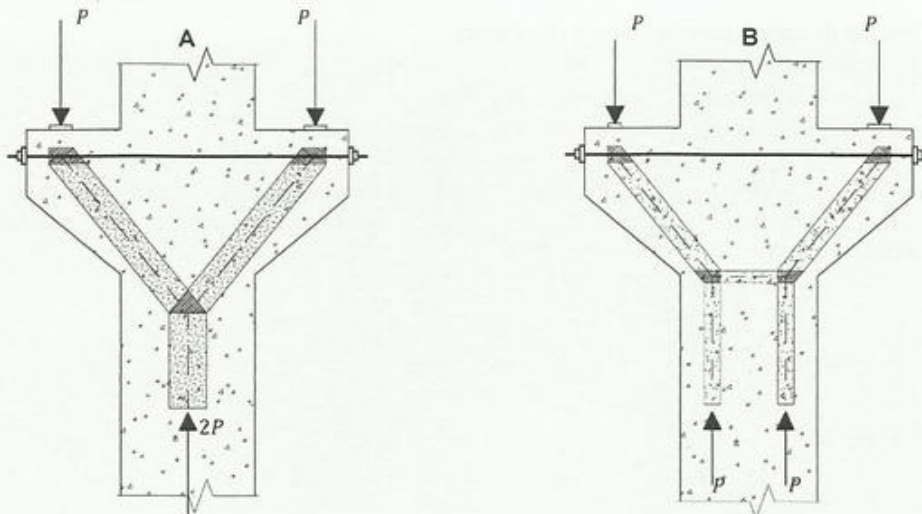


Fig. 11.2 Dos de las alternativas válidas de un modelo de puntal y tirante para una ménsula-doble

Los modelos de puntal-tirante se basan en el **teorema del límite inferior** de la plasticidad que establece que,

Un diseño bien detallado que satisfaga las ecuaciones de equilibrio es seguro

Alternativamente podemos plantearlo así. Siendo,

- W_{RF} = Carga **Real** que produce Falla de un elemento estructural. Por ejemplo, la carga externa aplicada a una viga en un laboratorio hasta producir la falla.
- W_{TF} = Carga **Teórica** (calculada por el ingeniero) que produce la Falla basado en el **teorema del límite inferior**. Ésta se estima asumiendo un modelo de puntal y tirante (distribución interna de fuerzas) que esté en equilibrio con las cargas externas aplicadas al elemento. El **requerimiento esencial** es que el modelo de puntal y tirante seleccionado respete las ecuaciones de equilibrio. También es necesario verificar que el refuerzo en el elemento estructural este adecuadamente dispuesto (bien detallado) para garantizar una redistribución interna de fuerzas luego de ocurrido el agrietamiento.

El teorema del límite inferior nos permite afirmar,

$$W_{RF} \geq W_{TF} \quad [11.1]$$

Para aplicar el teorema a un diseño nuevo podemos razonar así,

- $P = W_{TF}$ es el dato y corresponde a las cargas últimas (mayoradas) aplicadas externamente sobre el elemento.
- Asumiremos una distribución interna de fuerzas -es decir un modelo de puntal y tirante- que este en equilibrio con P . Calcularemos las fuerzas de los puntales y tirantes.
- Calcularemos la cantidad de refuerzo requerida por el elemento y verificaremos que los esfuerzos de compresión actuantes no excedan la resistencia del concreto.
- Haremos el despiece cuidando los detalles del refuerzo.
- Al construirse la viga y estar sujeta a cargas externas fallaría a una carga $P' = W_{RF}$.
- Al aplicar el teorema del límite inferior podemos afirmar que $P' > P \rightarrow$ **diseño seguro!**

En un mismo elemento existen varias posibilidades de configuración puntal-tirante que son válidas y seguras para diseñar (Figura 11.2), siempre que se satisfagan las ecuaciones de equilibrio. Si por ejemplo, el modelo que escogemos es una aproximación yaga del flujo interno de fuerzas (Figura 11.2-A), tendremos un diseño que es seguro y fallará a una carga real $P^v = W_{RF-v} \geq P$. Si utilizamos una segunda aproximación más ajustada al flujo interno de fuerzas (Figura 11.2-B), tendremos un diseño que es igualmente seguro y que fallará a una carga real $P^m = W_{RF-m} \geq P$. Debido a que el flujo de fuerzas internas escogido en la segunda aproximación se acerca más al real que el primero, tendríamos: $P^v \geq P^m \geq P$.

El procedimiento descrito en este capítulo permitirá,

- Verificar que la capacidad a compresión de los puntales no es excedida.
- Verificar la capacidad de los nodos no es excedida.
- Calcular la cantidad del refuerzo de acero requerido de los tirantes.

El ACI 318-08 recomienda un factor $\phi = 0.75$ para diseños basados en modelos de puntal y tirante.

11.2 RESISTENCIA A COMPRESIÓN DE LOS PUNTALES

Siendo,

$$\bar{P}_u = \frac{f_{za.axial} \cdot \bar{P}_u}{\phi_{0.75}}$$

Debe cumplirse,

$$\bar{P}_u \leq \bar{F}_{ns}^{resist. puntal}$$

La resistencia a compresión de los puntales (F_{ns}) disminuye (McGregor, 2002),

- En presencia de cargas sostenidas.
- Con el aumento del agrietamiento debido a las tensiones transversales al puntal.

Aumenta,

- Con el incremento del confinamiento del concreto.
- Si colocamos acero en forma de malla (horizontal y vertical) ue restringe el crecimiento de las grietas transversales al puntal.

y viene dada por (ACI A-2),

$$F_{ns} = f_{cu} \cdot A_c \dots A_c = b \cdot e \quad [11.2a]$$

$$b = \frac{\bar{P}_u}{f_{cu} \cdot e} \quad [11.2b]$$

Donde f_{cu} es el esfuerzo resistente efectivo a compresión de puntal (Ecuación 11.3, Tabla 11.1, ACI A-3), A_c es el área de de la sección transversal del puntal, b es su ancho y e es el espesor que se asume igual al del elemento.

$$f_{cu} = 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_s \quad [11.3]$$

Una extensa revisión sobre la resistencia a compresión de los puntales es presentada por Brown y Bayrak (2008)

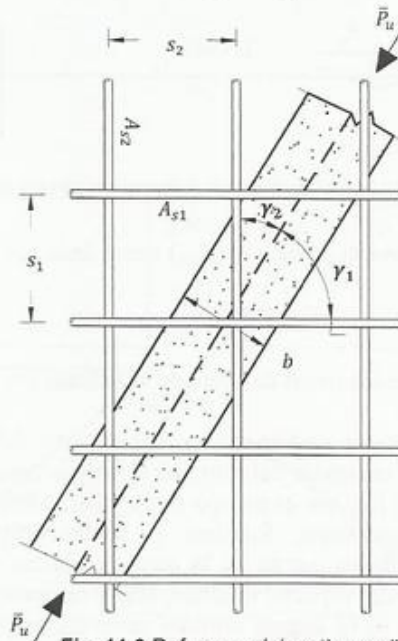


Fig. 11.3 Refuerzo mínimo tipo malla

Tabla 11.1 Factores β_s para determinar la resistencia de los puntales

β_s	Tipo de Puntal
1.00	Miembros prismáticos, generalmente horizontales o verticales de ancho constante
0.75	Miembros inclinados con refuerzo tipo malla requerido por (ACI A.3.3)
0.60	Miembros inclinados sin refuerzo tipo malla

El refuerzo mínimo tipo malla viene dado por (Figura 11.3), (ACI A-4)

$$\sum \frac{A_{st}}{b \cdot s_i} \cdot \sin(\gamma_i) \geq 0.003 \quad [11.4]$$

11.3 RESISTENCIA DE LAS ZONAS NODALES

El nodo es definido como el punto donde las resultantes de los puntales y tirantes se unen. La zona nodal es el área imaginaria de concreto afectada por la intersección de estos. El modo de falla a estudiar es el aplastamiento del concreto. En cada una de las caras de la zona nodal debe cumplirse,

$$\bar{P}_u \leq \overbrace{F_{nn}}^{\text{resist. nodo}} \dots \dots \dots \overbrace{F_{nn}}^{[11.5a]} = f_{cu} \cdot A_n \dots \dots A_n = \frac{\text{altura/}}{\text{ancho del nodo}} \cdot e$$

Donde f_{cu} (Ecuación 11.6) es la resistencia efectiva a compresión de la zona nodal y A_n es el área de su sección transversal medida **perpendicular** al eje del puntal o tirante. (Tabla 11.2, ACI A-8),

$$f_{cu} = 0.85 \cdot f'_c \cdot \beta_n \quad [11.6]$$

Sustituyendo encontramos,

$$w = \frac{\bar{P}_u}{f_{cu} \cdot e} \quad [11.5b]$$

Tabla 11.2 Factores β_n para determinar la resistencia de las zonas nodales

β_n	Tipo de zona nodal
1.00	Comprimidas por todas sus caras (C-C-C)
0.80	Anclan a un tirante (C-C-T)
0.60	Anclan dos o más tirantes (C-T-T)

11.4 RESISTENCIA DE LOS TENSORES

La resistencia del tensor (F_{nt}) viene dada por (ACI A-5),

$$F_{nt} = A_{st} \cdot F_y \quad [11.7]$$

A_{st} Es el área total de acero en el tirante.

Las barras se podrán desarrollar a partir del punto donde el centroide del refuerzo sale de la zona nodal (Figura 11.4, ver el trabajo de Aguilar, Matamoros, Parra-Montesinos, Ramirez y Wight, 2002). El anclaje de las barras en la cercanía de los apoyos requiere de especial cuidado, según se indica en el Capítulo 9. El ángulo mínimo entre un puntal y un tirante que lleguen a un nodo común es 25 grados.

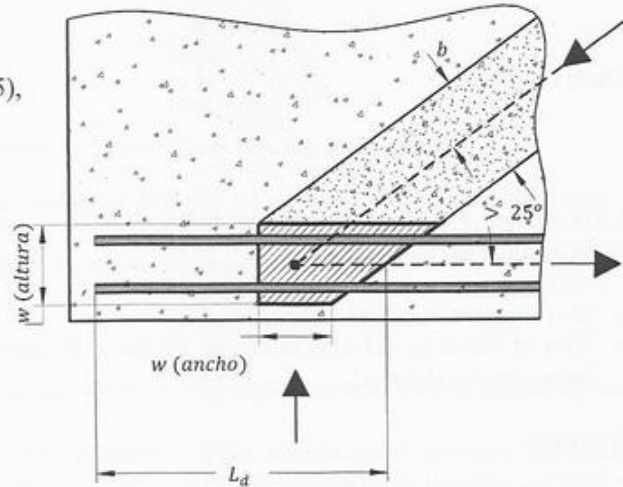


Fig. 11.4 Longitud de desarrollo en zonas nodales

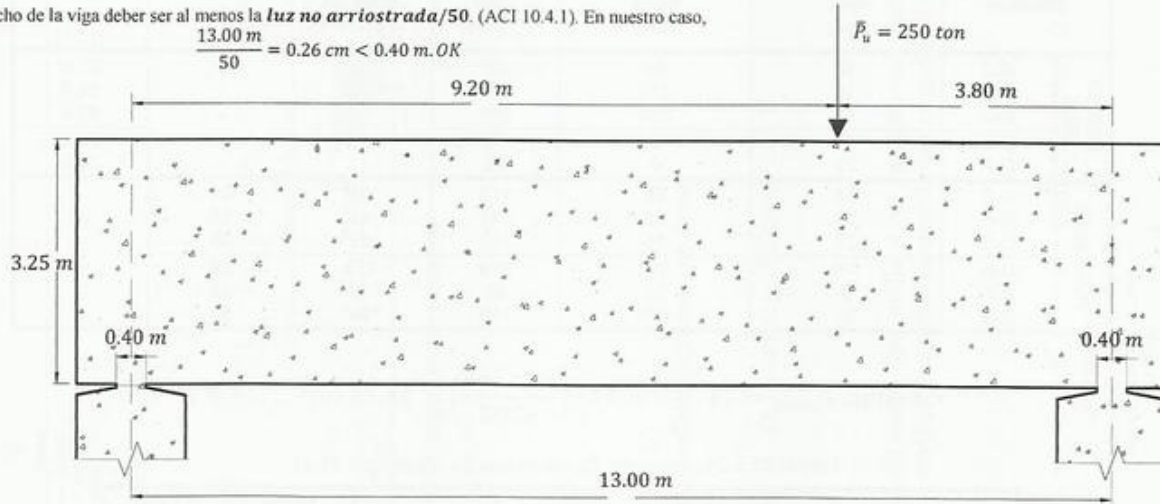
11.5 PROCEDIMIENTO DE DISEÑO RECOMENDADO

- Dibujar el modelo de puntal y tirante en equilibrio con las cargas externas.
- Calcular las fuerzas en los puntales y tirantes. Verificar que el esfuerzo cortante último no exceda $5 \cdot v_c$.
- Seleccionar los factores β_s y β_n (Tablas 11.1 y 11.2).
- Calcular f_{cu} para los puntales y los nodos, con las ecuaciones 11.3 y 11.6, respectivamente.
- Corregir el valor de f_{cu} para los puntales. El valor de f_{cu} corregido de los puntales se tomará como el menor valor entre,
 - f_{cu} del puntal en estudio.
 - f_{cu} calculado para los nodos de los extremos del puntal.
- Verificar que el esfuerzo de aplastamiento en el lugar de aplicación de fuerzas no sobrepase f_{cu} (nodo)
- Calcular el ancho b de los puntales (Ecuación 11.2b) y la cantidad de refuerzo requerida por los tensores (Ecuación 11.7).
- Calcular la altura/ancho (w) de los nodos (Ecuación 11.5b).
- Dibujar los puntales y las zonas nodales a escala (usar herramientas CAD -figuras 11.5 y 11.6-). Si el modelo de puntal y tirante entra en las dimensiones del elemento estructural continuamos con el siguiente paso. De lo contrario redimensionaremos.
- Hacer el despiece y cuidar los detalles, sobre todo el anclaje de las barras en los extremos libres.

EJEMPLO 11.1

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$, ancho de la viga $b = 40 \text{ cm}$. La carga se aplica sobre una placa de $40 \times 40 \text{ cm}$. La viga en estudio y el modelo de puntal y tirante para la viga se presenta en la figuras 11.5 y 11.6

En ancho de la viga deber ser al menos la *luz no arriostrada*/50. (ACI 10.4.1). En nuestro caso,
 $\frac{13.00 \text{ m}}{50} = 0.26 \text{ cm} < 0.40 \text{ m. OK}$



Los resultados de los cálculos se resumen en las tablas 11.3, 11.4 y 11.5. Las dimensiones del modelo se presentan en la Figura 11.6

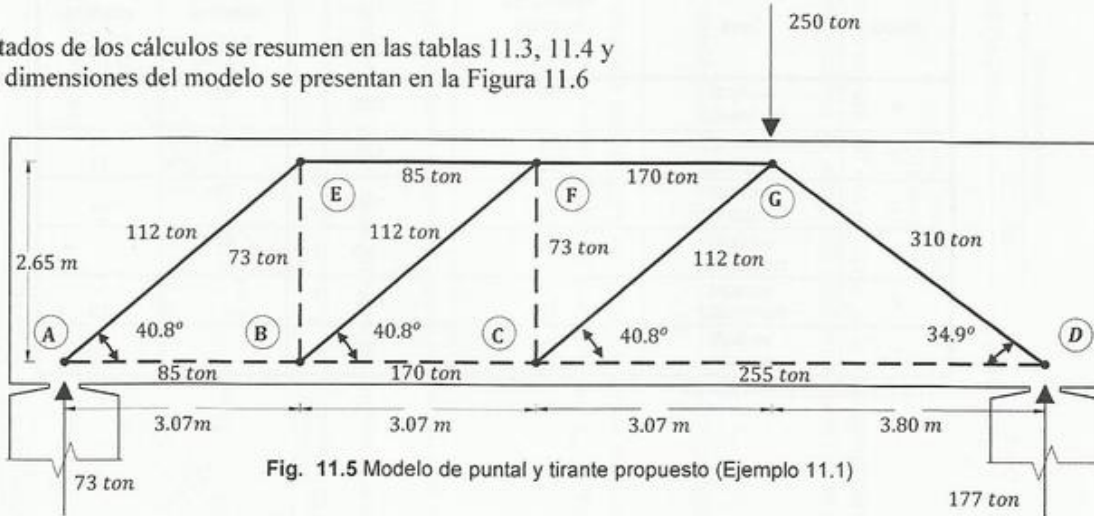


Fig. 11.5 Modelo de puntal y tirante propuesto (Ejemplo 11.1)

Tabla 11.3 Cálculo del f_{cu} para zonas nodales y puntales

Elemento		β_n	β_s	f_{cu} calculado (kg/cm ²) Ecuación [11.3 ó 11.6]	f_{cu} corregido (kg/cm ²)
NODOS	A	0.80	-	190	
	B	0.60	-	142 ¹	
	C	0.60	-	142 ²	
	D	0.80	-	190	
	E	0.80	-	190 ³	
	F	0.80	-	190 ⁴	
	G	1.00	-	238	
PUNTALES	A-E	-	0.75	179	179
	B-F	-	0.75	179	142 ¹
	C-G	-	0.75	179	142 ²
	D-G	-	0.75	179	179
	E-F	-	1.00	238	190 ³
	F-G	-	1.00	238	190 ⁴

El corte máximo actuante es,

$$\frac{177000}{40 \cdot 265} = 16.69 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 5 \cdot v_c \dots \text{OK}$$

$f_{cu}^{1,2,3,4}$: domina la resistencia del nodo sobre la del puntal

El esfuerzo de aplastamiento en el punto de aplicación de las fuerzas es:

Tabla 11.3

$$\text{Nodo A} \quad \frac{73000}{40 \cdot 40} = 45.63 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 190 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ OK}$$

$$\text{Nodo D} \quad \frac{177000}{40 \cdot 40} = 110.63 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 190 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ OK}$$

$$\text{Nodo G} \quad \frac{25000}{40 \cdot 40} = 156.25 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 238 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ OK}$$

Tabla 11.4 Ancho de los puntales (b) y el área de acero de los tensores (Ejemplo 11.1)

Miembro		Componente vert. (ton)	Componente horiz. (ton)	Fuerza axial \bar{P}_u (ton)	f_{cu} asumido (kg/cm ²)	Ancho del pantal b (cm) [11.2b]	Área de acero A_s (cm ²) [11.7]
TENSO- RES	A-B	0	85	85	-	-	27.0*
	B-C	0	170	170	-	-	54.0
	C-D	0	255	255	-	-	81.0
	B-E	73	0	73	-	-	23.2
	C-F	73	0	73	-	-	23.2
PUNTALES	A-E	73	85	112	179	21	-
	B-F	73	85	112	142 ¹	26	-
	C-G	73	85	112	142 ²	26	-
	D-G	177	255	310	179	58	-
	E-F	0	85	85	190 ³	15	-
	F-G	0	170	170	190 ⁴	30	-

$$* \text{domina } A_{smin} = 14 \frac{b \cdot d}{F_y} = 14 \cdot \left(\frac{40 \cdot 265}{4200} \right) = 35.33 \text{ cm}^2 \dots 7 \text{ } \phi 1''$$

Tabla 11.5 Dimensiones de los nodos (w) (Ejemplo 11.1)

Nodo	Cara	Fuerza de anclaje (ton)	f_{cu} (kg/cm ²)	Altura mínima w (cm) [11.5b]	Ancho mínimo w (cm) [11.5b]
A	vertical	85	190	15	-
	horizontal	-		-	-
B	vertical	85	142	20	-
	horizontal	73		-	17
C	vertical	85**	142	20	-
	horizontal	73		-	17
D	vertical	255	190	45	-
	horizontal	-		-	-
E	vertical	-	190	-	-
	horizontal	73		-	13
F	vertical	-	190	-	-
	horizontal	73		-	13

*170-85=85; ** 255-170=85

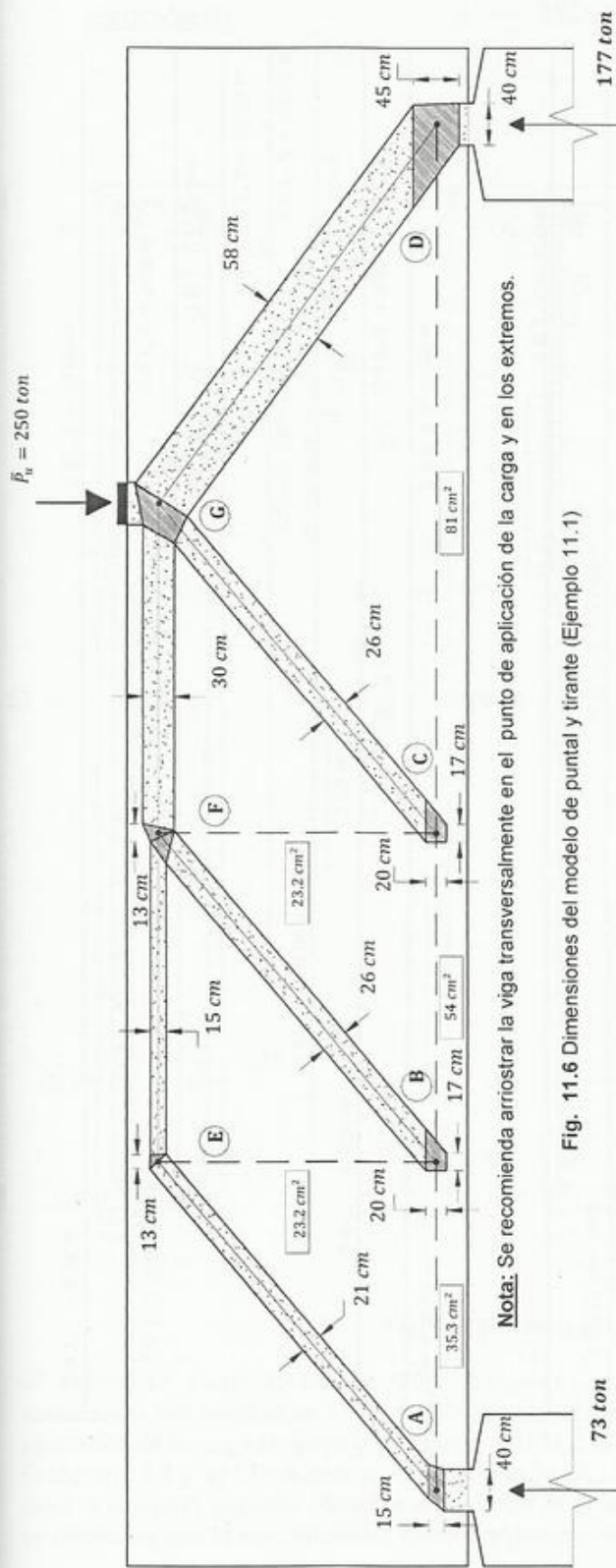


Fig. 11.6 Dimensiones del modelo de puntal y tirante (Ejemplo 11.1)

Nota: Se recomienda arriostrar la viga transversalmente en el punto de aplicación de la carga y en los extremos.

DESPIECE

- **Acero inferior:** Indicado en la Figura 11.7.
- **Acero superior:** colocaremos acero mínimo igual a 35.33 cm^2 que será proporcionado por 7 barras de 1".
- **Estribos:** Los tensores demandan 23.2 cm^2 y cubren un ancho tributario de 3.07 metros aproximadamente, tendríamos entonces,

$$\frac{23.20 \text{ cm}^2}{2 \cdot 0.71} = 16.33 \text{ estribos} \dots s = \frac{307}{16.33} = 18.8 \text{ cm asumiremos } e. \frac{3}{8} @ 18 \text{ cm} < \frac{d}{2}, 60 \text{ cm} \dots O.K$$

- **Acero tipo malla:** Proporcionaremos solamente acero horizontal para satisfacer el requerimiento de acero tipo malla y no agregaremos acero vertical al proporcionado por los estribos. Usaremos barras horizontales de 5/8" cada 20 cm por ambas caras y verificaremos que se cumpla la Ecuación 11.4,

$$\Sigma \frac{A_{si}}{b \cdot s_i} \cdot \text{sen}(\gamma_i) \geq 0.003 \quad \therefore \quad \Sigma \frac{A_{si}}{b \cdot s_i} \cdot \text{sen}(\gamma_i) = \frac{\overbrace{2 \cdot 2}^{\text{barras de 5/8" por ambas caras}}}{40 \cdot 20} \cdot \text{sen}(40.80^\circ) + \underbrace{0}_{\text{ignoraríamos la contribución de los estribos al acero vertical}} = 0.0033 > 0.003 \quad O.K$$

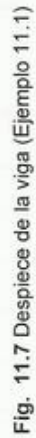
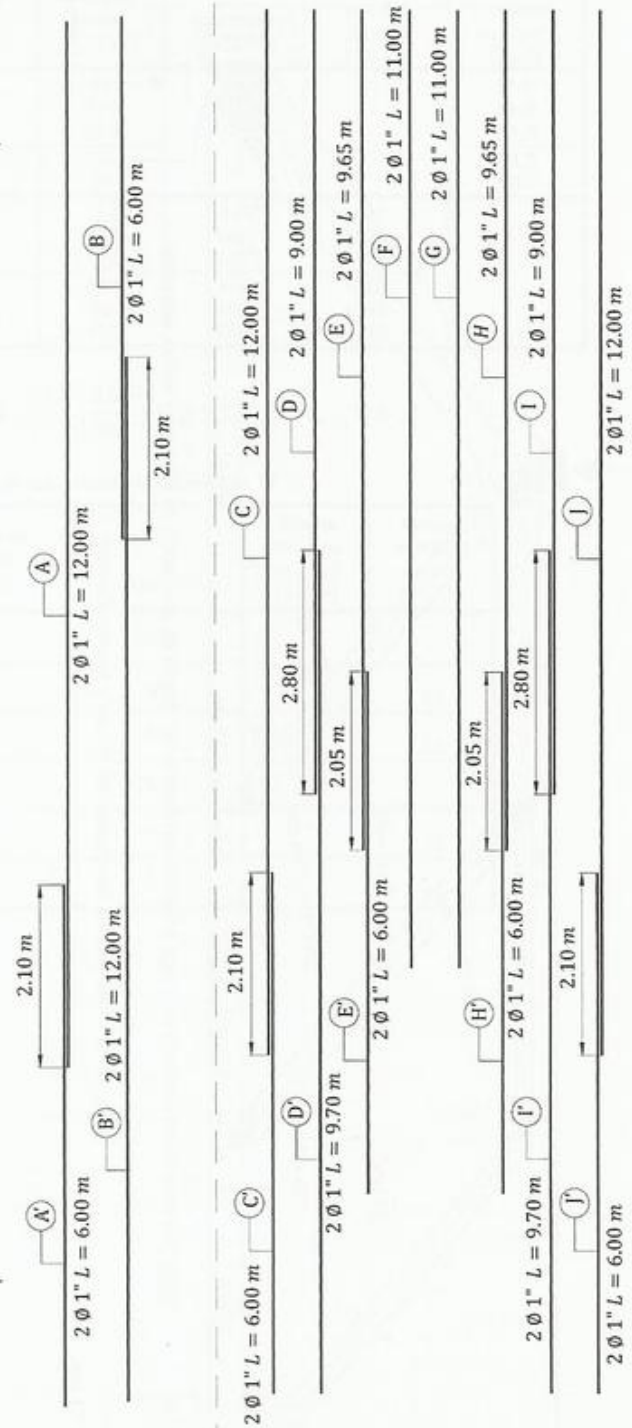


Fig. 11.7 Despiece de la viga (Ejemplo 11.1)



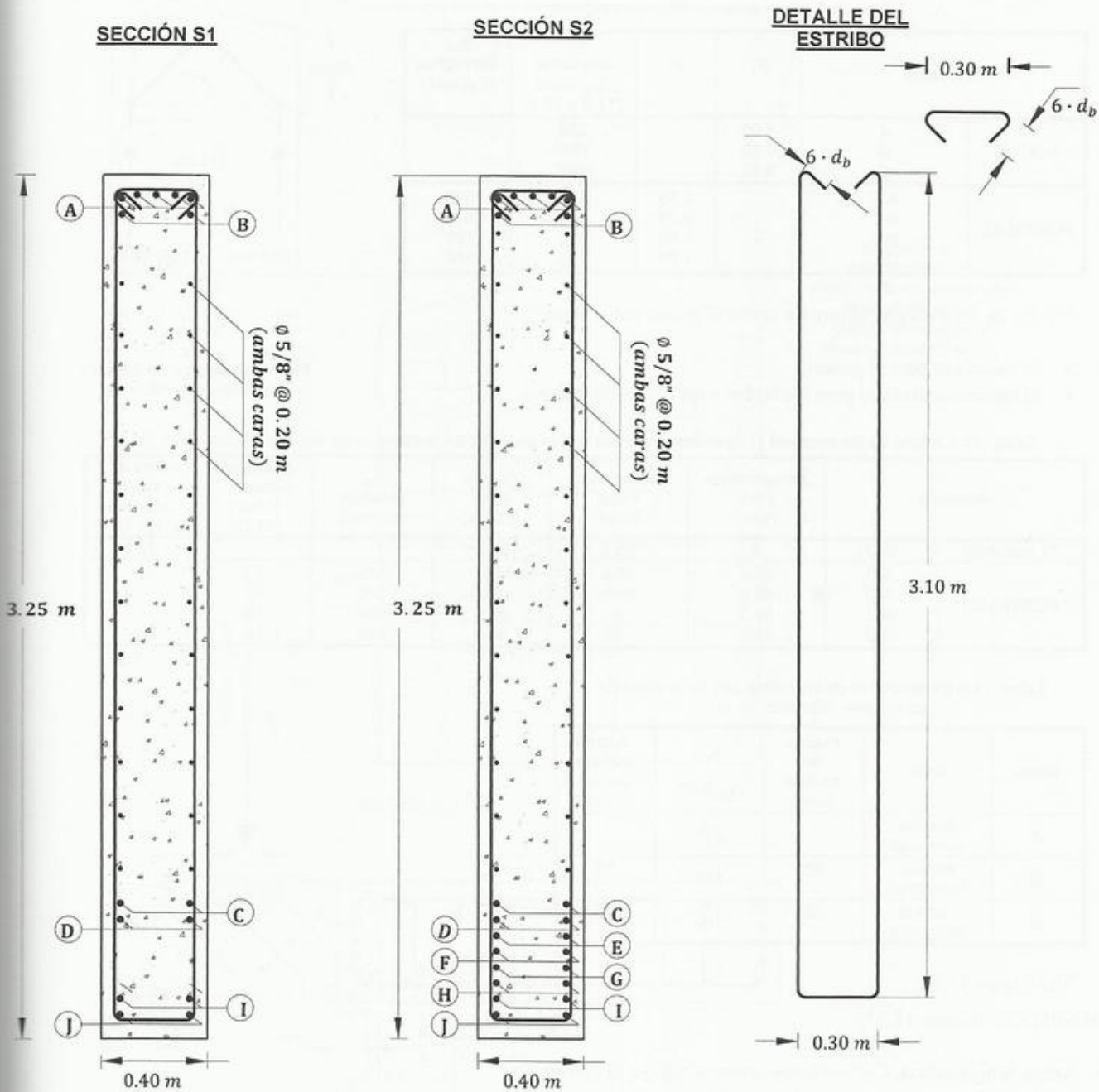


Fig. 11.8 Secciones transversales de la viga en estudio

El trabajo de Parra-Montesinos (2008) presenta una forma directa de diseñar vigas profundas si cuatro condiciones son satisfechas: 1) $f'_c \leq 400 \text{ kg/cm}^2$, 2) La relación $a/d < 1.75$ (a es la distancia del punto de la aplicación de la carga al apoyo y d la altura útil) 3) A la viga se le coloca el refuerzo mínimo en el alma según la Ecuación 11.4 y 4) El esfuerzo cortante promedio $\bar{V}_u/b \cdot d$ no excede $4 \cdot v_c$ en ninguna sección de la viga. Si estas se cumplen, se puede obviar la verificación de la resistencia de los puntales y las zonas nodales y garantizar un diseño seguro, lo cual simplifica considerablemente el diseño.

Diseñaremos la columna exterior de soporte más cargada (Figura 11.9)

Tabla 11.6 β_n y β_s para las columnas exterior

Elemento		β_n	β_s	f_{cu} calculado (kg/cm ²) [11.3 ó 11.6]	f_{cu} corregido (kg/cm ²)
NODOS	A	1.00		238	
	B	0.80		190 ¹	
	C	0.80		190 ²	
PUNTALES	A-B	-	0.75	179	179
	A-C	-	0.75	179	179
	B-D	-	1.00	238	190 ¹
	C-E	-	1.00	238	190 ²

^{1,2}: f_{cu} de los puntales se tomará como el menor valor entre,

- El calculado para el puntal.
- El mínimo calculado para los nodos a los que el puntal une.

Tabla 11.7 Ancho de los puntales (b) y el área de acero de los tensores en la columna de soporte (Ejemplo 11.1)

Miembro		Componente vert. (ton)	Componente horiz. (ton)	Fuerza axial \bar{P}_u (ton)	f_{cu} asumido (kg/cm ²)	Ancho del puntal b (cm) [11.2b]	Área de acero A_s (cm ²) [11.7]
TENSORES	B-C	0	88.5	88.5	-	-	28.1
PUNTALES	A-B	88.5	88.5	125.0	179	23	-
	A-C	88.5	88.5	125.0	179	23	-
	B-D	88.5	0	88.5	190	16	-
	C-E	88.5	0	88.5	190	16	-

Tabla 11.8 Dimensiones de los nodos (w) de la columna de soporte (Ejemplo 11.1)

Nodo	Cara	Fuerza de anclaje (ton)	f_{cu} (kg/cm ²)	Altura mínima w (cm) [11.5b]
A	vertical	-	238	-
	horizontal	-	-	-
B	vertical	85	190	15
	horizontal	-	-	-
C	vertical	85	190	15
	horizontal	-	-	-

Ver Figura 11.10

DESPIECE (Figura 11.11)

- **Acero longitudinal**, Colocaremos acero mínimo a la columna igual al 1% y será proporcionado por 24 barras de 3/4".
- **Acero transversal**, Calcularemos la cantidad de acero horizontal requerida por el tensor = 28.1 cm² y será proporcionada por 13 estribos de 1/2" de dos ramas colocados como se muestra en la Figura. 11.11
- **Acero tipo malla**, Ecuación 11.4,

$$\Sigma \frac{A_{si}}{b \cdot s_i} \cdot \sin(\gamma_i) \geq 0.003$$

Quedará cubierto con el acero longitudinal de la columna.

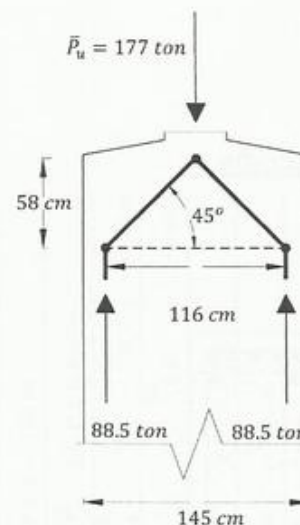


Fig. 11.9 Modelo de puntal y tirante para la columna

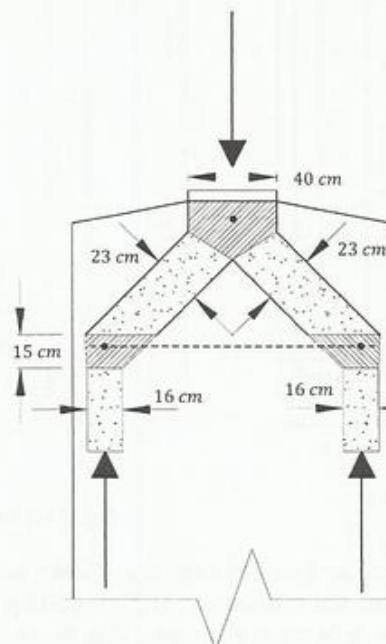


Fig. 11.10 Dimensiones del modelo de puntal y tirante en la columna de soporte (Ejemplo 11.1)

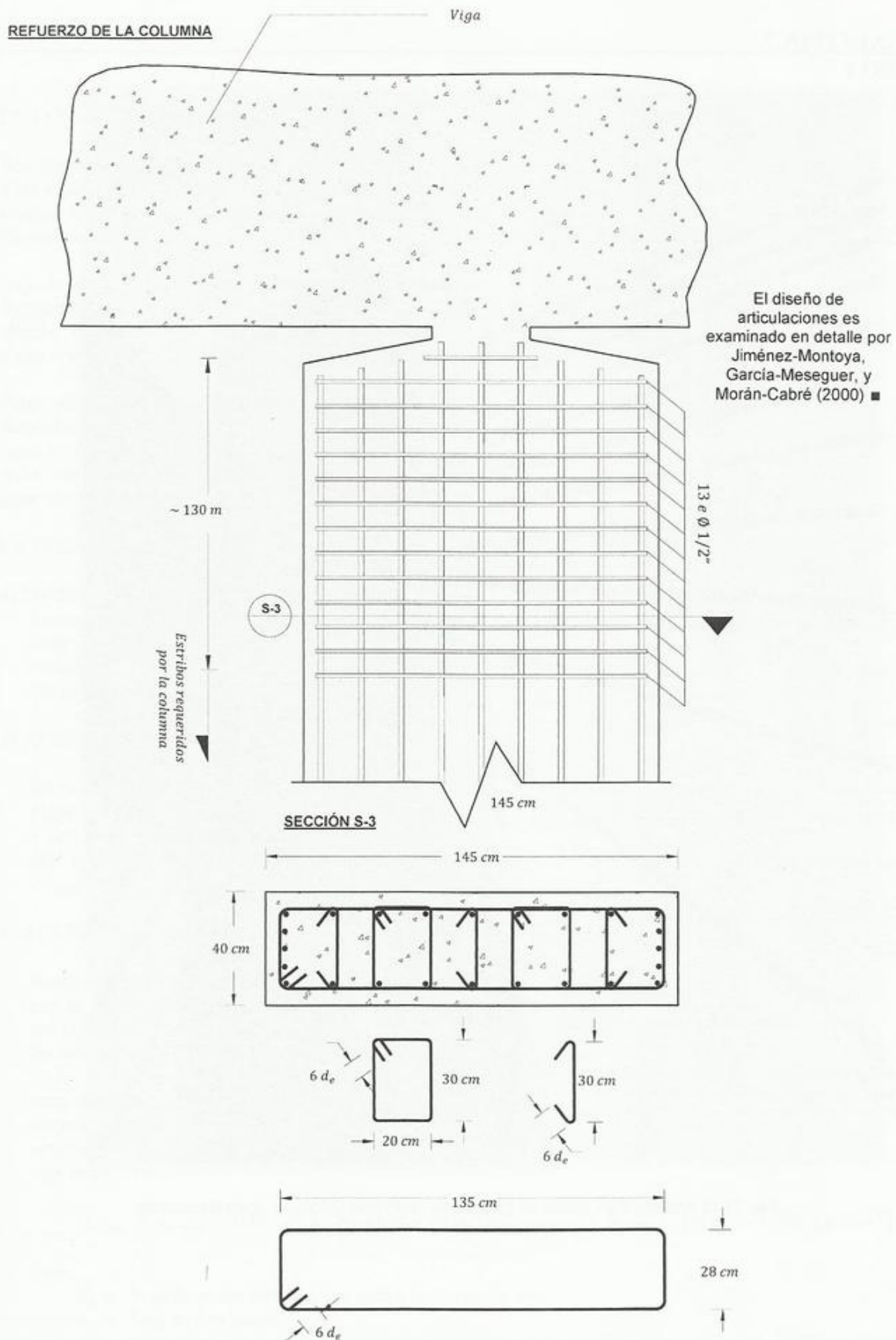


Fig. 11.11 Despiece de la unión entre la columna y la viga (Ejemplo 11.11)

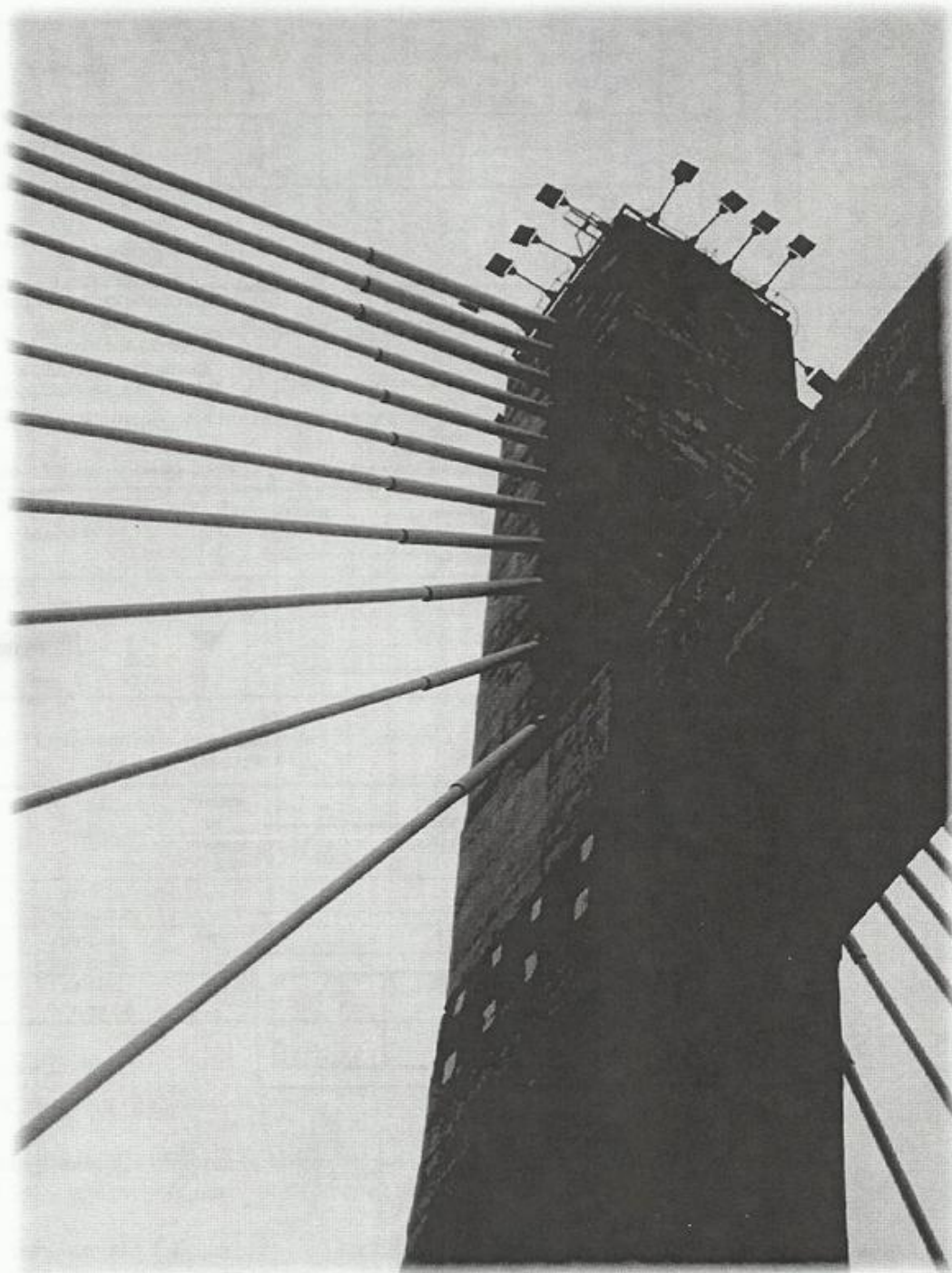


Fig. 11.12 Anclaje de los cables de suspensión del Puente Orinoquia (zona discontinua)
Cortesía de Luis B. Fargier G.

12.1 LOSAS ARMADAS EN UN SENTIDO

Son aquellas con armadura principal perpendicular a las vigas que le sirven de apoyo (Figura 12.1). Su espesor $h = t$ es mucho menor que sus otras dos dimensiones.

Bajo la acción de las cargas verticales se flectan, formando una superficie elástica de curvatura simple (menos en las proximidades de vigas transversales).

Para efectos de cálculo se consideran como formadas por una serie de vigas paralelas de ancho igual a 100 cm en losas macizas o a la separación entre nervios en el caso de losas nervadas que generalmente es 50 cm.

12.2 LOSAS MACIZAS $b = 1.00 \text{ m}$

a) ESPESORES MÍNIMOS $h = 7 \text{ cm}$

Losas continuas.....	$h \geq L/28$	} ACI 318 - 08 ... 9.5.2
Simplemente apoyadas.....	$h \geq L/20$	
Voladizos.....	$h \geq L/10$	
Un extremo continuo.....	$h \geq L/24$	

b) ACERO PRINCIPAL $A_s \Rightarrow \text{cm}^2/\text{m ancho}$

Barras de 3/8" o más, perpendiculares a las vigas principales, separadas $s \leq 3 \cdot h \leq 45 \text{ cm}$ y colocadas lo más lejos posible del eje neutro, con un recubrimiento mínimo según normas. $A_{s \text{ min}} = 0.18 \cdot h$. (ACI 318-08, 10.5.4)

c) ACERO DE REPARTICIÓN $A_{s \text{ rep}} \Rightarrow \text{rep.}$

Barras de 3/8" o más directamente en contacto con las cabillas principales y más cerca que ellas del eje neutro. Se colocan perpendicularmente a las barras principales a distancias no mayores de $3 \cdot h$ ó 45 cm. Resisten los efectos de la retracción y los cambios de temperatura; contribuyen a distribuir las cargas y sirven para mantener la posición del acero principal del cual se amarran,

$$A_{s \text{ rep}} = A_{s \text{ min}} = 0.0018 \cdot b \cdot h \rightarrow \text{para } b = 100 \text{ cm} \rightarrow = 0.18 \cdot t \text{ (si } F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2\text{)}$$

Sean,

A_s = Área de acero principal por metro de ancho de losa

a_s = Área de una barra

s = Separación centro a centro de barras.... $s = 100 \cdot a_s / A_s$ compruebe s_{max} (Capítulo 4)

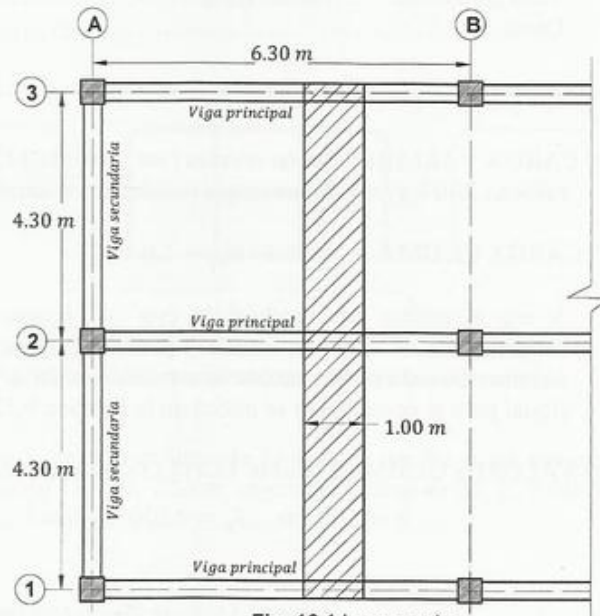


Fig. 12.1 Losa maciza

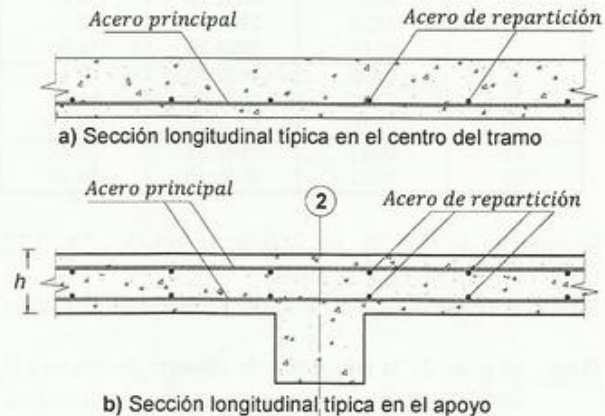


Fig. 12.2 Secciones transversales de la losa maciza

Nota: Se pueden diseñar losas con espesores menores a los expuestos en 12.2a si se verifican las flechas.

d) CARGAS PERMANENTES

Peso propio supuesto.....	$2400 \cdot h \text{ (en m)} = \text{kg/m}^2$
Peso piso o impermeabilización.....	$= \text{kg/m}^2$
Peso friso.....	$= \text{kg/m}^2$
Peso tabiquería.....	$= \text{kg/m}^2$
Otros.....	$= \text{kg/m}^2$
	$w_m = \text{kg/m}^2$
	$w_v = \text{kg/m}^2$

e) CARGA VARIABLE Según normas (ver Covenin 1756-2001). Por ejemplo, viviendas 175 kg/m^2 oficinas 250 kg/m^2 . Sobrecargas usuales se resumen en el Apéndice I.

f) CARGA ÚLTIMA $w_u = 1.2 \cdot w_m + 1.6 \cdot w_v$

Si w_m es grande en comparación con w_v (como ocurre en la gran mayoría de edificios comerciales y residenciales de concreto armado) puede utilizarse w_u directamente en el cálculo de cortes y momentos últimos. Cuando no se cumpla la condición anterior las solicitaciones M_m y M_v se calcularán por separado. (Igual para el corte, como se indica en la Sección 9.12).

g) VALORES ÚLTIMOS (Tabla 12.1) LOSAS MACIZAS

$$b = 100 \text{ cm} \dots F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \dots f'_c = 240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2$$

Tabla 12.1 Valores últimos para losas macizas por metro de ancho

d (cm)	V_c (kg)	\bar{M}_u (kg · m)	A_s (cm ²)	d (cm)	V_c (kg)	\bar{M}_u (kg · m)	A_s (cm ²)
5	4105	1563.56	10.20	13	10673	10569.70	26.52
6	4926	2251.53	12.24	14	11495	12258.35	28.56
7	5747	3064.59	14.28	15	12316	14072.08	30.60
8	6568	4002.73	16.32	16	13137	16010.90	32.64
9	7389	5065.95	18.36	17	13958	18074.81	34.68
10	8210	6254.26	20.40	18	14779	20263.80	36.72
11	9031	7567.65	22.44	19	15600	22577.88	38.76
12	9852	9006.13	24.48	20	16421	25017.04	40.80

Se tomó $a_{\max} = 0.75 \cdot a_{bal}$ (Balanceado) ... $\zeta = 0.75$

Debe cumplirse $V_c \geq V_u/0.75$

Para el acero se consideró el coeficiente de flexión $\phi = 0.90$

Nota: el peso de la tabiquería se obtiene dividiendo el peso total de los tabiques que actúan directamente en la losa por el área de la misma. El valor mínimo es de 100 kg/m^2 . El valor usual es de 250 kg/m^2 . A menos que se trate de tabiques livianos esta carga la consideramos como permanente. Generalmente una losa maciza de entrepiso bien diseñada se tiene $V_c > \bar{V}_u$ y para estos elementos las normas no exigen estribos (ACI 318-08, sección 11.5.6.1).

12.3 LOSAS NERVADAS

Son losas formadas por una serie de pequeñas vigas en TE, con los espacios entre nervios rellenos con bloques livianos (de arcilla, concreto, madera, anime, etc.) ó simplemente sin relleno (figuras 12.3 y 12.4).

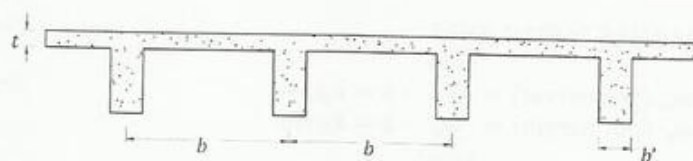
a) DIMENSIONES

$$t \geq (b - b')/12$$

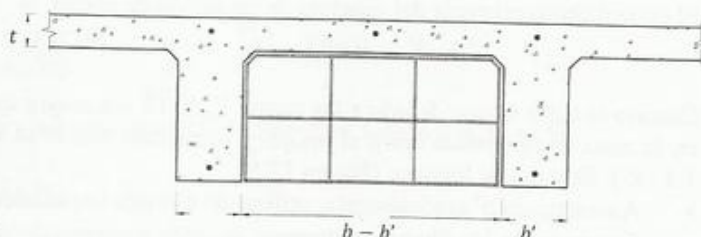
$$t \geq 4 \text{ cm si hay relleno ó } \geq 5 \text{ cm si no hay relleno}$$

$$b \leq 75 + b' \quad b' \geq 10 \text{ cm}$$

Para luces mayores de 5.00 m se recomienda colocar un nervio transversal igual a los nervios longitudinales.



a) sin relleno



b) con bloques de arcilla o concreto como relleno

Fig. 12.3 Sección transversal típica de una losa nervada

Comúnmente se tiene: $b = 50 \text{ cm}$, $b' = 10 \text{ cm}$, $t = 5 \text{ cm}$ con relleno de bloque de arcilla o de concreto (huecos) de 40 cm de ancho ($b-b'$), 20 de largo y alturas de 15, 20, 25 cm, según sea la losa de 20, 25 ó 30 cm de alto respectivamente (Figura 12.4).

Espesores mínimos a menos que se verifiquen las flechas en losas nervadas (ACI-318-08 Sección 9.5.2). Tabla 4.3

Losas continuas..... $h \geq L/21$
 Simplemente apoyadas... $h \geq L/16$
 Voladizos..... $h \geq L/8$
 Un extremo continuo.... $h \geq L/18.5$

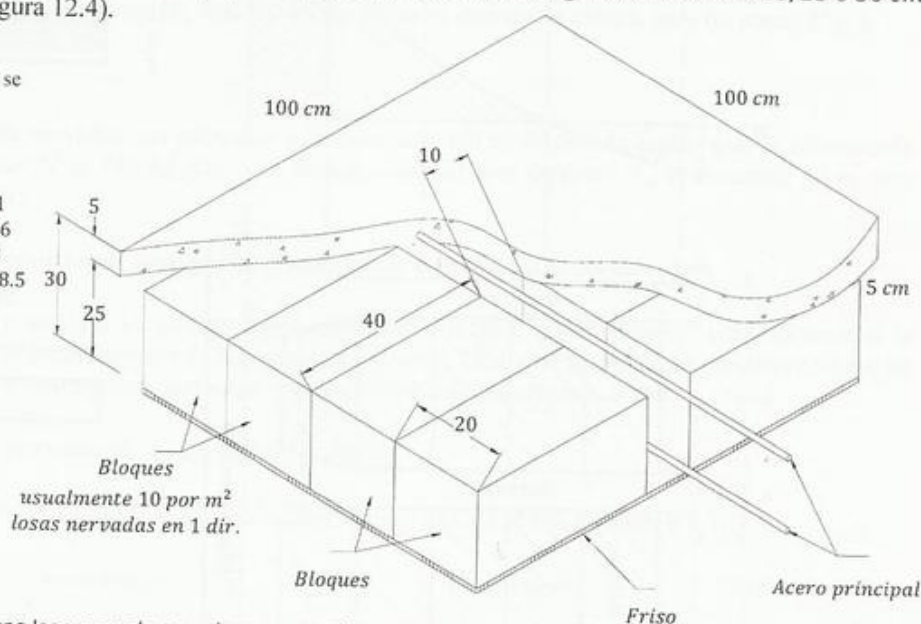


Fig. 12.4 Isometría de una losa nervada armada en un sentido con bloques de 20 x 40 x 25 cm (10 bloques por m²)

b) CARGAS PERMANENTES

Piso o impermeabilización y su protección.....	kg/m^2
Los superior.....	$2400 \cdot t \text{ (en m)} = \text{kg/m}^2$
Nervios.....	$2400 \cdot (h - t) \cdot b'/b = \text{kg/m}^2$
Relleno.....	kg/m^2
Friso con mortero de cemento.....	$2000 \cdot \text{espesor} = \text{kg/m}^2$
Aumento por concreto adicional resultante de la colocación de tuberías.....	kg/m^2
Tabiquería.....	kg/m^2

c) SOBRECARGA (Carga variable). Por normas (Apéndice I)..... $w_m = \text{kg/m}^2$
 $w_v = \text{kg/m}^2$

d) CARGAS POR NERVIO

$$w_m \text{ (por nervio)} = \frac{kg/m^2}{\cdot b} \cdot b = kg/m$$

$$w_v \text{ (por nervio)} = \frac{kg/m^2}{\cdot b} \cdot b = kg/m$$

e) MACIZADO POR CORTE

El corte último resistente del concreto de un nervio de ancho b' y altura útil d , es igual a (Sección 8.7),

$$1.1 \cdot V_c = 0.583 \cdot \sqrt{f_c'} \cdot b' \cdot d \quad [\text{ACI 318 - 08, Sección 8.13.8}]$$

Cuando el corte último debido a las cargas $V_u / 0.75$ sea mayor que $1.1 \cdot V_c$ es necesario aumentar el ancho b' en la zona comprendida entre el apoyo y la sección donde se cumple: $(V_u / 0.75) \leq 1.1 \cdot V_c$ (ó $V_u \leq 0.75 \cdot 1.1 \cdot V_c$). Esto puede lograrse (Figura 12.5).

- Aumentando b' gradualmente, utilizando bloques trapeziales en los extremos.
- Suprimiendo los bloques extremos, es decir aumentando de b' hasta $b - b'$, lo que transforma la losa nervada a maciza en los extremos adyacentes a la viga principal o de carga.

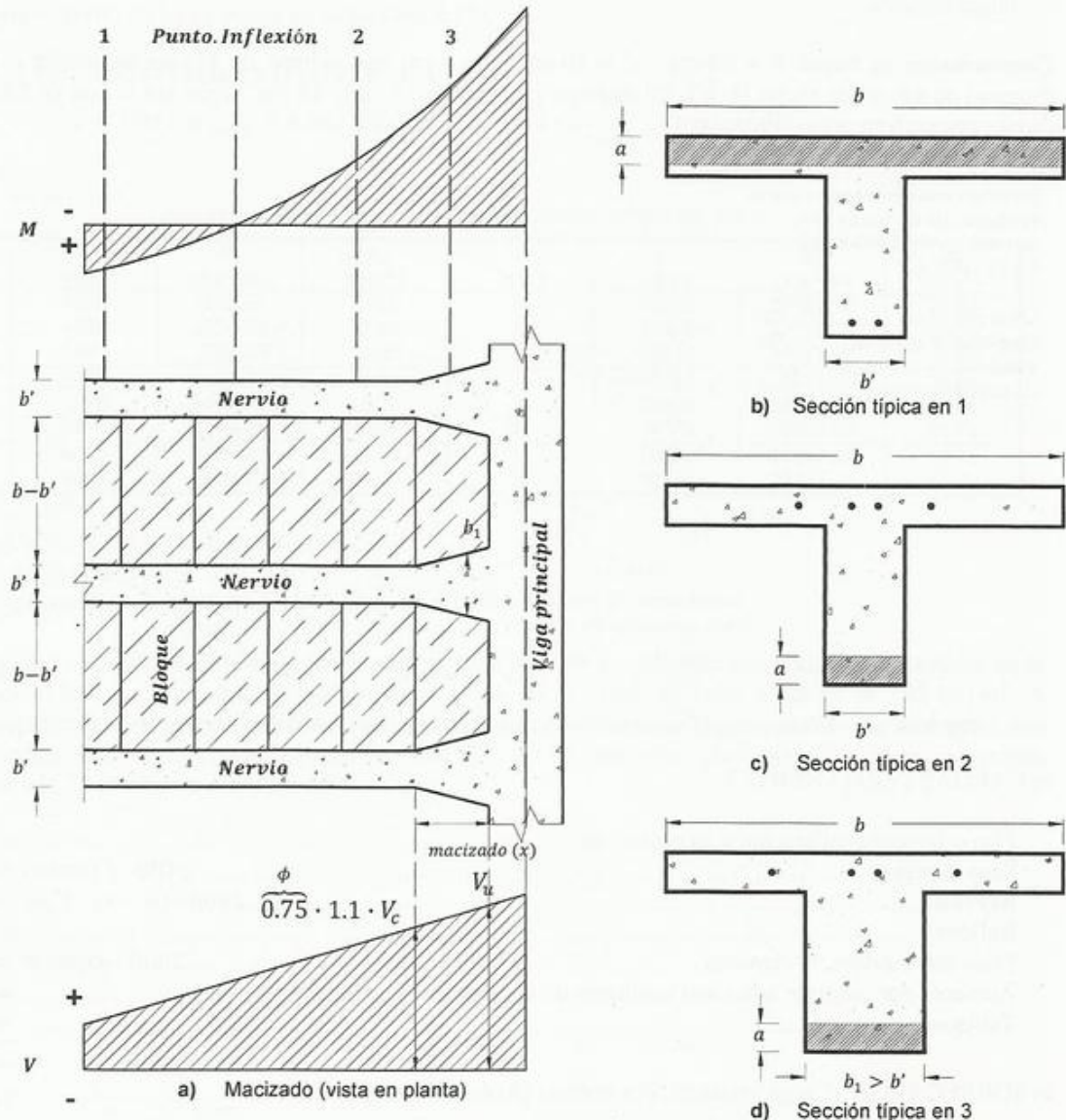


Fig. 12.5 Losa nervada

f) LONGITUD DE MACIZADO (Figura 12.5a):

A una distancia x del apoyo se tiene un corte,

$$\bar{V}_{ux} = \bar{V}_u - \bar{w}_u \cdot x$$

Para $V_{ux} = 0.75 \cdot V_c$ tenemos,

$$x = [\bar{V}_u - (0.75 \cdot 1.1 \cdot V_c)] / \bar{w}_u. \text{ Donde } \bar{V}_u = V_u / \phi \text{ es el corte medido en el borde del apoyo.}$$

g) SECCIÓN RESISTENTE

Tracción abajo (tramos centrales, Figura 12.5b):

Zona comprimida rectangular de ancho b y altura a menor que t . Sección 1 de la Figura 12.5a.

Tracción arriba (zona de apoyos, Figura 12.5c):

- Entre el punto de inflexión y la sección donde $V_u = 0.75 \cdot 1.1 V_c$ (zona comprimida de ancho b' y altura a). Sección 2 de la Figura 12.5a.
- En zona de aumento de b' (macizado): el rectángulo comprimido tiene un ancho b_1 comprendido entre b' y b y una altura a . Sección 3 de la Figura 12.5a.

La diferencia del valor de A_s para un \bar{M}_u dado no es significativa cuando se calcula para un ancho b' y b .

Observaciones

- Los espesores de las losas nervadas son pequeños y la compactación es incómoda, por lo que se recomienda diseñar para concretos con $f'_c \leq 240 \text{ kg/cm}^2$. La disminución del área de acero A_s al aumentar f'_c es muy pequeña (ver Sección 5.11).
- La longitud de macizado no debe ser muy grande, es preferible aumentar la altura de la losa.
- Cuando losas nervadas y macizas se utilicen como cubiertas o techos, recomendamos construirlas con la pendiente adecuada para el escurrimiento de las aguas de lluvia ($\geq 2\%$) y no lograr dicha pendiente a base de rellenos que entre otros inconvenientes, aumentan significativamente las cargas muertas.
- El acero mínimo en losas nervadas es: $A_{s \min} = 14 \cdot b' \cdot d / F_y$

h) CORTES Y MOMENTOS EN LOSAS Y VIGAS CONTIGUAS (ACI 318-08, Sección 8.3.3)

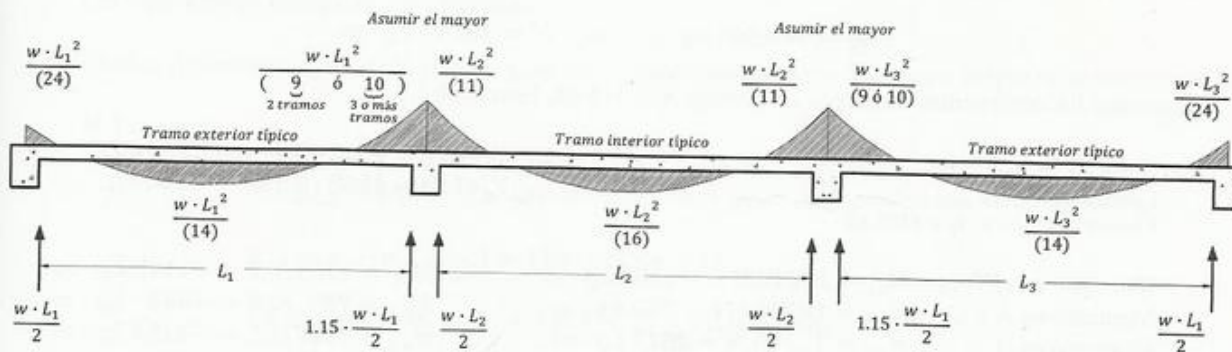


Fig. 12.6 Coeficientes aproximados para calcular momentos y cortes en losas y vigas

Nota: Los resultados de los coeficientes son fiables si L de dos tramos adyacentes no difiere en más de un 20%, la carga sobre el tramo es repartida y la carga viva no excede 3 veces a la muerta.

EJEMPLO 12.1

Losa maciza entrepiso vivienda

$$\begin{aligned}w_v &= 175 \text{ kg/cm}^2 \\f'_c &= 200 \text{ kg/cm}^2 \\F_y &= 4200 \text{ kg/cm}^2 \\E_c &= 210000 \text{ kg/cm}^2 \\n &= 10 \\h &= 14 \text{ cm}\end{aligned}$$

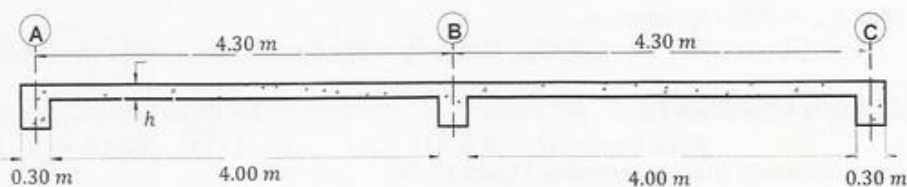


Fig. 12.7 Losa maciza del Ejemplo 12.1

• Cargas permanentes

De acuerdo con normas el espesor mínimo a menos que se verifiquen deflexiones es: (ACI 9.5.2, Tabla 4.3)
 $\Rightarrow h = 400/24 = 16.7 \text{ cm}$. Calcularemos la losa con $h = 14 \text{ cm}$ y verificaremos que las deflexiones no excedan los valores admisibles (Tabla 4.2)

Piso de granito	$(0.05) \cdot (2200) = 110 \text{ kg/m}^2$
Peso propio losa.....	$(0.14) \cdot (2400) = 336 \text{ kg/m}^2$
Friso cemento.....	$= 34 \text{ kg/m}^2$
Tabiquería.....	$= 240 \text{ kg/m}^2$
	$w_m = 720 \text{ kg/m}^2 \dots \cdot 1.2 = 864 \text{ kg/m}^2$
Carga variable (Viva, ver Apéndice I).....	$w_v = 175 \text{ kg/m}^2 \dots \cdot 1.6 = 180 \text{ kg/m}^2$
	$w = 895 \text{ kg/m}^2 \dots w_u \cong 1140 \text{ kg/m}^2$

• Características

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 170 \cdot 100 = 17000 \text{ kg/cm}$$

$$v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = 7.5 \text{ kg/cm}^2 \dots \phi \cdot v_c = 5.62 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{para} \quad d = 11 \text{ cm}$$

$$V_c = (7.5) \cdot (100) \cdot (11) = 8250 \text{ kg} \quad 0.75 \cdot V_c = 6182 \text{ kg}$$

$$A_{s \min} = (0.18) \cdot h = 2.52 \text{ cm}^2/\text{m}$$

• Cortes y Momentos

$$w_u \cdot L = 4560 \text{ kg} \quad w_u \cdot L^2 = 18240 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Usaremos los coeficientes dados por las normas ACI 318-08, Sección 8.3.3

Corte en B	$1.15 \cdot V_u \cdot L/2 = 4560 \cdot 0.575 = 2622 \text{ kg} *$
Corte en A	$V_u \cdot L/2 = 4560 \cdot 0.500 = 2280 \text{ kg}$
* Menor que	$0.75 \cdot V_c = 6182 \text{ kg}$

Momento en el Tramo M_{u1}	$= 18240/14 = 1303 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots \bar{M}_{u1} = 1303/0.9 = +1448 \text{ kg} \cdot \text{m}$
Momento en A y C M_{uA}	$= 18240/24 = 760 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots \bar{M}_{uA} = 760/0.9 = -844 \text{ kg} \cdot \text{m}$
Momento en B M_{uB}	$= 18240/9 = 2027 \text{ kg} \cdot \text{m} \dots \bar{M}_{uB} = 2027/0.9 = -2252 \text{ kg} \cdot \text{m}$

- Áreas de acero (ver Capítulo 5)

$$a = d - \sqrt{d^2 - (200 \cdot \bar{M}_u / K) \dots \dots [5.25]} \quad A_s = K \cdot a / F_y$$

Tramos:	$a = 0.80 \text{ cm}$	$A_s = 3.25 \text{ cm}^2/\text{m}$
Apoyo B:	$a = 1.28 \text{ cm}$	$A_s = 5.17 \text{ cm}^2/\text{m}$ (Mayor que el mínimo)
Apoyo A:	$a = 0.46 \text{ cm}$	$A_s = 1.87 \text{ cm}^2/\text{m}$ (Menor que el mínimo)

Para $\emptyset 3/8''$ con $a_s = A_b = 0.71 \text{ cm}^2$ y $D_b = 0.95 \text{ cm}$ Tenemos,

En apoyo B, Por metro (100 cm) de ancho tendríamos,

$$\begin{aligned} \text{Número de barras} &= 5.17 \text{ cm}^2 / 0.71 \text{ cm}^2 = 7.28 \text{ barras} \\ s &= 100 \text{ cm} / 7.28 = 13.73 \text{ cm} \quad s_{\max} = 3 \cdot h = 42 \text{ cm} \quad O.K \end{aligned}$$

En el centro del tramo,

$$\begin{aligned} \text{Número de barras} &= 3.25 \text{ cm}^2 / 0.71 \text{ cm}^2 = 4.58 \text{ barras} \\ s &= 100 \text{ cm} / 4.58 = 21.84 \text{ cm} < s_{\max} \end{aligned}$$

Repartición,

$$A_{s \text{ Repartición}} = 0.0018 \cdot b \cdot t = 2.52 \text{ cm}^2 \rightarrow 3/8 @ 28 \text{ cm} \leq 3 \cdot h \quad O.K$$

Utilizaremos $d = 11 \text{ cm}$ que corresponde a un recubrimiento de cálculo de 3 cm, y para $\emptyset 3/8''$ a un recubrimiento neto de 2.5 cm. Las normas exigen un mínimo de 1.5 cm.

- Agrietamiento

Las normas ACI-318-08 establecen límites en la separación de las barras para controlar el agrietamiento. Del Capítulo 4 (Sección 4d) se obtiene,

$$s_{\max} = \frac{95}{f_s(\text{ton/cm}^2)} - 2.5 \cdot c_c \leq \frac{75}{f_s(\text{ton/cm}^2)} \dots \dots [4.3] \quad ACI 10.4$$

$$\text{Asumiremos } f_s = 0.6 \cdot F_y = 2.52 \text{ ton/cm}^2$$

$$s_{\max} = \frac{95}{2.52} - 2.5 \cdot 2.5 = 31.45 \text{ cm} \leq \frac{75}{2.5} = 30 \text{ cm} \quad \therefore s_{\max} = 30 \text{ cm}$$

Las separaciones escogidas son adecuadas.

- Flecha. Asumiremos giro de la elástica igual cero (empotramiento) en B y apoyo simple en el extremo A ó C.

M Trabajo

$$M_{\text{trabajo}} = M_u / (F.S) \quad \text{Donde } F.S \text{ es el factor de seguridad que viene dado por,}$$

$$F.S = w_u / (w_m + w_v) = 1140 / 895 = 1.27$$

$$\text{En el tramo, } M_{\text{trabajo}} = 1303 / 1.27 = 1026 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

M Agrietamiento

Para la sección de concreto sólo, se tiene,

$$I_{gruesa} = 100 \cdot 14^3 / 12 = 22867 \text{ cm}^4$$

$$S = \frac{I_g}{(h/2)} = \frac{22867}{(14/2)} = 3267 \text{ cm}^3 \text{ (módulo de sección)}$$

$$f_t = 2 \cdot \sqrt{f_c'} = 28.28 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ (esfuerzo de agrietamiento)}$$

$$M_{agrietamiento} = (28.28) \cdot (3267) / 100 = 924 \text{ kg} \cdot \text{m} < M_t$$

I Efectivo en el tramo

$$I_e = R \cdot I_{gruesa} + (1 - R) \cdot I_{agrietada} \dots [4.1]$$

Siendo el momento de agrietamiento mayor que el de trabajo tendremos $I = I_g = \frac{100 \cdot 14^2}{12}$. En efecto,

$$\frac{M_{agrietamiento}}{M_{trabajo}} = \frac{924}{1026} = 0.90 \quad R = 0.90^3 = 0.73 \dots 1 - R = 0.27$$

Calcularemos la posición del eje neutro x , tomando el momento estático del área comprimida y traccionada asumiendo la sección transformada como se muestra en la Figura 12.8 (Sección 4.3),

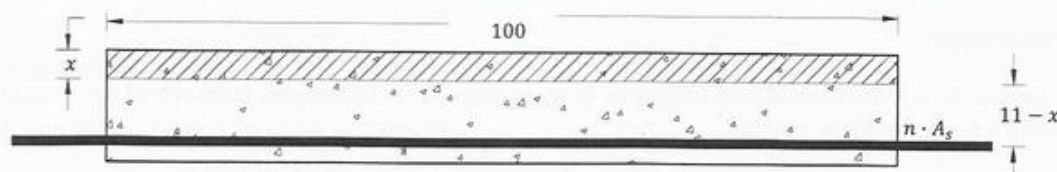


Fig. 12.8 Cálculo de x

$$x \cdot \frac{x}{2} \cdot 100 = \frac{n}{10} \cdot \frac{A_s}{3.25} \cdot \frac{\text{brazo}}{(11 - x)} \Rightarrow x = 2.4 \text{ cm}$$

$$I_{agrietada} = \frac{2.4^3 \cdot 100}{3} + 10 \cdot 3.25 \cdot (11 - 2.4)^3 = 2846 \text{ cm}^4$$

$$I_e = 0.73 \cdot 22867 + (0.27) \cdot 2846 = 17461 \text{ cm}^4$$

$$\delta_i (\text{cm}) = \frac{2}{384} \cdot w \cdot \frac{L^4}{(E_c \cdot I_e)} = \frac{2}{384} \cdot (8.95 - 1.75) \cdot \frac{400^4}{(210000 \cdot 17461)} = 0.26 \text{ cm}$$

El incremento de la flecha inicia a largo plazo debido al efecto del flujo plástico puede alcanzar (Sección 4d)

$$\delta_{LP} = \gamma \cdot \delta_i \cong 2 \cdot 0.26 = 0.52 \text{ cm} \dots L/1500 < L/240 \dots \text{OK}$$

La flecha instantánea debido a carga viva,

$$\delta_i (cv) = \frac{2}{384} \cdot w \cdot \frac{L^4}{(E_c \cdot I_e)} = \frac{2}{384} \cdot (1.75) \cdot \frac{400^4}{(210000 \cdot 17461)} = 0.06 \text{ cm} < \frac{L}{360} \dots \text{OK}$$

La expresión $h = L/24$ es aproximada, y no toma en cuenta el valor de la carga, que en este caso es muy pequeña, pero es útil para calcular un valor de $-h-$ que sirva de punto de partida. Es importante destacar que en este ejemplo la inercia efectiva se calculó para la sección en el tramo. Una mejor aproximación para usar en el cálculo de las flechas se obtiene al promediar las inercias efectivas de las secciones en las caras de los apoyos y la del tramo.

- **Distribución del acero**

Abajo

$\emptyset 3/8''$ (#3) a 40 cm $L = 6$ m

$\emptyset 3/8''$ (#3) a 40 cm $L = 3$ m

Σ colocado: $3.55 \text{ cm}^2/\text{m}$

Arriba Apoyo B

$\emptyset 3/8''$ (#3) a 26 cm $L = 3.0$ m $= 2 \cdot L/3 + \overbrace{0.30}^{b_{\text{viga}}}$

$\emptyset 3/8''$ (#3) a 26 cm $L = 2.0$ m $= 2 \cdot L/5 + 0.30$

Σ colocado: $5.46 \text{ cm}^2/\text{m}$

Arriba Apoyos A y C (mínimo)

$\emptyset 3/8''$ (#3) a 20 cm $L = 1.40$ m

Σ colocado: $5.96 \text{ cm}^2/\text{m}$

Esta distribución satisface ampliamente la longitud de desarrollo que para $\emptyset 3/8''$ ($\cong 50$ cm).

- **Cargas de servicio sobre las vigas**

Vigas externas sobre los ejes A y C

$$(w_m + w_v) \cdot L_{AB}/2 = 895 \cdot 4/2 = 1790 \text{ kg/m lineal}$$

Vigas sobre eje B

$$(w_m + w_v) \cdot (1.15 \cdot L_{AB} + 1.15 \cdot L_{BC})/2 = 895 \cdot 1.15 \cdot (4 + 4)/2 = 4117 \text{ kg/m lineal}$$

Uno de los posibles despieces de la losa se muestra en la Figura 12.9.

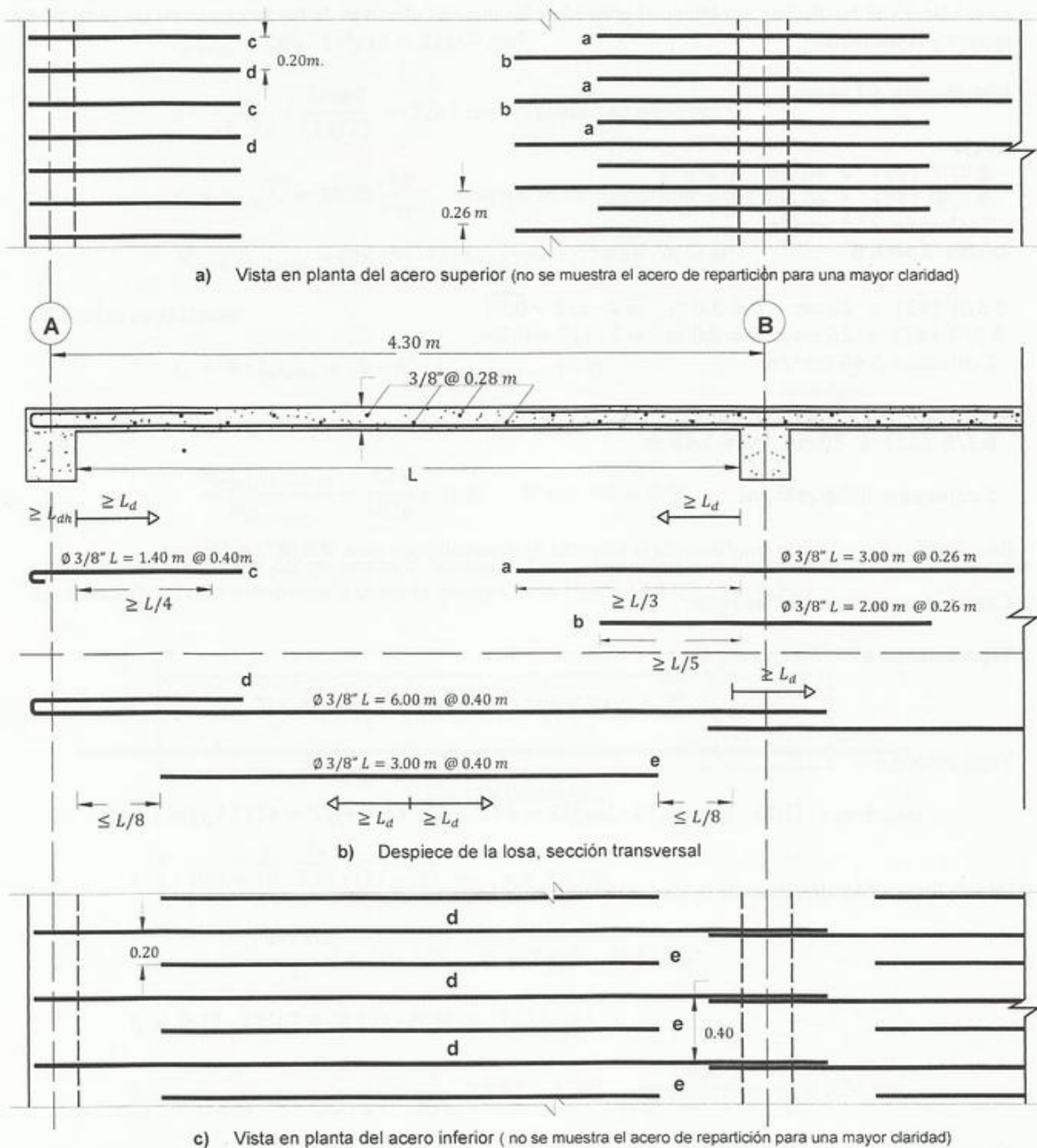


Fig. 12.9 Despiece de la losa maciza (Ejemplo 12.1)

Repartición: # 3 a 28 cm c-c. Cómputos métricos: Por metro de ancho de losa,

- **Acero:** (5% de pérdidas)

Principal..... 55.00 kg

Repartición..... 28.00 kg

Total acero..... 83.00 kg → 9.33 kg/m² ←

- **Concreto:** $(4.3 \cdot 2 + 0.15 \cdot 2) \cdot 0.14 = 1.25 \text{ m}^3/\text{m}$ ■

EJEMPLO 12.2

Losa nervada (Para comparar con la losa maciza del Ejemplo 12.1)

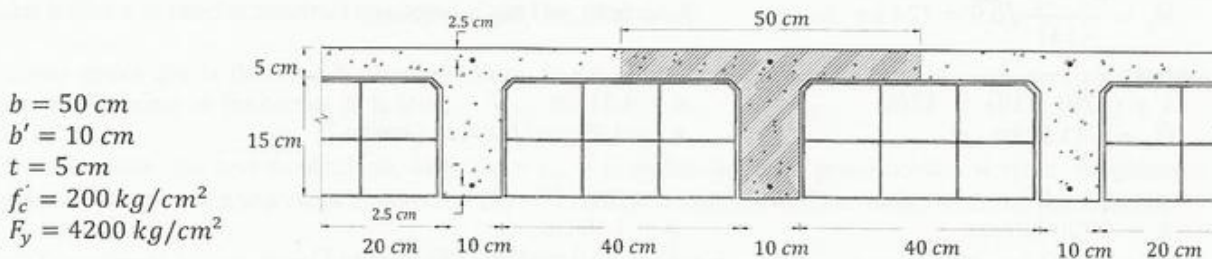


Fig. 12.10 Sección transversal típica de la losa nervada del Ejemplo 12.2

Altura losa tomaremos para un extremo libre y el otro continuo: $h = L/18.5 = 400/18.5 = 21.6 \approx 20 \text{ cm}$

- Carga muerta (permanente)**

Piso de granito	$(0.05) \cdot (2200) = 110 \text{ kg/m}^2$
Losa superior.....	$(0.05) \cdot (2400) = 120 \text{ kg/m}^2$
Nervios.....	$2400 \cdot (0.20 - 0.05) \cdot (0.10/0.50) = 72 \text{ kg/m}^2$
Relleno bloques huecos de concreto (10 bloques por metro cuadrado)...	$= 100 \text{ kg/m}^2$
Por instalaciones.....	$= 40 \text{ kg/m}^2$
Friso de mortero de cemento.....	$= 34 \text{ kg/m}^2$
Por tabiquería.....	$= 240 \text{ kg/m}^2$
	$= 716 \approx 720 \text{ kg/m}^2$

- Carga viva (variable)**

$$w_v = 175 \text{ kg/m}^2 \text{ (ver Apéndice I)}$$

- Carga real,**

$$w = w_m + w_v = 720 + 175 = 895 \text{ kg/m}^2$$

- Carga última por metro cuadrado,**

$$W_u = 1.2 \cdot w_m + 1.6 \cdot w_v \approx 1140 \text{ kg/m}^2$$

- Carga última metro lineal de nervio (b=50 cm por lo que en 1 metro de ancho caben 2 nervios)**

$$w_u = W_u \cdot b = 1140 \cdot 0.5 = 570 \text{ kg/m}$$

- Características para M^- sobre el apoyo por nervio (tracción arriba),**

$$K' = 0.85 \cdot f'_c \cdot b' = 1700 \text{ kg/cm}$$

$$A_{s \min} = 14 \cdot b' \cdot d / F_y = 1/300 \cdot b \cdot d$$

$$d = 17.5 \text{ cm}$$

$$A_{s \min} = (10) \cdot (17.5)/300 = 0.58 \text{ cm}^2/\text{nervio}$$

$$(ACI 318 - 08, Sección 8.13.8) \rightarrow 1.1 \cdot V_c = 1.1 \cdot \left(0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b' \cdot d \right) = 1443 \text{ kg} \dots 0.75 \cdot V_c = 1082 \text{ kg}$$

- Cortes y momentos**

$$V_{uB} = 1.15 \cdot w_u \cdot \frac{L}{2} = 1311 \text{ kg} \quad \text{macizado: } x_B = (1311 - 1082)/570 = 0.40 \text{ m}$$

Aumentaremos gradualmente el ancho del nervio desde 10 cm, hasta 20 cm en el borde del apoyo. La longitud de esta transición es 0.40 m (el macizado) -ver Figura 12.11-

$$V_{uA} = w_u \cdot \frac{L}{2} = 1140 \text{ kg} \quad \text{macizado: } x_A = (1140 - 1082)/570 = 0.10 \text{ m}$$

• Áreas de acero,

Tramos

$$K = (170) \cdot (50) = 8500 \text{ kg/cm}$$

$$\bar{M}_u = \frac{w_u \cdot L_1^2}{(14)} \cdot \frac{\phi}{0.9} = 724 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$a = 0.494 \text{ cm}$$

$$A_s = 0.99 \text{ cm}^2/\text{nervio (abajo } \downarrow)$$

Apoyo B

$$K = (170) \cdot (10) = 1700$$

$$\bar{M}_u = -1126 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$a = 4.31 \text{ cm}$$

$$A_s = 1.75 \text{ cm}^2/\text{nervio (arriba } \uparrow)$$

Apoyos A y B

$$K = 1700 \text{ kg/cm}$$

$$\bar{M}_u = -422 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$a = 1.48 \text{ cm}$$

$$A_s = 0.60 \text{ cm}^2/\text{nervio (arriba } \uparrow)$$

Repartición

$$\text{Losa superior } (0.0018) \cdot (100) \cdot (5) = 0.90 \text{ cm}^2$$

Para $\phi 1/4'' \rightarrow s = 32/0.9 = 35 \text{ cm}$ Usaremos $\phi 1/4''$ a 30 cm o malla truckson.

Sí tuviéramos: $a = t = 5 \text{ cm} \Rightarrow C = 42500 \text{ kg} \Rightarrow A_s = C/F_y = 10.12 \text{ cm}^2$ y el momento último sería $M_u/\phi = 42500 \cdot 0.15 = 6375 \text{ kg} \cdot \text{m}$. La carga necesaria para producirlo sería $= 5020 \text{ kg/m}$ de nervio. Podemos afirmar que para tracción abajo la zona comprimida queda dentro del ala o sea $a < t$.

• Distribución del acero:

Abajo

$1 \phi 3/8'' \quad L = 12.00 \text{ m}$ (cubre el acero en A y C)

$1 \phi 3/8'' \quad L = 3 \text{ m}$

Arriba en apoyo B

$1 \phi 1/2'' \quad L = 3 \text{ m} + 1 \phi 3/8'' \quad L = 2 \text{ m}$

Losa superior

Malla truckson de $3/16''$ a $20 \times 20 \text{ cm}$ o malla $\phi 1/4''$ a 30 cm

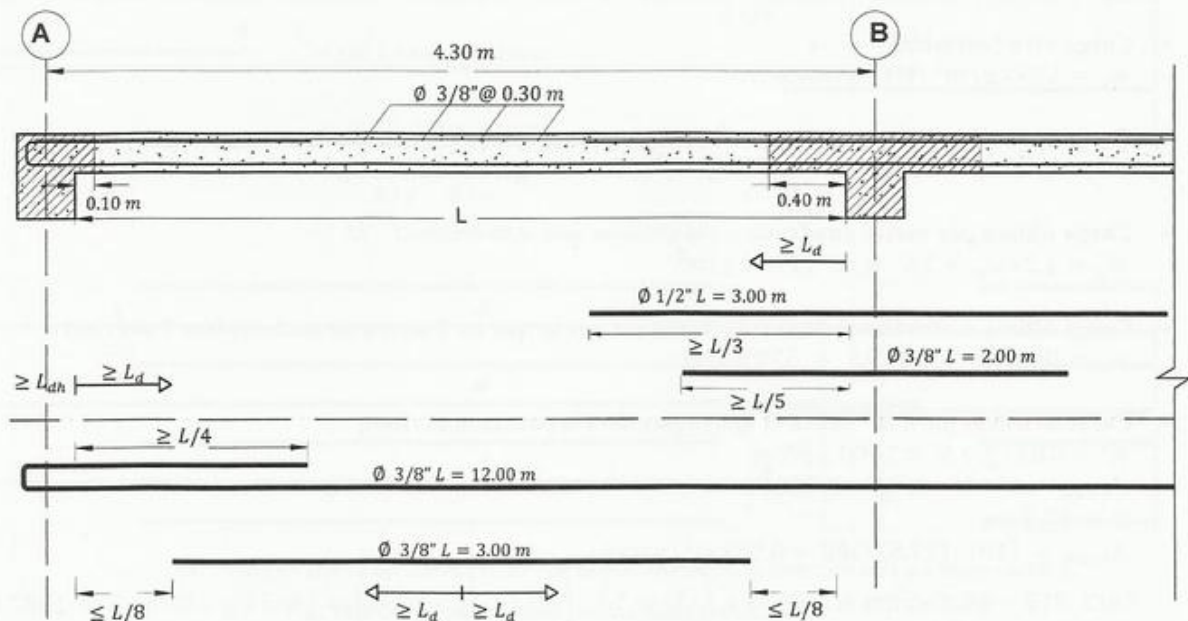


Fig 12.11 Despiece del nervio (Ejemplo 12.2)

• Cargas sobre las vigas (cargas de servicio)

$$\text{Vigas sobre A y C } (w_m + w_v) \cdot L_{AB}/2 = \frac{895}{(720 + 175)} \cdot 4/2 \dots \dots \dots = 1790 \text{ kg/m lineal}$$

$$\text{Vigas sobre B } (w_m + w_v) \cdot (1.15 \cdot L_{AB} + 1.15 \cdot L_{BC})/2 = 895 \cdot 1.15 \cdot (4 + 4)/2 = 4117 \text{ kg/m lineal}$$

12.4 LOSAS ARMADAS EN DOS DIRECCIONES SOBRE VIGAS RÍGIDAS

Cuando las losas se apoyan en tres o cuatro lados la superficie elástica es de doble curvatura (Figura 12.12). Se tiene flexión en las dos direcciones XX e YY y por lo tanto el acero se colocará en los dos sentidos. Las losas en dos sentidos se pueden construir macizas o aligeradas (nervadas).

Como quiera que la flexión XX varía a lo largo de YY se produce torsión que cambia desde cero en el centro hasta un máximo en los bordes de la losa.

Consideremos una losa cuadrada de lados $L_x = L_y = L$ contenida en un plano normal al eje z , simplemente apoyada y sometida a una carga uniforme w (k/m^2) en toda su superficie. Para franjas centrales tenemos,

- Suponiendo la losa formada por franjas aisladas, en cuyo caso $w_x = w_y = w/2$, el momento en el centro es... $M_x = M_y = w \cdot L^2/16 = 0.0625 \cdot w \cdot L^2$
- Como la losa es monolítica y hay unión entre las franjas, las cargas se transmiten por flexión y torsión,

$$M_x = \left(\frac{EI}{1 - \mu^2} \right) \cdot \left[\frac{d_z^2}{(d_x)^2} + \frac{\mu \cdot d_z^2}{(d_y)^2} \right]$$

μ = relación de Poisson.

$$M_y = \left(\frac{EI}{1 - \mu^2} \right) \cdot \left[\frac{d_z^2}{(d_y)^2} + \frac{\mu \cdot d_z^2}{(d_x)^2} \right]$$

$$M_x = M_y = w \cdot L^2/21 = 0.048 \cdot w \cdot L^2$$

- Cuando en el centro de la losa el acero alcanza F_y las franjas adyacentes (donde f_s es menor que F_y) permiten que el momento aumente un poco. La expresión para el momento último queda,

$$\bar{M}_u = \bar{w}_u \cdot L^2/28 = 0.036 \cdot \bar{w}_u \cdot L^2$$

La falla se produce a lo largo de las diagonales (ver Capítulo 16).

En el trabajo de Sozen y Seiss (1963) se presenta un resumen sobre los diferentes métodos utilizados para diseñar losas en dos sentidos. A continuación describiremos el método de los coeficientes (ACI-318 1963).

a) DISTRIBUCIÓN DE CARGAS: $w = w_x + w_y$

La carga uniforme w se reparte en las direcciones XX e YY proporcionalmente a las rigideces (EI/L ó $1/L$) y de acuerdo con las condiciones de apoyo.

- Para igual condición de apoyo en las dos direcciones, a menor luz corresponde mayor carga. Si $L_x < L_y$ tendremos $w_x > w_y$.
- Para luces iguales $L_x = L_y$, a mayor grado de empotramiento corresponde mayor carga. (El empotramiento atrae más carga que el apoyo simple).

b) VALORES APROXIMADOS DE w_x Y DE w_y

Sean,

$$f_x = f_y = f \Rightarrow \text{Flecha debajo en el centro de la losa} \quad w_x = c_x \cdot w \quad \text{y} \quad w_y = c_y \cdot w$$

$$f_x = \mu_x \cdot w_x \cdot (L_x)^4 = f_y = \mu_y \cdot w_y \cdot (L_y)^4 \dots\dots\dots(a)$$

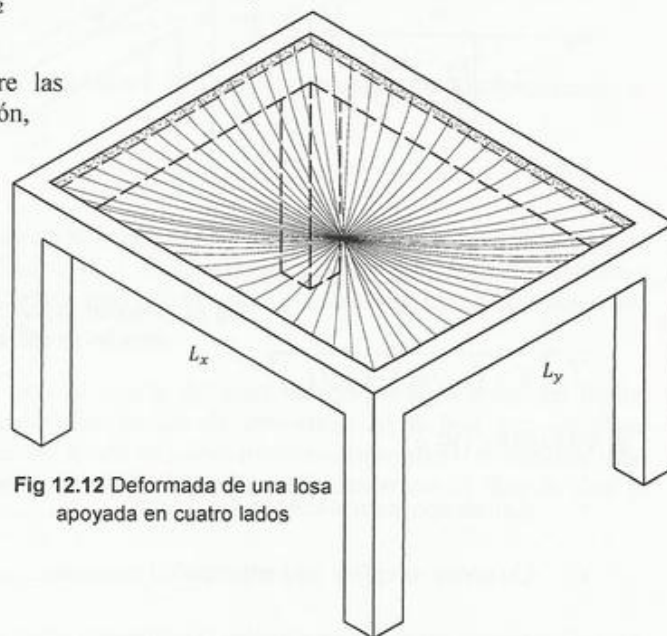


Fig 12.12 Deformada de una losa apoyada en cuatro lados

$$De (a) \dots w_y = \frac{w_x \cdot \mu_x \cdot (L_x)^4}{\mu_y \cdot (L_y)^4}$$

Sumando w_x a ambos términos y siendo: $w_x + w_y = w$ Tenemos:

$$w_x = \frac{w}{1 + \left[\frac{\mu_x \cdot (L_x)^4}{\mu_y \cdot (L_y)^4} \right]} = c_x \cdot w$$

y análogamente

$$w_y = \frac{w}{1 + \left[\frac{\mu_y \cdot (L_y)^4}{\mu_x \cdot (L_x)^4} \right]} = c_y \cdot w$$

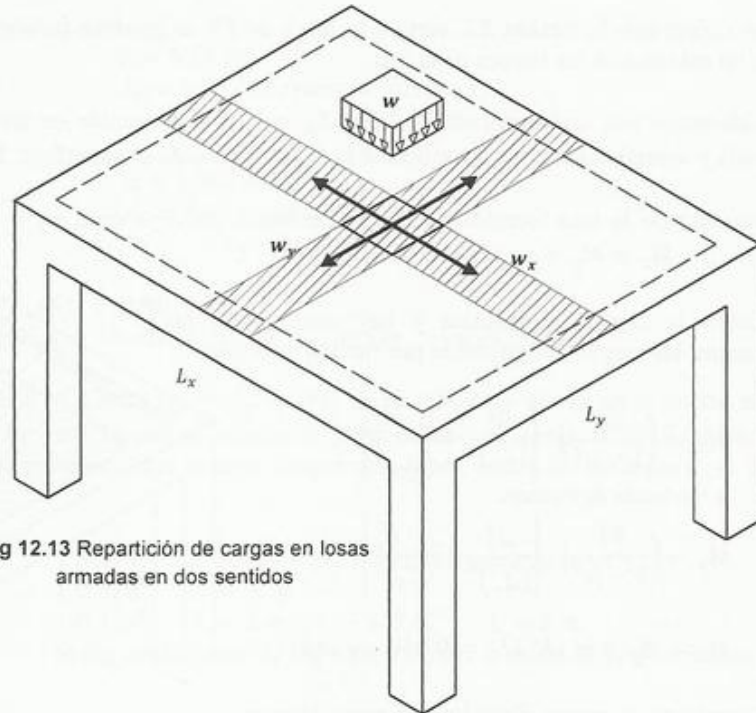
Donde:

$$c_x = \frac{1}{1 + (\mu_x/\mu_y) \cdot (L_x/L_y)^4}$$

y

$$c_y = \frac{1}{1 + (\mu_y/\mu_x) \cdot (L_y/L_x)^4}$$

Fig 12.13 Repartición de cargas en losas armadas en dos sentidos



c) VALORES DE μ

- Ambos apoyos son simples (un tramo)..... $\mu_{x,y} = 5/(384 \cdot E \cdot I)$
- Un apoyo simple y otro empotrado (continuo)..... $\mu_{x,y} \approx 2/(384 \cdot E \cdot I)$
- Ambos extremos empotrados (continuos)..... $\mu_{x,y} = 1/(384 \cdot E \cdot I)$

O sea que la relación μ_x/μ_y ó μ_y/μ_x es conocida, lo que permite calcular los valores de c_x y c_y . Los valores de c aparecen tabulados en el Apéndice C (Tabla C-14).

d) VALORES DE LOS MOMENTOS

Para carga uniforme la expresión general del momento es,

$$M = K \cdot w \cdot L^2 \text{ (Tabla 12.2)}$$

$$M_x = K_x \cdot c_x \cdot w \cdot L_x^2 = a_x \cdot w \cdot L_x^2 \quad \text{donde} \quad a_x = K_x \cdot c_x$$

$$M_y = K_y \cdot c_y \cdot w \cdot L_y^2 = a_y \cdot w \cdot L_y^2 \quad \text{donde} \quad a_y = K_y \cdot c_y$$

Tabla 12.2 Valores de K

Tipo de vínculo	Tramo	Apoyo
Simple y Simple	0.125	0
Empotrado y Simple	0.070	0 y 0.125
Empotrado y Empotrado	0.042	0.0833

En verdad, en lugar de empotramientos (giro igual a cero) tenemos apoyos interiores. Para la carga permanente o carga muerta y tratándose de luces más o menos iguales, podemos considerar los apoyos interiores como empotramientos, ya que casi no hay giro y la tangente a la elástica es prácticamente horizontal. Lo mismo ocurre para la carga variable o carga viva cuando se trata de apoyos intermedios, ya que su posición más desfavorable corresponde al caso en el cual los dos tramos que concurren a dicho apoyo están cargados con w_v (Figura 9.12). En cambio para obtener el máximo momento en el tramo colocaremos

la carga w_v únicamente en dicho tramo y en los sucesivos (Figura 9.12) de manera alterna para producir algo de giro en el apoyo, lo que explica que se tomen valores distintos de a según se trate de carga muerta o viva.

e) MOMENTOS DE DISEÑO

Sean: w_m = Carga muerta o permanente (kg/m^2) ... w_v = Carga viva o variable (kg/m^2) ... $w = w_m + w_v$

Momentos positivos en franjas centrales de ancho igual a $L/4$ a cada lado del eje de la viga

$$M_{Larga}^+ = [(p_m^L \cdot w_m) + (p_v^L \cdot w_v)] \cdot (L_L)^2 \dots \dots \dots M_{Corta}^+ = [(p_m^C \cdot w_m) + (p_v^C \cdot w_v)] \cdot (L_C)^2$$

En las franjas laterales es suficiente colocar 2/3 del acero calculado para la franja central.

$$\text{Negativos} \dots \dots \dots M_{Larga}^- = n^L \cdot w \cdot (L_L)^2 \dots \dots \dots M_{Corta}^- = n^C \cdot w \cdot (L_C)^2$$

En los apoyos exteriores colocaremos acero para resistir $1/3 \cdot M^+$ del tramo en la misma dirección o el acero mínimo; el que sea mayor.

Nomenclatura,

El subíndice o superíndice L y C indican dirección *Larga* y *Corta*, respectivamente.

p y n son coeficientes (Apéndice C, tablas C-12 y C-13). Estos son equivalentes al coeficiente $a = K \cdot c$, de la página anterior, pero en notación más práctica para el cálculo de momentos *positivos* (tramo) y *negativos* (apoyos), respectivamente.

A. Hillerborg desarrolló un método interesante para el diseño de losas basado en el teorema del límite inferior de plasticidad que establece que cualquier distribución de momentos en la losa que satisfaga equilibrio es una solución segura. Este es ampliamente usado en países nórdicos. Interesados en conocer más sobre el método se les recomienda consultar Hillerborg (1975, 1982) y complementar con el libro de Park y Gamble (1980).

f) TORSIÓN

Para una losa simplemente apoyada en sus cuatro lados y siendo $L_x = L_y$ se tiene en las esquinas (Figura 12.14),

- Momentos flectores
 $M_{xx} = 0$ y $M_{yy} = 0$
- Momentos torsores
 M_{xy} y M_{yx}
 $M_{xy} \cong 0.0032 \cdot w \cdot L^2$
- El tensor referidos a ejes XY es,
$$T = \begin{vmatrix} 0 & M_{xy} \\ M_{yx} & 0 \end{vmatrix}$$

Con relación a ejes $X'Y'$ a 45° de XY , el Tensor T' tiene el valor del producto matricial $R \cdot T \cdot R^T$ donde R es la matriz de cosenos directores y R^T su traspuesta,

- Matriz de cosenos directores,

$$R = \begin{vmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{vmatrix}$$

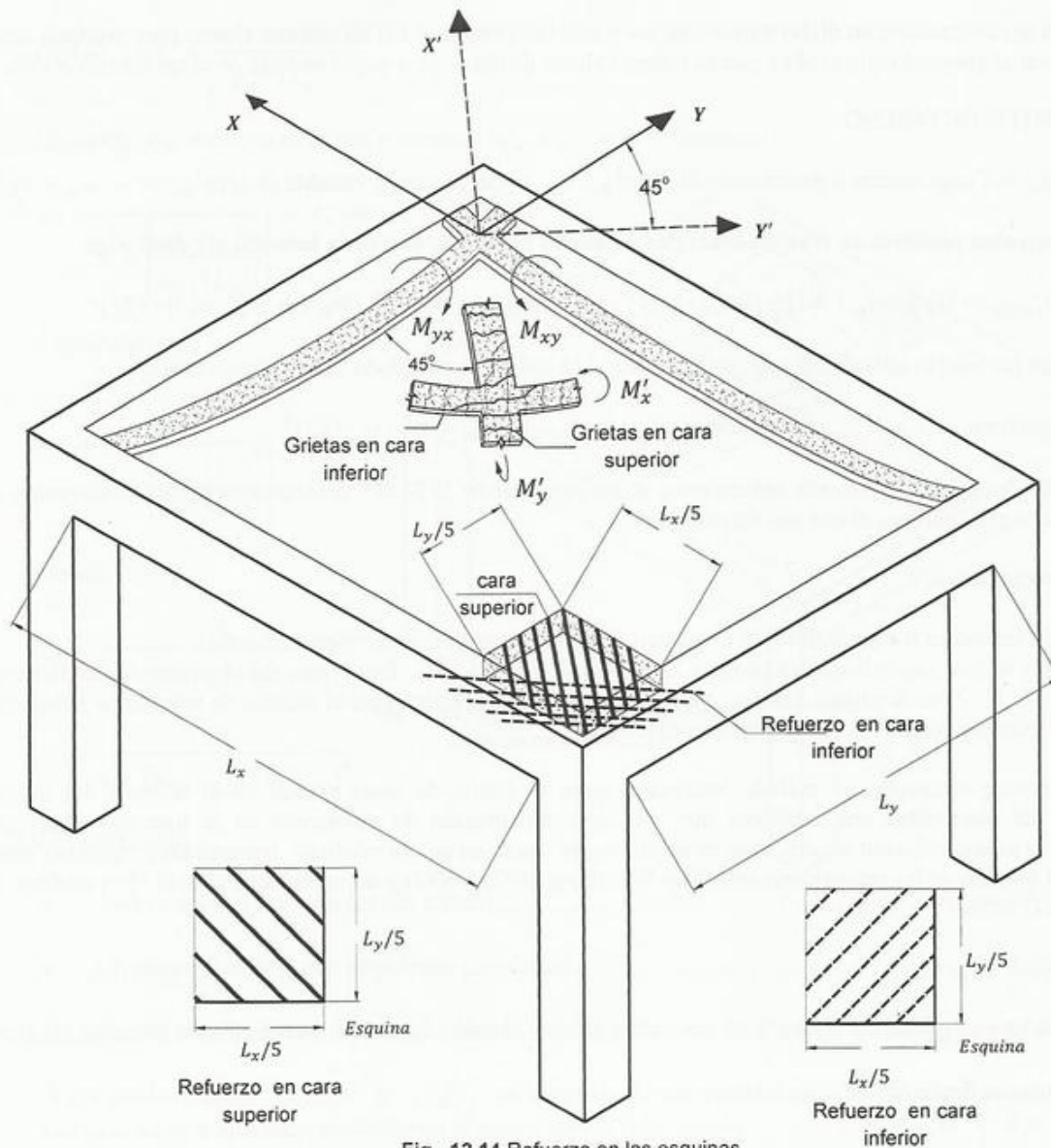


Fig. 12.14 Refuerzo en las esquinas

- Traspuesta R^t ,

$$R^t = \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

- Tensor referido a los ejes de $X'Y'$ es,

$$T' = R \cdot T \cdot R^t = \begin{bmatrix} 2 \cdot M_{xy} \cdot \sin(45) \cdot \cos(45) & M_{xy} \cdot [\cos^2(45) - (\sin^2(45))] \\ M_{xy} \cdot [\cos^2(45) - (\sin^2(45))] & -2 \cdot M_{xy} \cdot \sin(45) \cdot \cos(45) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M'_x & 0 \\ 0 & -M'_y \end{bmatrix}$$

Nota: La armadura de refuerzo en las esquinas de paneles exteriores, puede colocarse en dos direcciones y dos capas.

Donde $M'_x = M_{xy}$ y $M'_y = -M_{xy}$. Es decir que, el momento flector M'_x actúa a lo largo de la diagonal de la losa, es igual al valor del momento torsor, M_{xy} y produce tracción arriba, paralela a la diagonal. En cambio, el momento $-M'_y$ produce tracción abajo en dirección perpendicular a la diagonal. En las esquinas se colocará refuerzo adicional en las caras superiores e inferiores de la losa según se muestra en la Figura 12.14 para resistir M'_x y M'_y . El ACI 318-08, en la Sección 13.3.6 establece que en las esquinas se colocará acero en la parte superior e inferior de la losa (Figura 12.14) para resistir un momento igual al máximo momento positivo del tramo.

g) DIMENSIONAMIENTO (ACI 2008 9.5.3)

L_L = Luz libre mayor (larga) ... L_C = Luz libre menor (corta) ... Perímetro = $2 \cdot (L_L + L_C)$; $\beta = L_C/L_L$

$$N = 9000 \cdot \beta + 36000$$

$$h \geq \frac{(800 + F_y/14) \cdot L_L}{N}$$

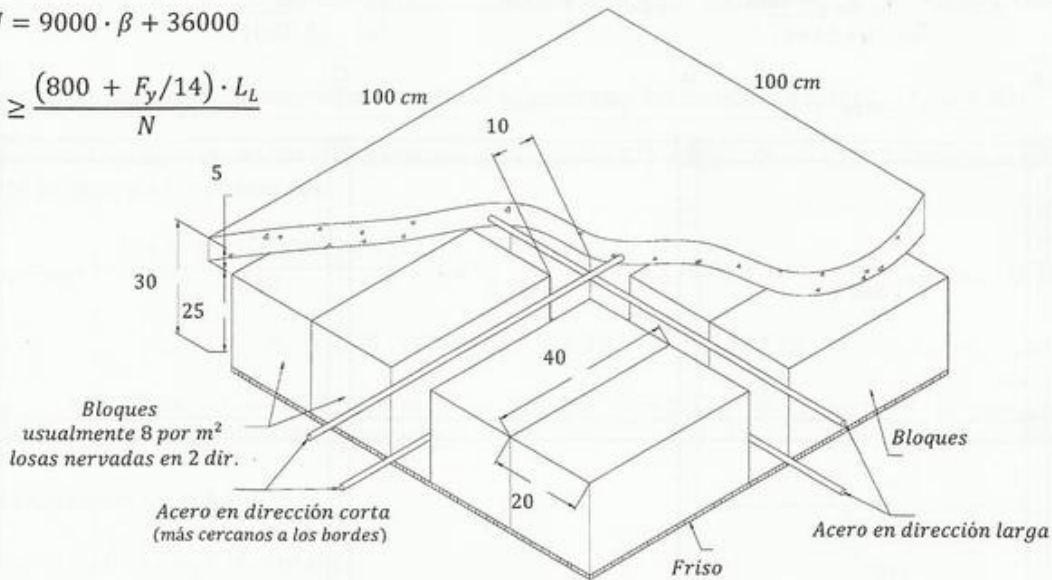


Fig. 12.15 Isometría de una losa nervada armada en dos direcciones con bloques de 20 x 40 x 25 cm (8 bloques por m²)

si $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$... Nos viene $h \geq \frac{1100 \cdot L_L}{N}$... preliminarmente $h \geq L_L/40$

h) ALTURAS ÚTILES

Como las armaduras se superponen, si en una dirección la altura útil es igual a (d) , en la otra será $(d - D_b)$, donde D_b es el diámetro de las barras (Figura 12.16). Por lo general resulta más eficiente colocar lo más excéntrico posible a las barras paralelas al sentido corto de la losa.

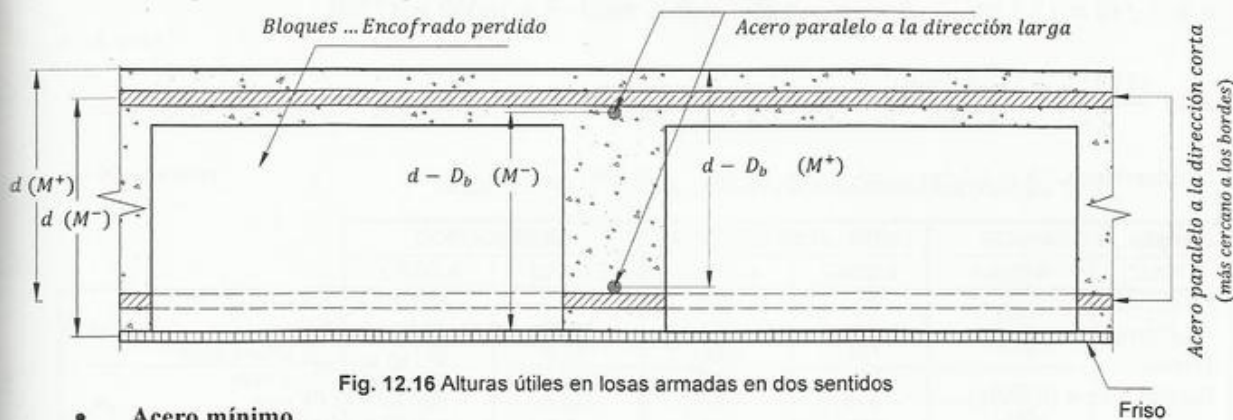


Fig. 12.16 Alturas útiles en losas armadas en dos sentidos

- **Acero mínimo.**
En cm^2 por metro de ancho de losa (macizas):
 $A_{s \min} = \text{Acero en } \text{cm}^2/\text{metro de ancho}$
 $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow A_{s \min} = 0.18 \cdot t$... si $F_y < 4200 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow A_s = 0.20 \cdot t$
En losas nervadas, por nervio
 $A_{s \min} = \frac{14 \cdot b' \cdot d}{F_y}$
- **Separación máxima entre barras (losas macizas)**
 $s_{\max} = 2 \cdot h$ barra mínima $\rightarrow 3/8''$ (ACI-318-08 Sección, 13.3.2).

EJEMPLO 12.3

$f'_c = 240 \text{ kg/cm}^2$ $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ $E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ $b_{\text{viga}} = 30 \text{ cm}$ $\text{rec. neto} = 1.5 \text{ cm}$
 $CV = 300 \text{ kg/m}^2$ $L_{x \text{ libre}} = 5.00 \text{ m}$ $L_{y \text{ libre}} = 4.00 \text{ m}$ Losa maciza

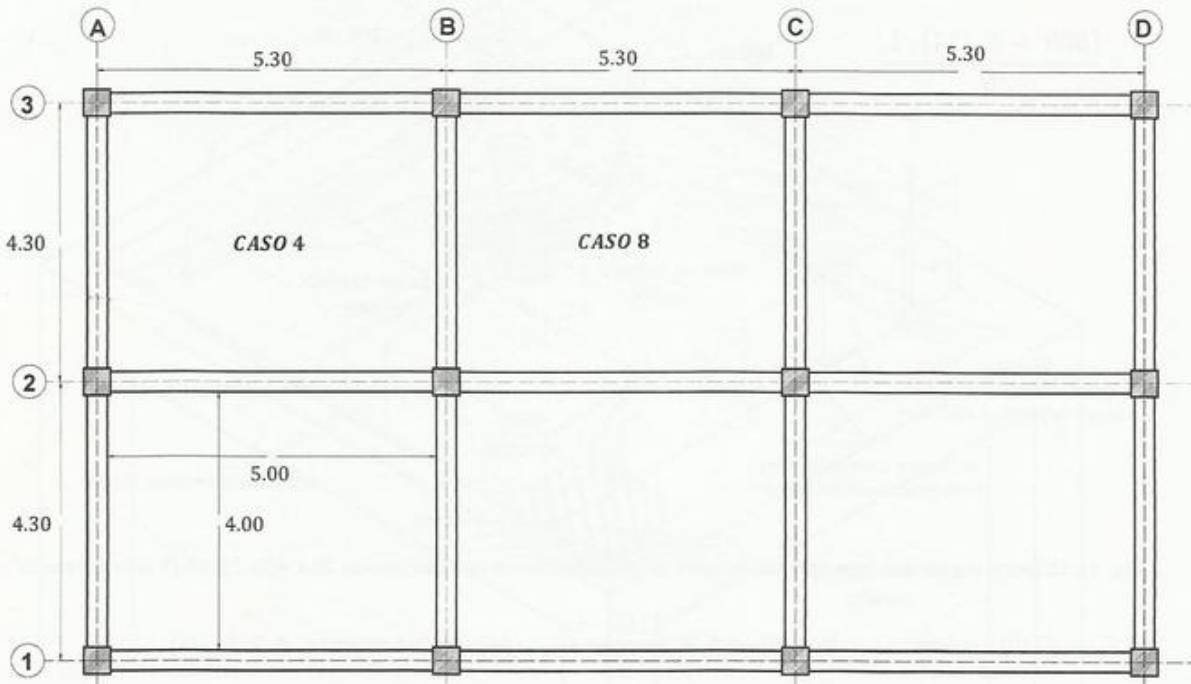


Fig. 12.17 Losa armada en dos sentidos (Ejemplo 12.3)

- Escogencia de $h = t$,

$$h \cong L_L/40 = 12.5 \text{ cm} \dots \dots \beta = \frac{5.0}{4.0} = 1.25 \dots \dots N = 9000 \cdot \beta + 36000 = 47250$$

$$h \geq \frac{1100 \cdot L}{N} = \frac{1100 \cdot 500}{47250} = 11.64 \text{ cm}$$

h tomaremos $h = 12 \text{ cm} \Rightarrow d = 10 \text{ cm}$ y 9 cm

- Cargas

Piso.....	$= 100 \text{ kg/m}^2$
Peso propio.....	$= 0.12 \cdot 2500 = 300 \text{ kg/m}^2$
Friso.....	$= 30 \text{ kg/m}^2$
Por tabiquería (liviana).....	$= 110 \text{ kg/m}^2$
	$w_m = 540 \text{ kg/m}^2$
	$w_v = 300 \text{ kg/m}^2$
	$w = 840 \text{ kg/m}^2$

Para calcular momentos y cortes utilizaremos las luces libres, es decir $L_L = 5$ y $L_C = 4$ m.

$$\begin{array}{l} \text{Dir.larga} \\ w_m \cdot L_L^2 = 540 \cdot 25 = 13500 \\ w_v \cdot L_L^2 = 300 \cdot 25 = 7500 \\ \hline 21000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Dir.corta} \\ w_m \cdot L_C^2 = 540 \cdot 16 = 8640 \\ w_v \cdot L_C^2 = 300 \cdot 16 = 4800 \\ \hline 13440 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{array}$$

En las tablas del Apéndice encontraremos los coeficientes para los casos 4 y 8 (para $L_C/L_L = 0.80$).

El valor del máximo momento (negativo) corresponde a 0.071 o sea $M = -0.071 \cdot 13440 = -954$ y el factor de seguridad es en este caso:

$$f_{\text{seguridad}} = \frac{(540 \cdot 1.2) + (300 \cdot 1.6)}{840} = 1.34 \quad \text{y} \quad M_u = 1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV = f_{\text{seguridad}} \cdot (CM + CV)$$

$$M_u = 1.34 \cdot (CM + CV) = 1.34 \cdot 954 = 1280 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Para $d = 10 \text{ cm} \Rightarrow a = 0.73 \text{ cm} \Rightarrow A_s = 3.52 \text{ cm}^2 \Rightarrow \emptyset 3/8" @ 20.0 \text{ cm}$. Y la suposición que hicimos de tomar barras de 3/8" es correcta.

• Características de la losa

$$A_{s \min} = 0.18 \cdot 12 = 2.16 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s_{\max} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ cm} \quad \text{O sea que para } 3/8" \text{ se tiene: } A_{s \min} = 100 \cdot 0.71/24 = 2.96 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{Siendo: } K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 20400 \quad \text{y} \quad a = A_s \cdot F_y / K = 0.61 \text{ cm}$$

Para,

$$d = 9 \text{ cm} \Rightarrow \frac{M_u}{\phi} = \bar{M}_u = 2.96 \cdot 4200 \cdot [d - (a/2)]/100 = 1081 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}$$

$$M_u = 0.90 \cdot 1081 = 973 \cdot \text{kg} \cdot \text{m} \quad \text{Que es el momento último resistente para barras } \emptyset 3/8" \text{ cada } 24 \text{ cm}.$$

• Corte

$$V_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b \cdot d = 8.21 \cdot 100 \cdot 10 = 8210 \text{ kg}$$

• Momentos

Tabla 12.3 Tabla resumen para el cálculo de momentos (Ejemplo 12.3)

		COEFICIENTES		MOMENTO REAL (SERV)		MOMENTO ÚLTIMO	
		CASO 4	CASO 8	CASO 4	CASO 8	CASO 4	CASO 8
M_{Larga}	muerta +	0.016	0.015	216	203	<u>499</u>	<u>472</u>
	viva +	0.020	0.019	150	143	<u>499</u>	<u>472</u>
	muerta+viva -	-0.029	-0.041	-609	-861	-816	-1154
M_{Corta}	muerta +	0.039	0.032	337	277	<u>774</u>	<u>670</u>
	viva +	0.048	0.044	231	211	<u>774</u>	<u>670</u>
	muerta+viva -	-0.071	-0.055	-954	-739	-1280	-990

• Aceros

Para los valores de $-M_u$ menores que 1081, que corresponde a la capacidad con $A_{s \min}$ (subrayados en el cuadro) colocaremos $\emptyset 3/8"$ cada 24 cm. Tendremos: $d_L = 9 \text{ cm}$ y $d_C = 10 \text{ cm}$ para $M +$ y $d = 10 \text{ cm}$ en apoyos. (... .. nota: $s = 100 \cdot 0.71/A_s$ Para $\emptyset 3/8"$)

$$\bar{M}_{uL} = -1154/0.90 = 1282 \quad \dots \quad a = 0.66 \quad \dots \quad A_s = 3.17 \text{ cm}^2 \quad \dots \quad s = 22.3 \text{ cm}$$

$$\bar{M}_{uC} = -1278/0.90 = 1420 \quad \dots \quad a = 0.73 \quad \dots \quad A_s = 3.25 \text{ cm}^2 \quad \dots \quad s = 20.0 \text{ cm}$$

- **Cargas sobre las vigas** (ver coeficientes en el Apéndice C, Tabla C.14)

w_{cm}^L, w_{cm}^C carga muerta por metro cuadrado en dirección larga y corta, respectivamente.

w_{cv}^L, w_{cv}^C carga viva por metro cuadrado en dirección larga y corta, respectivamente.

$$w_m = 540 \text{ kg/m}^2 \dots\dots\dots w_v = 300 \text{ kg/m}^2$$

Tabla 12.4 Tabla resumen para el cálculo de cargas sobre las vigas (Ejemplo 12.3)

CASO	c_L	w_{cm}^L	w_{cv}^L	c_C	w_{cm}^C	$w_{cm\ cv}^C$
4	0.29	157	87	0.71	383	213
8	0.45	243	135	0.55	297	165

- Vigas exteriores sobre los ejes A y D

$$w_m = 157 \cdot 2.5 = 393 \text{ kg/m} \quad \text{y} \quad w_v = 87 \cdot 2.5 = 218 \text{ kg/m}$$

- Vigas interior sobre los ejes B y C

$$w_m = (157 + 243) \cdot 2.5 = 1000 \text{ kg/m} \quad \text{y} \quad w_v = (87 + 135) \cdot 2.5 = 555 \text{ kg/m}$$

- Vigas exteriores sobre los ejes 1 y 3

TRAMO ~~AB~~

$$w_m = 383 \cdot 2 = 766 \quad (*) \quad y$$

$$w_m = 297 \cdot 2 = 594$$

TRAMO B6

$$w_v = 213 \cdot 2 = 426 \text{ kg/m} \quad (*) \rightarrow \text{AB E. \textbackslash}$$

$$w_p = 165 \cdot 2 = 330 \text{ kg/m}$$

- Vigas interiores sobre el eje 2

TRAMO AB

$$w_m = 383 \cdot 4 = 1532 \quad (*) \quad y$$

$$w_m = 297 \cdot 4 = 1188$$

TRAMO BC

$$w_n = 213 \cdot 4 = 852 \text{ kg/m} \quad (*)$$

$$w_y = 165 \cdot 4 = 660 \text{ kg/m}$$

Para las vigas sobre los ejes 1, 2 y 3 se tiene: en los tramos primero y último (externos) los valores con asterisco y en el tramo central los de abajo. Falta añadir el peso propio y el de la pared que se encuentra sobre la viga.

- **Distribución del acero**

Ejes 1, 2 y 3 Tramos abajo $\varnothing 3/8"$ a 24 cm c-c

Apoyo central $\varnothing 3/8"$ a 22 cm c-c

Ejes A...D Tramos abajo $\varnothing 3/8"$ a 24 cm c-c

Apoyos centrales $\varnothing 3/8"$ a 20 cm c-c

En las esquinas se añadirán

Arriba $\varnothing 3/8"$ a $L_L/5 = 1.00\text{ m}$

Abajo $\varnothing 3/8"$ a $L_1/5 = 1.00\text{ m}$

Si se prefiere pueden colocarse arriba barras de $3/8"$ según la dirección de la diagonal, y abajo barras de $3/8"$ perpendiculares a las anteriores, a una separación de 24 cm. EL despiece de los nervios y los detalles del refuerzo en las esquinas de la losa se muestra en las figuras 12.18-12.20.

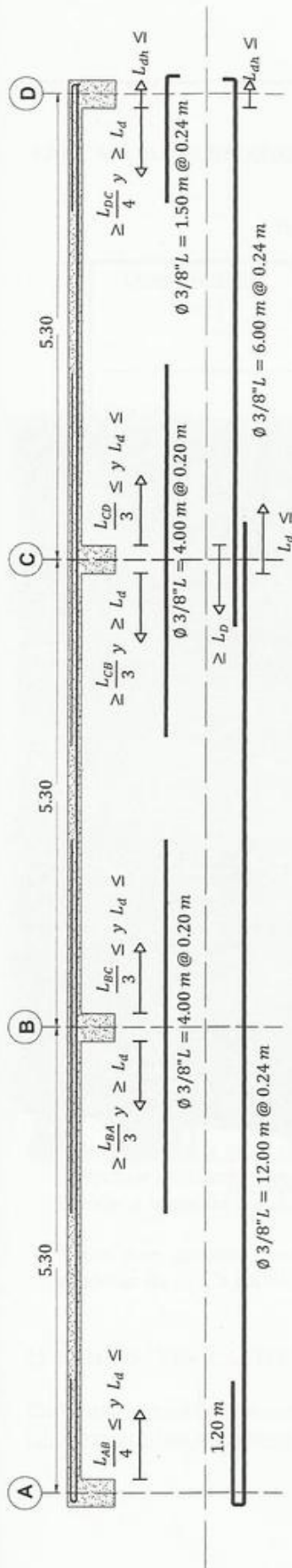


Fig. 12.18 Despiece nervios paralelos a los ejes numéricos (Ejemplo 12.3)

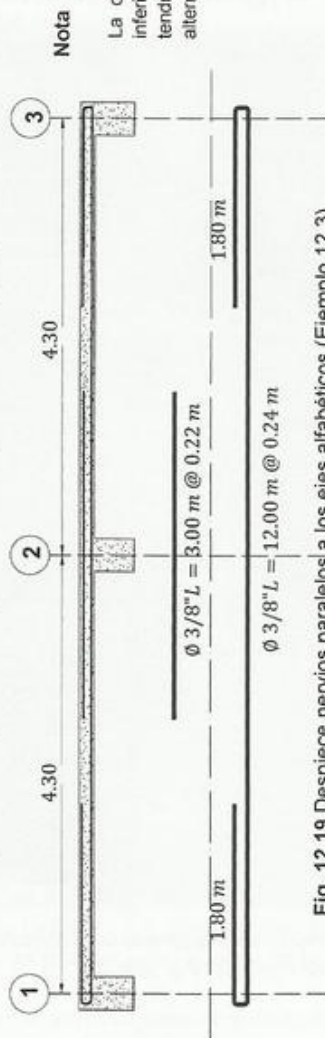


Fig. 12.19 Despiece nervios paralelos a los ejes alfabéticos (Ejemplo 12.3)

Nota

La colocación de las barras inferiores se puede alternar y tendríamos que el solape quedaría alterno en los apoyos B y C.

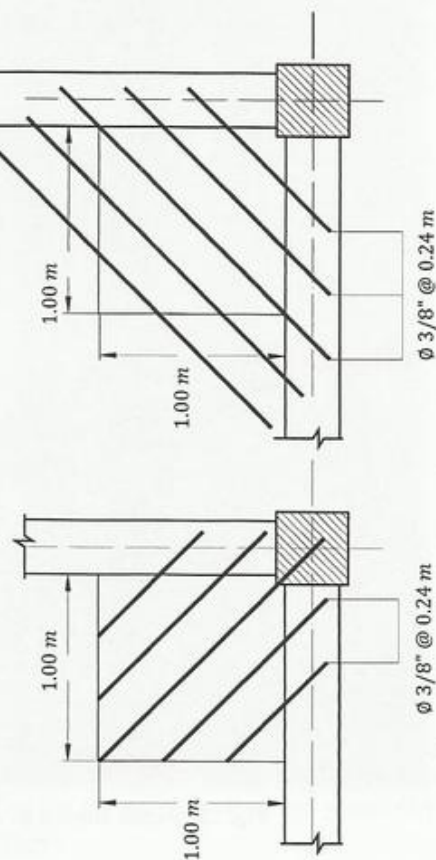


Fig. 12.20 Detalle de la armadura en las esquinas (Ejemplo 12.3)



Fig. 12.20 Losa armada en dos direcciones y aligerada con casetones removibles
Cortesía de Pablo A. Fargier G.

13.1 CARGAS PERMANENTES

Tabla 13.1 Análisis de carga para losas nervadas en una dirección

Losas Nervadas		$h = 20 \text{ cm}$	$h = 25 \text{ cm}$	$h = 30 \text{ cm}$
		192 kg/m ²	216 kg/m ²	240 kg/m ²
	Concreto	80 kg/m ²	90 kg/m ²	100 kg/m ²
	Relleno	130 kg/m ²	130 kg/m ²	130 kg/m ²
	Piso y Friso			
	TOTALES →	402 kg/m²	436 kg/m²	470 kg/m²
Vigas.....	100 kg/m ²			
Columnas.....	80 kg/m ²			
Tabiques.....	240 kg/m ²			
TOTAL.....	420 kg/m²			
		420 kg/m ²	420 kg/m ²	420 kg/m ²
CARGA PERMANENTE	por m ²	822 kg/m ²	856 kg/m ²	890 kg/m ²
Para $h = 2.75 \text{ m}$	por m ³	299 kg/m ³	311 kg/m ³	324 kg/m ³ (*)

(*) Estas cargas corresponden a entrepisos con columnas de 0.25 m² y vigas de 0.12 m².

Para un gran número de edificios en Caracas, el ingeniero Mario Paparoni obtuvo los siguientes resultados,

$$\alpha = (\text{area columnas/area planta}) \cong H/1500$$

H = Altura total del edificio en m

$$G = 244 + 1850 \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad \text{Aproximadamente} \quad \rightarrow \quad G = 244 + 1.25 \cdot H$$

Siendo G el peso unitario del edificio por m³.

Observe que en una construcción de poca altura la reducción del valor del peso unitario por metro cúbico se debe: al nivel del techo más liviano y a la disminución del tamaño de vigas y columnas.

Los valores de α varían, aumentando con la altura entre 0.01 y 0.06.

Observaciones

La carga permanente, comprende por una parte el peso del concreto resistente, que incluido el friso es aproximadamente igual a la mitad del total, y por otra el peso de tabiques, pisos y relleno, que debemos tratar de reducir utilizando materiales livianos. Así disminuirían los esfuerzos por carga permanente y también los debidos a la acción sísmica que es proporcional al peso de la edificación.

Luces muy grandes conducen a solicitaciones considerables (momentos directamente proporcionales al cuadrado de L). En edificios de vivienda, oficinas etc. se recomiendan luces no mayores a 6 u 8 metros.

13.2 VIGAS (VER CAPÍTULO 4, 5 y APÉNDICES)

Elementos estructurales sometidos principalmente a flexión, que transmiten cargas y momentos a las columnas.

La fuerza axial no será mayor que $(f'_c/10) \cdot \text{Area total de la sección}$

a) DIMENSIONES

b = Ancho del viga en $cm < L'/50$ (ACI 10.4.1).
 h = Altura total en cm
 D_b = Diámetro del acero ppl.
 d = Altura útil en cm
 t = Espesor de la losa
 L' = Luz libre
 b, h ... Mucho menor que la luz (L').
 $h \leq L'/4$... Si $h > L'/4$ se trata de una viga profunda... Se diseñará de acuerdo al Capítulo 11.
 Generalmente se tiene $30\text{ cm} \leq b \leq 40\text{ cm}$ $b \geq h/3$. En casas $b = 25\text{ cm}$.

b) PREDIMENSIONADO EN ZONAS SÍSMICAS

$h = L'/10 \sim L'/16$ usualmente en edificaciones de varios niveles $h > L/12$
 $h = L'/5$ (Volados que sostienen o están por encima de elementos susceptibles a sufrir daños por flechas)
 $h = L'/10$ (Otros volados)
 Nota: Estos valores de h satisfacen los requerimientos mínimos para obviar el cálculo de flechas. (Tabla 4.3)

c) ACERO

$$A_s \cong \frac{\bar{M}_u}{\left[F_y \cdot \frac{7}{8} \cdot d \right]} \dots d_{min} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{b \cdot f'_c}} \text{ se cumple si } f'_c \leq 280 \frac{kg}{cm^2} \quad F_y = 4200 \frac{kg}{cm^2} \quad \rho = 0.5 \cdot \rho_{bal}$$

$A_{s \text{ máximo}}$ Para armadura sencilla $\rightarrow 0.75 \cdot \rho_{bal} \cdot b \cdot d$ recomendamos $0.50 \cdot \rho_{bal} \cdot b \cdot d$

$A_{s \text{ máximo}}$ Total de tracción $\rightarrow b \cdot d / 40$

$A_{s \text{ mínimo}} = A'_{s \text{ mínimo}} = 14 \cdot b \cdot d / F_y \rightarrow \text{Para } F_y = 4200 \Rightarrow = b \cdot d / 300$

$A_{s \text{ costados de vigas altas } h > 90\text{ cm}}$ $A_s / 10$... - 5% por cada costado desde la fibra más traccionada hasta $h/2$ -

Nota: Para $A_{s \text{ costados}}$ es preferible usar barras de 3/8" a un espaciamiento vertical menor de 20 cm.

Longitud de desarrollo $\phi \leq 1"$: Tracción: $L_d = 50 \cdot D_b$ (c/ gancho: $L_d = 20 \cdot D_b$) Compresión: $L_d = 25 \cdot D_b$
 (Ver Apéndice F) Solapes: en tracción: $L_d = 65 \cdot D_b$ en compresión: $L_d = 25 \cdot D_b$

d) ESTRIBOS

Para barras principales #3 ó #4 ... Estribos 1/4" Para barras principales hasta #11 ... Estribos 3/8"
 Para barras principales mayores ... Estribos 1/2"
 Estos son los diámetros mínimos permitidos. En las zonas críticas de longitud $= 2 \cdot h$ próximas a las caras de las columnas los estribos deben ser CERRADOS. En otras zonas pueden ser abiertos, si la torsión puede ser considerada como despreciable (ver secciones 10.4 y 10.5).

e) CARGAS SOBRE LAS VIGAS

Permanentes

Acción de la losa $kg/m \text{ lineal}$
 Por tabiques $kg/m \text{ lineal}$
 Peso propio supuesto $= (b) \cdot (h - t) \cdot (0.25) \dots \dots \dots kg/m \text{ lineal}$
 Total $w_m = \dots \dots \dots$

Variables

$w_v = kg/m \text{ lineal}$ ó $P_v = kg \dots \dots \dots$ (Ver Apéndice I)

Última, caso de carga básico

Uniforme $w_u = 1.2 \cdot w_m + 1.6 \cdot w_v$ Concentrada $P_u = 1.2 \cdot P_m + 1.6 \cdot P_v$

Otras cargas

Por impacto, acción de sismo, acción del viento, etc.

13.3 COLUMNAS (VER CAPÍTULO 7 Y APÉNDICE B)

Elementos estructurales a flexo-compresión, donde la compresión axial es mayor que $(f'_c \cdot A)/10$ siendo A el área total de la sección.

En caso contrario se calcularán como vigas.

a) DIMENSIONES

b = Ancho en cm

h = Altura o profundidad en cm (t)

D = Diámetro

L_u = Altura libre

r = Radio de giro

$$A = b \cdot h$$

$$A = \pi \cdot D^2 / 4$$

$$r = \sqrt{I/A} = h/\sqrt{12} \text{ ó } D/4$$

b, h, D Deben ser menores que $-L_u$, y mayores o iguales a 30 cm .

$$b \geq h/2.5 \text{ o sea } h \leq 2.5 \cdot b$$

Acero principal A_s $\rho = A_s / \text{Área de la sección transversal}$

$$\rho_{\text{mínimo}} = 0.01$$

$$\rho_{\text{máximo}} = 0.06 \dots\dots\dots \text{En zona sísmica se recomienda } \rho < 0.025. \text{ Para aumentar la capacidad de una columna es preferible incrementar su sección transversal sin sobrepasar } \rho = 0.025$$

Separación máxima de barras principales (c-c) = 30 cm .

En pórticos es necesario tener en cuenta la influencia del pandeo cuando se cumpla:
(Longitud efectiva)/ $r > 22$

Dimensiones mínimas

Para columnas exteriores $h = (315) \cdot D_b / \sqrt{f'_c} + 6 \text{ (cm)}$ y así dar cabida a la longitud de desarrollo de las barras de las vigas (Tabla 13.2). Se asumió $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$.

Para columnas interiores $h \geq 24 \cdot D_b$ para limitar el deslizamiento de las barras de las vigas a través de la junta viga-columna (Tabla 13.2). (El A.C.I 318-08 es más flexible y exige $h \geq 20 \cdot D_b$ ver Sección 21.5.1.4 del código).

Para $f'_c = 240$ nos viene,

Tabla 13.2 Dimensiones mínimas de columnas recomendadas en cm

Barras #	5/8"	3/4"	7/8"	1"	9/8"	10/8"	1 3/8"
$h_{\text{ext}} \text{ (cm)} \rightarrow$	38	45	51	58	64	71	77
$h_{\text{int}} \text{ (cm)} \rightarrow$	38	46	53	61	69	76	84

13.4 PREDIMENSIONADO DE COLUMNAS

a) ÁREA TOTAL DE COLUMNAS EN UNA PLANTA = α Área de planta = A_p

$$\alpha = \left(\frac{\text{altura}}{\bar{H}} / 1500 \right) \cdot A_p$$

Valor aproximado obtenido por el Profesor Mario Paparoni. H en m desde el nivel más alto.

b) ÁREA DE UNA COLUMNA

Para cualquier tipo de columna cuando el eje neutro pasa por la mitad, es decir para $c = t/2$ ó $c = D/2 = R$ el valor de la carga última es independiente del porcentaje de acero, se tiene,

$$P_u \cong 0.25 \cdot f'_c \cdot A \rightarrow A \cong P_u / 0.25 \cdot f'_c \quad y \quad P_u = \bar{P}_u \cdot \phi \rightarrow \phi = \begin{cases} 0.73 & (\text{rectangulares}) \\ 0.77 & (\text{circulares}) \end{cases}$$

Esta Ecuación es adecuada para el dimensionado de columnas internas pero arroja áreas un poco bajas para las laterales y esquineras, si se compara con las que la experiencia sugiere. El predimensionado de columnas de edificios puede hacerse mediante las siguientes expresiones obtenidas en base a experiencia,

$$\begin{aligned} A &= 15 \cdot P_u \rightarrow \text{columnas centrales} \\ A &= 25 \cdot P_u \rightarrow \text{columnas laterales} \\ A &= 35 \cdot P_u \rightarrow \text{columnas esquineras} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} A \text{ en cm}^2 \text{ y } P_u \text{ en toneladas} \\ \text{Dimensión mínima} = 30 \text{ cm (casas)} \end{array}$$

En columnas con acero A_s distribuido en los bordes y cuando $c = t/2$ la excentricidad viene dada por $e/t = 0.2875 + 1.4 \cdot (F_y/f'_c) \cdot \rho \cdot (1 - 2 \cdot d'/t)$. Los valores de e/t para columnas con distintos porcentajes de acero se resumen en la Tabla 13.3.

Tabla 13.3 Valores de e/t
Para $f'_c = 250$, $F_y = 4200$ y $c = t/2$

d'	t	1%	1.5%	2%	2.5%
5	30	0.444	0.523	0.601	0.679
	40	0.464	0.552	0.640	0.728
	50	0.476	0.570	0.664	0.758
6	60	0.476	0.570	0.664	0.758
	70	0.482	0.580	0.677	0.775
	80	0.487	0.587	0.687	0.787

Aproximadamente tenemos un 40% de aumento para un incremento de ρ de 1% (entre $\rho = 1\%$ y $\rho = 2\%$) y de 70% (entre $\rho = 1\%$ y $\rho = 2.5\%$). Para columnas con acero distribuido se tiene, aproximadamente 33% y 60%.

El predimensionado de zapatas se puede hacer con ayuda del Apéndice D, Tabla D.2. Nótese que el valor de P en la Tabla aparece en condiciones de servicio. Para su estimación la intensidad de la carga puede aproximarse a 1.0 ton/m^2 .

c) VALORES DE P_u PARA EL PREDIMENSIONADO

En edificios residenciales y comerciales con altura de entrepiso por el orden de los 3 metros, la carga por metro cuadrado bajo condiciones de servicio, incluyendo el peso de losa, vigas, columnas, tabiques, y piso puede aproximarse por exceso a una tonelada (1.0 ton/m^2) (Tabla 13.1). En condiciones últimas se puede estimar en 1.4 ton/m^2

$$P_u = (\text{Área tributaria columna}) \cdot (\text{número de entrepisos por encima de la columna}) \cdot 1400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Ejemplo $\bar{P}_u = 100000$ $b = t = 40$ $d' = 5$ $\rho = 0.010$ $f'_c = 250 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ $F_y = 4200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ $F_y/f'_c = 16.8$

$$e/t = 0.2875 + (1.4) \cdot (16.8) \cdot (0.010) \cdot \left(1 - \frac{10}{40}\right) = 0.464 \rightarrow e = 0.464 \cdot 40 = 18.56 \text{ cm}$$

$$\bar{M}_u = \bar{P}_u \cdot e = 18560 \text{ kg} \cdot \text{m} \text{ cuando se tiene } c = t/2 \blacksquare$$

EJEMPLO 13.1

Edificio multifamiliar. Ocho plantas de entrepiso 346.5 m^2 . $h = 3.00 \text{ m}$. Número de columnas = 12.

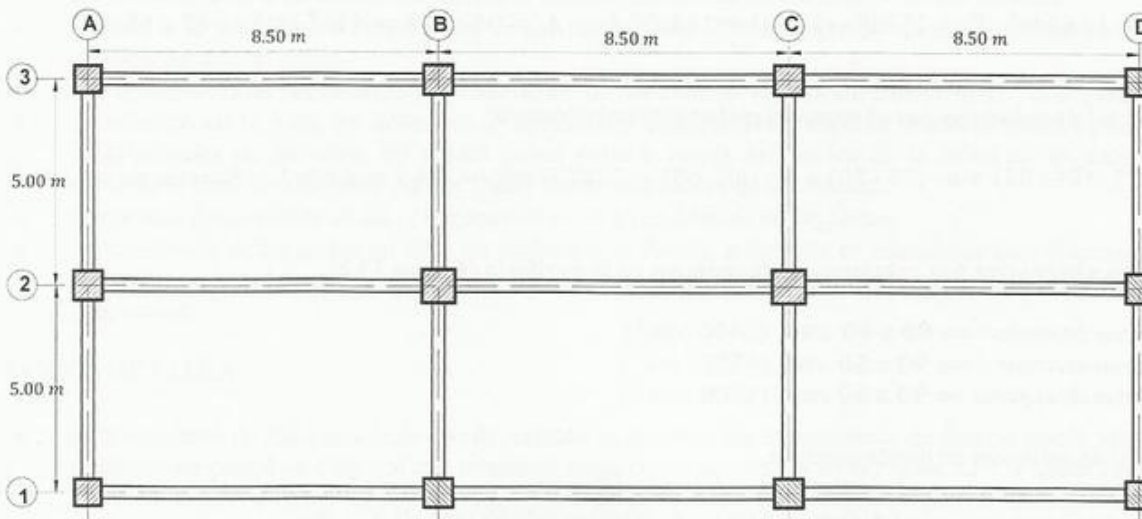


Fig. 13.1 Planta del edificio del Ejemplo 13.1

Se pide,

Pre-dimensionar columnas de la planta baja. $H = 3\text{m} \cdot 8 = 24 \text{ m}$

- Con la fórmula,

$$\alpha = H/1500 = 0.016$$

El área de columnas es igual a:

$0.016 \cdot 346.5 = 5.549 \text{ m}^2$ O sea 55490 cm^2 para todas las columnas. El área promedio por columna:

$$A = \frac{55490}{12} = 4624 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{digamos doce columnas de } 70 \times 70 \text{ cm}$$

- Por áreas tributarias

Áreas tributarias

Columnas Centrales	$5.0 \cdot 8.5$	$= 42.5 \text{ m}^2$
Columnas Exteriores	$2.5 \cdot 8.5$	$= 21.25 \text{ m}^2$
Columnas de esquina	$2.5 \cdot 4.25$	$= 10.63 \text{ m}^2$

Dimensionado de las Columnas

- Columnas Centrales

$$A_t = 42.5 \text{ m}^2 \quad P_u = \overbrace{(8 \cdot 1400)}^{11200} \cdot (42.5) = 476000 \text{ kg} \quad A = 15 \cdot \overbrace{476}^{\text{ton}} = 7140 \text{ cm}^2 \rightarrow 85 \times 85 \text{ cm}$$

-Columnas Exteriores

$$A_t = 21.25 \text{ m}^2 \quad P_u = 11200 \cdot (21.25) = 238000 \text{ kg} \quad A = 25 \cdot 238 = 5950 \text{ cm}^2 \rightarrow 75 \times 75 \text{ cm}$$

-Columnas de Esquina

$$A_t = 10.63 \text{ m}^2 \quad P_u = 11200 \cdot (10.63) = 119056 \text{ kg} \quad A = 35 \cdot 119 = 4167 \text{ cm}^2 \rightarrow 65 \times 65 \text{ cm}$$

Área total de columnas por el segundo método (área tributaria)

$$2 \cdot (85 \cdot 85) + 6 \cdot (75 \cdot 75) + 4 \cdot (65 \cdot 65) = 57875 \text{ cm}^2 \rightarrow 4\% \uparrow \text{ que con la fórmula de } \alpha \quad O.K$$

Solución alternativa con columnas rectangulares en la periferia (Figura 13.2),

Columnas centrales $\Rightarrow 80 \times 80 \text{ cm}$ (6400 cm^2)

Columnas externas $\Rightarrow 90 \times 50 \text{ cm}$ (4500 cm^2)

Columnas de esquina $\Rightarrow 90 \times 50 \text{ cm}$ (4500 cm^2)

El área total de columnas en planta quedaría,

$$2 \cdot 6400 + 6 \cdot 4500 + 4 \cdot 4500 = 57800 \text{ cm}^2 \quad O.K \quad \blacksquare$$

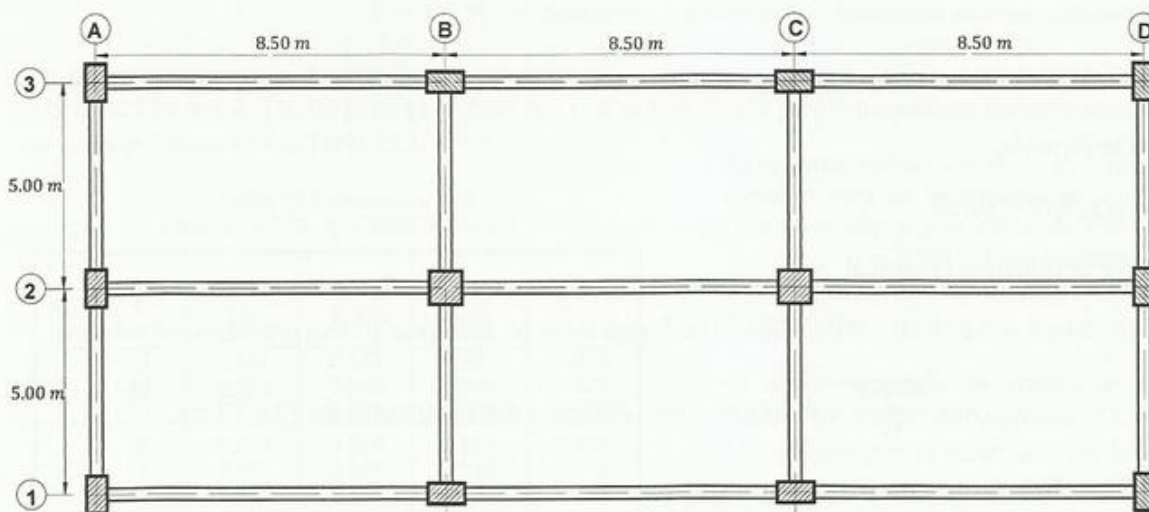


Fig. 13.2 Planta del edificio del Ejemplo 13.1

Al diseñar las vigas es necesario verificar el máximo tamaño de barras del acero principal permitido (Tabla 13.2) en función de las dimensiones de la columna, para limitar el deslizamiento excesivo de estas durante un sismo y garantizar su anclaje con gancho en las columnas perimetrales.

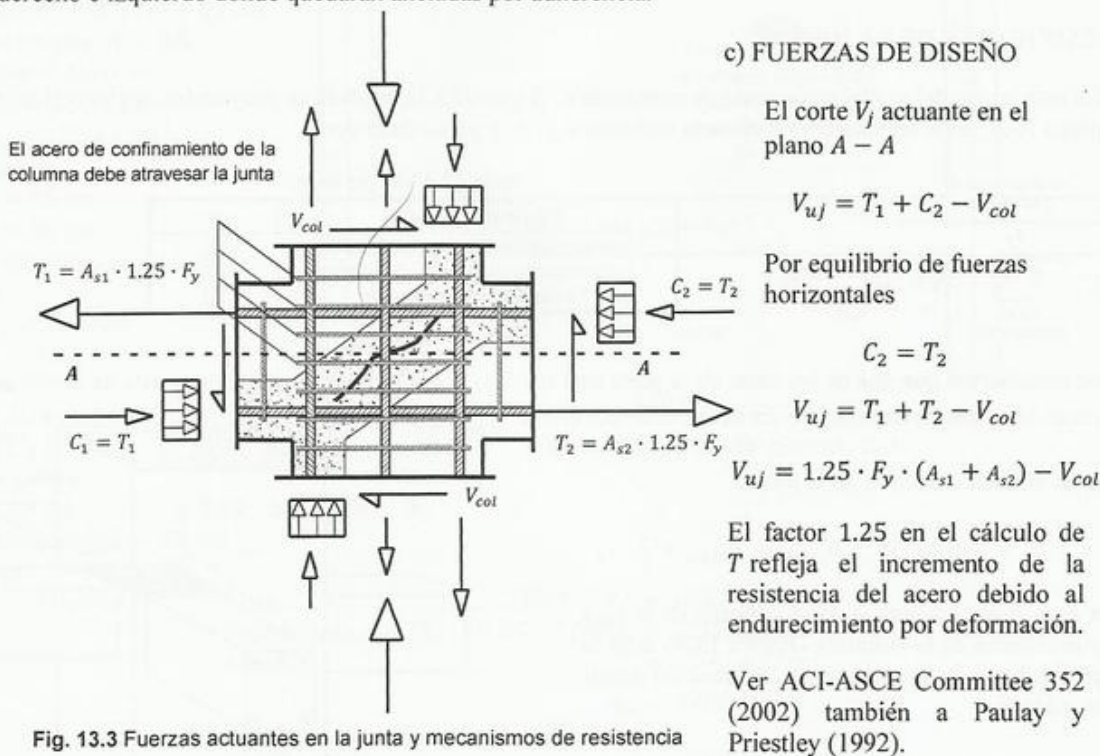
13.5 JUNTAS VIGA-COLUMNA

a) CRITERIOS DE DISEÑO

- Las juntas o nodos deben ser capaces de transmitir las fuerzas entre vigas y columnas a las que une.
- La resistencia de la junta será mayor que la máxima resistencia de los miembros que conecta.
- Debido a la dificultad de reparación de las juntas, éstas deben responder preferiblemente en el rango elástico durante un sismo.
- Las deformaciones por cortante del nodo no deben incrementar significativamente la deriva de piso.
- El refuerzo en la junta no debe causar dificultades constructivas. Especial atención merecen las barras longitudinales de las vigas las cuales deben pasar a través del núcleo de la columna, es decir deben transitar el espacio confinado por las cuatro barras esquineras de la columna.
- Generosas dimensiones de las columnas nos evitarán problemas en las juntas.
- La resistencia de las juntas no debe ser problema de diseño, sobretodo en estructuras bien dimensionadas. Resistencias insuficientes de juntas son indicadores de una estructura con inadecuada configuración y/o proporción.

b) MODOS DE FALLA

- El mecanismo de *falla asociado con la resistencia al corte*. La transferencia de fuerzas puede idealizarse mediante un puntal en diagonal que transfiere carga como se muestra en la Figura 13.3. Pueden conducir a fallas en tensión diagonal cuando no hay o hay muy poco refuerzo de confinamiento en la junta.
- *Fallas de adherencia* si las barras se deslizan a lo largo de la junta y ello implica pérdida del anclaje. Este mecanismo de falla es especialmente peligroso en juntas externas en las que recomendamos usar barras ganchos para garantizar el anclaje mecánico en caso de que la porción recta de la barra deslice dentro del nodo. En cambio para las juntas internas, a pesar de que existirá deslizamiento de las barras rectas, puede no ocurrir la falla siempre que estas estén desarrolladas a partir de las caras de la columna hacia el tramo derecho e izquierdo donde quedarán ancladas por adherencia.



d) MECANISMOS DE RESISTENCIA AL CORTE DE LA JUNTA

El corte es resistido por una diagonal o puntal de compresión que transmite fuerzas a través de la junta (Figura 13.3). El refuerzo transversal que sube de la columna y atraviesa la junta ayuda a confinar el puntal aumentando su resistencia e impidiendo que las grietas diagonales se ensanchen. Leon (1989) presenta un excelente tratado sobre los mecanismos de resistencia al corte de la junta en el caso en que las barras principales de las vigas atraviesan el núcleo de la columna en la unión común viga-columna (caso preferido).

LaFave y Wight (1997) y Quintero-Febres y Wight (2001) estudiaron la transferencia de fuerzas en la junta en el caso de vigas más anchas (algunas vigas planas entran en esta clasificación) que la columna en el que las barras principales de las vigas pasan por fuera costados externos de la columna lo que dificulta una transferencia de fuerzas como la que se muestra en la Figura 13.3. Esta investigación concluye que tales juntas son considerablemente más flexibles, disipan menos energía y el refuerzo principal de las vigas desliza más, que aquellas en las que este atraviesa el núcleo de la columna confinado por los estribos.

En muchas ocasiones el eje longitudinal de la viga dista del de la columna (caso típico en los pórticos perimetrales en donde la cara externa de la columna se hace coincidir con la cara lateral externa de la viga, para que la fachada sea totalmente plana). A este tipo de conexiones se les conoce como excéntricas y su comportamiento es discutido en detalle por Canbolat y Wight (2008).

e) REFUERZO TRANSVERSAL EN LA JUNTA

Será suficiente con continuar el refuerzo de confinamiento calculado para la columna (ecuaciones 7.7 ó 7.8) a través de la junta o nodo (ACI 318-08, 21.5.2.1). Es importante destacar que el refuerzo del nodo puede ser reducido en un 50% si la junta está confinada por vigas en los cuatro costados cuyos anchos sean de al menos 3/4 del ancho de la columna, y el ancho de columna descubierto a cada lado de la viga en cada cara de columna sea menor que 10 cm (A.C.I 318-08, 21.5.2.2). Se recomienda consultar a Ehsani y Wight (1985) para ampliar el conocimiento sobre el comportamiento de las juntas y la incidencia del refuerzo transversal.

f) RESISTENCIA DE LA JUNTA

La resistencia del puntal o diagonal de compresión (Figura 13.3), medida en proyección horizontal sobre el plano A-A, debe ser mayor que el corte actuante V_{uj}/ϕ , y viene dada por,

$$\gamma \cdot \frac{A_j}{h \cdot b_j} \cdot \sqrt{f'_c} \geq \frac{V_{uj}}{\phi} = \bar{V}_{uj}$$

resistencia de la junta
área sombreada

Tabla 13.4 Valores de γ

Tipo de Junta	γ
Juntas confinadas por las 4 caras	5.3
Juntas confinadas por 2 ó 3 caras	4.0
Todas las demás juntas	3.2

Se considerará que una de las caras de la junta está confinada por la viga, si el ancho de esta es al menos 0.75 veces el ancho de la columna. Es decir, debe cumplirse $b_{viga} \geq 0.75 \cdot b_{col}$

b_j es el ancho efectivo de la junta,

$$b_j = \text{menor } [h + b_{viga} \text{ y } b_{viga} + 2 \cdot x]$$

x es la menor distancia entre el borde de la viga y la esquina de la columna (Figura 13.4) h es la profundidad de la columna en la dirección donde se mide V_j .

La resistencia a corte de la junta es examinada en profundidad por Meinheit y Jirsa (1977), Jirsa (1982) y por Durrani y Wight (1982).

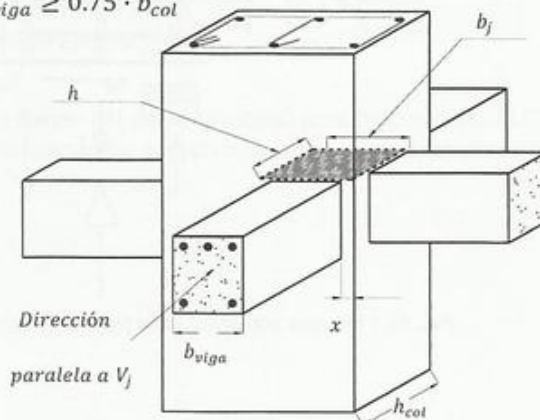


Fig. 13.4 Ancho efectivo de la junta (Adapto de ACI 318)

• Características sección

Usaremos coeficiente zona $\zeta = 0.50 < 0.75$ asumiendo estribos #3 y barras principales #8 tenemos:
 $d = 55 - 2.5 - 0.95 - 1.27 = 50.28 \dots \dots \dots$ Usaremos $d = 50 \text{ cm}$

• Diseño por Flexión

Características

$$b \cdot d = 35 \cdot 50 = 1750 \text{ cm}^2$$

$$b \cdot h = 1925 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \min} = 14/F_y \cdot 1750 = 1750/300 = 5.84 \text{ cm}^2$$

$$A_{s \max} = 1750 \cdot 0.025 = 1750/40 = 43.75 \text{ cm}^2$$

$$K = 0.85 \cdot 240 \cdot 35 = 7140 \text{ kg/cm}$$

Para $A_{s \min}$,

$$a = \frac{F_y \cdot A_{s \min}}{K} = \frac{4200 \cdot 5.84}{7140} = 3.43 \text{ cm}$$

$$\bar{M}_u = K \cdot a \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) = 11842 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \Rightarrow \quad M_u = 0.90 \cdot 11842 = 10658 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$c_{bal} = 0.60 \cdot d = 30 \text{ cm} \quad c_{max} = \gamma \cdot c_{bal} = 15 \text{ cm} \quad (\text{Para secciones rectangulares})$$

$$a_{max} = \frac{\beta_1}{0.85} \cdot 15 = 12.75 \quad \bar{M}_u = K \cdot a \cdot (d - a/2) = 39714 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

• Momentos debidos a cargas verticales obtenidos del análisis estructural

$$M_{u1} = 1.2 \cdot M_m + 1.6 \cdot M_v$$

$$M_{u2} = 1.2 \cdot M_m + M_v + M_{sismo}$$

$$M_{u3} = 0.9 \cdot M_m + M_{sismo}$$

$$w_u = 6720 \text{ kg/m lineal}$$

Tabla 13.5 Momentos actuantes en la viga obtenidos de un análisis estructural

	M_m	M_v	M_s	M_{u1}	M_{u2}	M_{u3}
A	-7415	-2075	∓ 12000	-12218	$\frac{-22973}{+1027}$	$\frac{-18674}{+5327^*}$
B	-11517	-3272	∓ 12000	-19057	$\frac{-29094}{-5093}$	$\frac{-22366}{+1634^*}$
A-B	+10900	+4270	-----	+19912		

* Valores que son cubiertos con $A_{s \min}$.

El código ACI 318-08 (Sección 8.4) permite redistribuir momentos positivos y negativos en vigas continuas hasta en $1000 \cdot \epsilon_t$ (porcentaje) para lograr despieces más eficientes. Tal redistribución se permite si $\epsilon_t > 0.0075$, donde ϵ_t es la deformación unitaria del acero longitudinal más distante del eje neutro y de acuerdo al 318-08 no excederá 20%. Paulay y Priestley (1992) presentan una metodología para redistribuir los momentos en vigas continuas, muy útil cuando los momentos por cargas gravitacionales son significativamente más grandes que aquellos inducidos por el sismo y sugieren redistribuciones de hasta un 30% en estos casos. Cuidado especial es requerido en el diseño de vigas por redistribución de momentos para garantizar que el despiece obtenido sea consistente con el nuevo estado de equilibrio interno asumido.

• **Cálculo de aceros por flexión**

Si ignoramos el acero en compresión (conservador), el momento máximo $29094/0.9 = 32326$ requerirá una altura mínima,

$$\frac{d_{\min}}{Ec[5.27]} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{\bar{M}_u}{b \cdot f'_c}} = 2.30 \cdot \sqrt{\frac{32326 \cdot 100}{35 \cdot 240}} = 45.12 \text{ cm} < 50 \text{ cm} \dots a = d - \sqrt{d^2 - 2 \cdot \frac{\bar{M}_u}{K}} \dots [5.25]$$

para diseñar con armadura sencilla. La escogencia de $d = 50 \text{ cm}$ fue acertada.

En A	$\bar{M}_u \text{ máx} = 22973/0.9 = 25525 \dots a = 7.75 \text{ cm} \dots A_s = 13.18 \text{ cm}^2$
En B	$\bar{M}_u \text{ máx} = 29094/0.9 = 32326 \dots a = 10.07 \text{ cm} \dots A_s = 17.12 \text{ cm}^2$
En AB	$\bar{M}_u \text{ máx} = 19912/0.9 = 22124 \dots a = 6.63 \text{ cm} \dots A_s = 11.28 \text{ cm}^2$

• **Acero a colocar (Figura 13.9)**

En A	$5 \#6 = 14.25 \text{ cm}^2$
En B	$6 \#6 = 17.10 \text{ cm}^2$
En AB	$4 \#6 = 11.40 \text{ cm}^2$

El ancho mínimo de la sección para acomodar 6 barras de $3/4"$ es,

$$b_{\min} = \overbrace{2 \cdot 2.50 \text{ cm}}^{\text{rec. neto estribos}} + N \cdot D_b + 1.33 \cdot A_g \cdot (N - 1)$$

→ estos valores se tabulan en la Apéndice A Tabla A.24

Donde N es el número de barras, D_b es el diámetro de las barras y A_g es el diámetro del agregado grueso de mayor tamaño. Para nuestro caso tendremos, $b_{\min} = 35.3 \text{ cm}$ valor muy próximo 35 cm . O.K

De las barras de los tramos (abajo) pasaremos 3 #6 en los apoyos o sea 8.55 cm^2 ($= 17.1/2$). Al disponer de un área de acero abajo igual o mayor a la mitad del acero arriba en los apoyos, garantizamos que el M resistente positivo sea igual o mayor que la mitad del M negativo, según exigen las normas (ver Ejemplo 5.25).

• **Diseño por corte**

En la Tabla 13.6 se calculan los valores de los momentos últimos resistentes para dos casos:

- 1) Para comprobación a flexión tomando $F_y = 4200$.
- 2) Para calcular el corte, utilizando para el acero de tracción $1.25 \cdot F_y = 5250 \text{ kg/cm}^2$.

Momentos resistentes últimos: Con F_y y con $1.25 \cdot F_y$ (Subrayados). $\phi = 1$

Tabla 13.6 Cálculo de la resistencia de la viga en la caras del nodo para el diseño por corte

	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$A'_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$c \text{ (cm)}$	$f'_s \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	$M_u/\phi \text{ (kg} \cdot \text{m)}$
A	14.25	8.55	7.17	1908	-27782
			<u>8.60</u>	<u>2640</u>	<u>-34366</u>
	8.55	14.25	5.23	288	+17041
			<u>5.66</u>	<u>737</u>	<u>+21090</u>
B	17.10	8.55	8.30	2506	-33060
			<u>10.24</u>	<u>3226</u>	<u>-40799</u>
	8.55	17.10	5.20	252	+17040
			<u>5.57</u>	<u>647</u>	<u>+21089</u>

Observe que al utilizar para A_s de tracción $1.25 \cdot F_y$ se tiene,

- 1) Aumenta la profundidad del eje neutro y por tanto el valor del esfuerzo en el acero de compresión (sin alcanzar $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$).
- 2) Aumenta el momento último en aproximadamente un 24%.

En los apoyos, para tracción abajo, el valor de \bar{M}_u positivo, es mayor que la mitad del \bar{M}_u para tracción arriba. En el tramo la capacidad resistente es mayor que la cuarta parte del valor del M_u negativo en B.

• Corte

El corte con el sismo: $(1.2) \cdot CM + (1.0) \cdot CV \dots \dots \dots$ (ACI 318-08, 21.3.4).

Es decir, $w_u = (1.2) \cdot (4200) + (1.0) \cdot (1050) = 6090 \text{ kg/m}$

Corte isostático por gravedad $V_o = (6090) \cdot (5.60/2) = 17052 \text{ kg}$

Cortes sísmicos o hiperestáticos

$$V_h^- = (21090 + 40799)/5.6 = 11051 \text{ kg}$$

$$V_h^- = (34366 + 21089)/5.6 = 9903 \text{ kg}$$

$$\Sigma V_{uA} = 17052 - 11051 = 6001 \text{ kg}$$

$$\Sigma V_{uA} = 17052 + 9903 = 26955 \text{ kg}$$

$$v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = 8.21 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots \dots \dots V_c = v_c \cdot b \cdot d = 8.21 \cdot 35 \cdot 50 = 14368 \text{ kg}$$

El esfuerzo cortante máximo ocurrirá en B y su magnitud es de,

$$\frac{28103}{50 \cdot 35} = 16.05 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 2 \cdot v_c = 16.42 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

En zonas sísmicas recomendamos ignorar la contribución del concreto a resistir corte. Se tomará $V_c = 0$ en zonas confinadas (ver Sección 8.6b). Los resultados de los cortes se resumen en la Figura 13.6.

• Cálculo de estribos

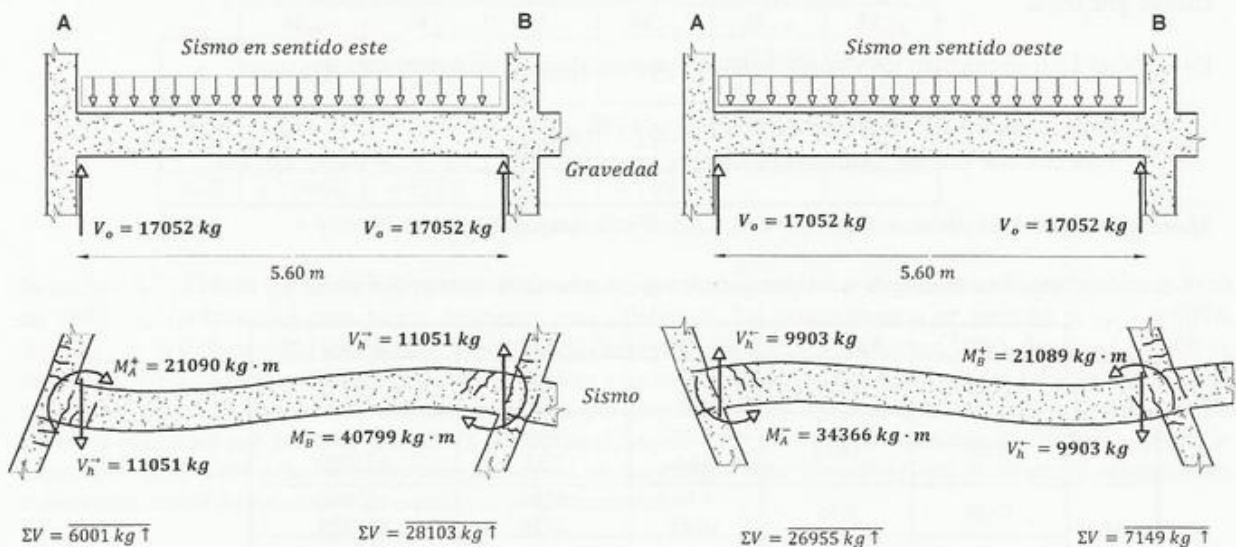


Fig. 13.6 Cálculo de los cortes de diseño. Ejemplo 13.2

Las expresiones de fuerza cortante asumiendo x como la distancia medida desde el apoyo A en dirección a B :

Sismo en sentido este, $V_u^+(x) = 6001 - w_u \cdot x \dots$ en sentido oeste, $V_u^-(x) = 26955 - w_u \cdot x$

Utilizando estribos de 3/8" de dos ramas, tenemos,

$$K_s = A_v \cdot F_y \cdot d = (1.42) \cdot (4200) \cdot (50) = 298200 \text{ kg} \cdot \text{cm} \Rightarrow s = K_c / V_s$$

Estribos de 3/8" \Rightarrow Diámetro $d_e = 0.95 \text{ cm} \Rightarrow$ Barras 3/4 $\Rightarrow D_b = 1.905$

Separaciones máximas, zona crítica, $s = d/4 = 12.5 \text{ cm}$

$$s = 8 \cdot D_b = 15.2 \text{ cm} \rightarrow 3/4"$$

$$s = 24 \cdot d_e = 22.8 \text{ cm} \rightarrow 3/8"$$

$$s = 30 \text{ cm}$$

En nuestro caso $s = 12.5 \text{ cm}$ y el primer estribo se colocará a no más de 5 cm del borde de la columna. La zona crítica mide $2 \cdot h = 110 \text{ cm}$ a partir del borde. En la zona central $s \leq d/2 \leq 25 \text{ cm}$.

Tabla 13.7a Separación de estribos para sismo⁺ (sentido este)

x (cm)	V_u (kg)	$ \bar{V}_u $ (kg)	V_c (kg)	V_s (kg)	s (cm)	$s_{m\acute{a}x}$ (cm)	s^+ (cm)
0.0	6001	8001	0	8001	37	12.5	12.5
1.0	-89	119	0	119	2513	12.5	12.5
2.0	-6179	8239	14368	-6129	-	25	25.0
3.0	-12269	16359	14368	1991	150	25	25.0
4.0	-18359	24479	14368	10111	29	25	25.0
5.0	-24449	32599	0	32599	9	12.5	9.0
5.6	28103	37470	0	37471	8	12.5	8.0

Tabla 13.7b Separación de estribos para sismo⁻ (sentido oeste)

x (cm)	V_u (kg)	$ \bar{V}_u $ (kg)	V_c (kg)	V_s (kg)	s (cm)	$s_{m\acute{a}x}$ (cm)	s^- (cm)
0.0	26955	35940	0	35940	8	12.5	8.0
1.0	20865	27820	0	27820	11	12.5	11
2.0	14775	19700	14368	5333	56	25.0	25.0
3.0	8685	11580	14368	-	-	25.0	25.0
4.0	2595	3460	14368	-	-	25.0	25.0
5.0	-3495	4660	0	4660	64	12.5	12.5
5.6	-7149	9532	0	9532	31	12.5	12.5

Tabla 13.7c Separación definitiva de estribos

x (cm)	s^{\rightarrow} (cm)	s^{\leftarrow} (cm)	s (cm)
0	12.5	8.0	8.0
1	12.5	11	8.0
2	25.0	25.0	25
3	25.0	25.0	25
4	25.0	25.0	25
5	9.0	12.5	8.0
5.6	8.0	12.5	8.0

• **Conclusión**

Entre 0 y 1.60 metros del apoyo A y 4 y 5.60 metros usaremos estribos de 3/8" @ 8.00 cm (zona confinada). En el resto de la viga usaremos estribos cada 25 cm. El primer estribo lo colocaremos a una distancia menor de 5 cm del apoyo. (Figura 8.24).

• **Longitudes de desarrollo**

Barras #6 Diámetro = 1.90 cm
 Área = 2.85 cm² Para $F_y = 4200$
 Asumiremos: $L_d \cong 50 \cdot D_b = 95 \text{ cm}$

Para las barras superiores con más de 30 cm de concreto por debajo... $L_d = 65 \cdot D_b = 124 \text{ cm}$
 Verificaremos la relación entre h y $D_b \Rightarrow h \geq 24 \cdot D_b = 45.6 \text{ cm} \dots < 50 \text{ cm OK}$
 Barras con gancho... $L_{dh} \cong 20 \cdot D_b = 38 \text{ cm} + \text{Gancho normalizado de 12 Diámetros}$

• **Corte dentro del nodo B**

Vigas principales 35 cm x 55 cm Vigas de amarre 40 cm x 60 cm
 Columnas: 45 cm x 50 cm

$$L_{c-c} = 6.10 \text{ m} \quad l = L_{\text{Libre}} = 5.60 \quad \frac{L}{l} = 1.089 \quad H_{\text{columnas c-c}} = 2.70 \text{ m}$$

El corte en el nodo B. $V_{uj} = 1.25 \cdot F_y \cdot (A_{s1} + A_{s2}) - V_{\text{col}}$

Asumiendo los puntos de inflexión de las columnas a mitad de altura, nos viene por estática,

$$V_{\text{col}} = \frac{(L_{\text{izq}}/l_{\text{izq}}) \cdot M_{\text{izq}} + (L_{\text{der}}/l_{\text{der}}) \cdot M_{\text{der}}}{\frac{H_{\text{sup}} + H_{\text{inf}}}{2}} = \frac{(1.089) \cdot (40799 + 21089)}{\frac{2.7}{2} + \frac{2.7}{2}} \Rightarrow V_{\text{col}} = 24962 \text{ kg}$$

M_{izq} y M_{der} se pueden calcular con la Ecuación aproximada 5.28: $M = A_s \cdot 1.25 \cdot F_y \cdot (7/8 \cdot d)$

$$\bar{V}_{uj} = \frac{(1.25) \cdot (4200) \cdot (17.10 + 8.55) - 24962}{\phi = 0.85} \Rightarrow \bar{V}_{uj} = 129060 \text{ kg}$$

Como el ancho de las vigas en la dirección de las de carga y amarre (igual a 35 y 40 cm. respectivamente) es mayor que 0.75 por ancho columna en ambas direcciones se considerará que hay confinamiento del nodo por cuatro lados. Es decir. $35 > 0.75 \cdot 45 \dots \dots 40 > 0.75 \cdot 50$.

$$b_j = \text{menor} [h_c + b_{\text{viga}} \text{ y } b_{\text{viga}} + 2 \cdot x] \Rightarrow b_j = \text{menor} \left[50 + 35 \text{ y } 35 + 2 \cdot \frac{(45 - 35)}{2} \right] = 45 \text{ cm}$$

La resistencia del nodo viene dada por, $\frac{\gamma}{5.30} \cdot \frac{b_j}{45} \cdot \frac{h}{50} \cdot \sqrt{240} = 184741 \text{ kg} > \bar{V}_{uj} \quad O.K$

• **Comprobación de la condición $\sum M_c = 1.20 \cdot \sum M_v$**

En el caso de vigas su capacidad resistente a flexión es una sola para tracción arriba (33060) o para tracción abajo (17040). La sumatoria de la resistencia a flexión de las columnas que llegan al nodo B debe ser mayor que $1.20 \cdot (33060 + 17040) = 60120 \text{ kg} \cdot \text{m}$ (Figura 13.7).

Para una columna su capacidad resistente a flexión varía con el valor de la carga axial por lo que la comprobación debe hacerse para la carga última P_u que conduzca a la menor capacidad a flexión de la columna M_{min} (sin afectar por el factor ϕ .) En nuestro caso calcularemos para la columna por debajo y por encima de B los valores de M en el diagrama de interacción correspondientes al caso de carga que produzcan la máxima y mínima fuerza axial. Este procedimiento puede resultar conservador debido a que los valores de cargas axiales máximas y mínimas pueden o no ocurrir simultáneamente en las columnas por encima y debajo del nodo. Estrictamente hablando la comprobación de la resistencia a flexión de la columna debería verificarse para cada caso de carga por separado.

Cargas axiales en las columnas

Tabla 13.8 Valores de P (ton) para el pórtico en estudio obtenido del análisis estructural

	P_m	P_v	P_s	P_{u1}	P_{u2}	P_{u3}	P_{max}	P_{min}
Encima Nodo B	75.0	25.0	∓ 20.0	130	95.0 135.0	47.5 87.5	135.0	47.5
Debajo Nodo B	100.0	32.5	∓ 26.0	172	126.5 178.5	64.0 116.0	178.5	64.0

Asumiremos que para las columnas $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$

$$P_{u1} = 1.2 \cdot P_m + 1.6 \cdot P_v$$

$$P_{u3} = 0.9 \cdot P_m + P_{sismo}$$

$$P_{u2} = 1.2 \cdot P_m + P_v \pm P_{sismo}$$

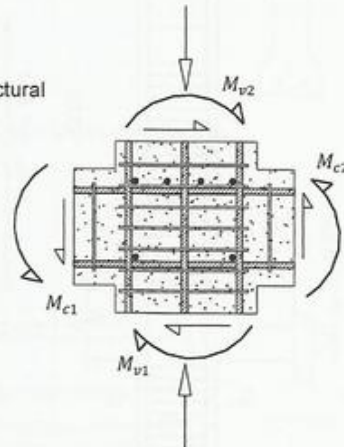


Fig. 13.7 Verificación de la condición $\sum M_c = 1.20 \cdot \sum M_v$

Seleccionaremos una columna con $\rho = 2.0\%$ y la configuración que se muestra en el Apéndice B y se construye el Diagrama de interacción de la Figura 13.8. El área sombreada corresponde al diagrama de interacción multiplicado por el factor ϕ . El código ACI permite hacer la verificación de la capacidad del nodo en base a la resistencia de la columna sin afectarla por el factor ϕ . De la Figura se aprecia que la mínima resistencia de la columna localizada por debajo y encima del nodo B es de 52 y 58 ton \cdot m respectivamente lo que suma 110 ton \cdot m $>$ 60.12 ton \cdot m O.K.

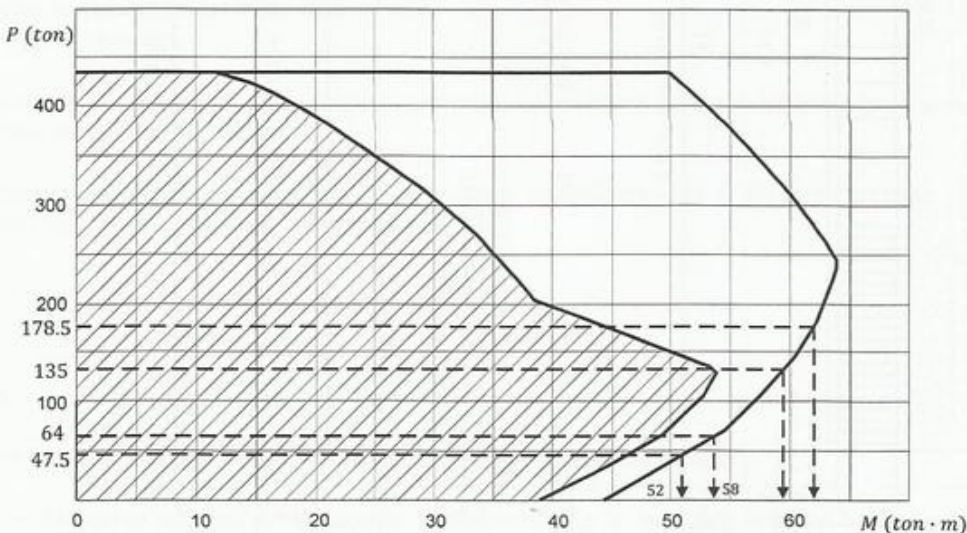
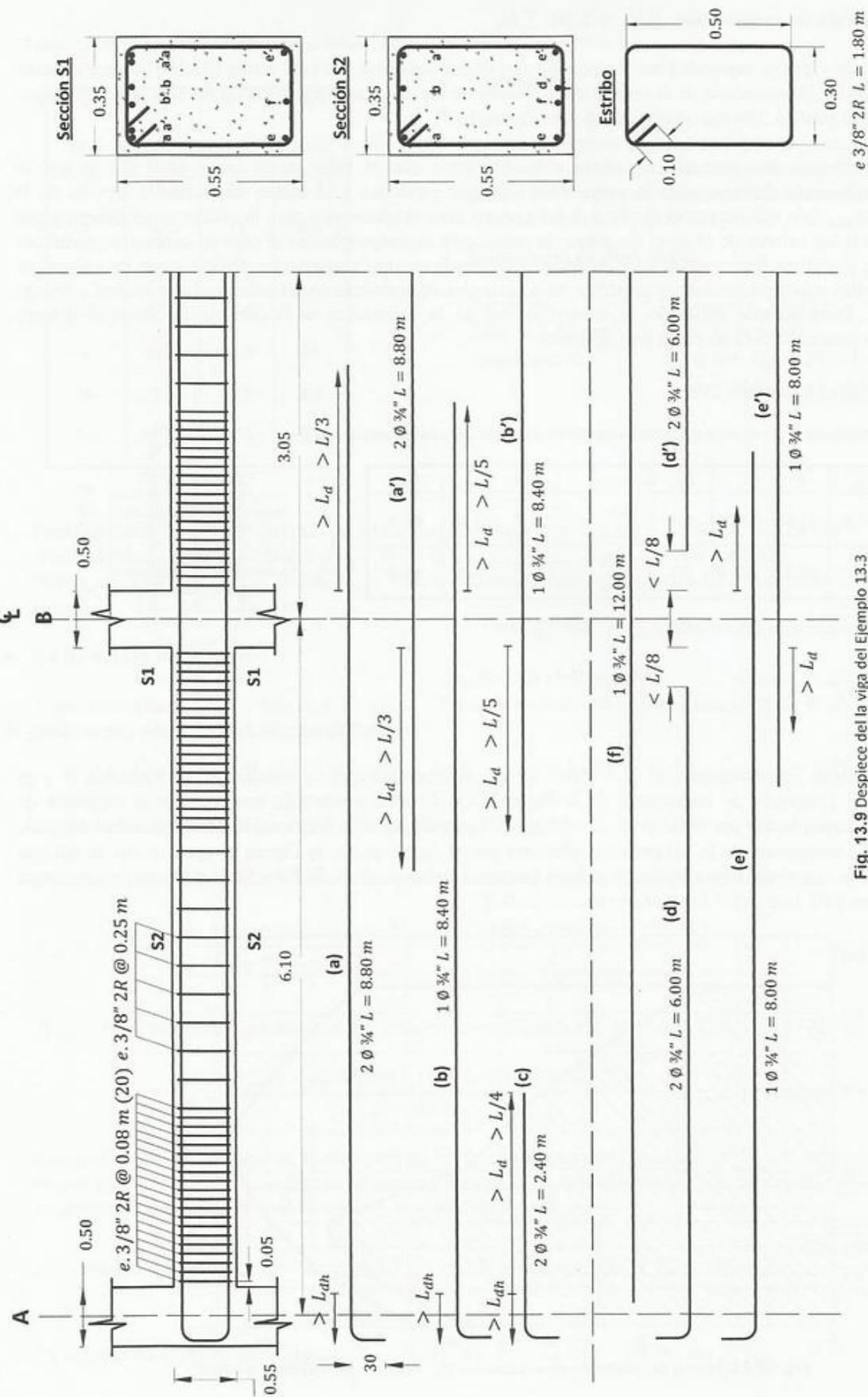


Fig. 13.8 Diagrama de interacción para la columna ($h_c = 50\text{cm}$... $b = 45\text{cm}$ $\rho = 2.0\%$)



14.1 VIGAS COMPUESTAS

Las vigas compuestas están formadas por una losa de concreto armado sobre perfiles metálicos o nervios prefabricados, donde la unión entre viga y losa es suficientemente fuerte como para resistir el corte horizontal en el plano de la unión, obteniéndose así una SECCIÓN EN TE de gran rigidez.

La unión entre losa y perfiles se logra mediante conectores metálicos soldados al ala superior. Los conectores pueden ser pernos rectos o doblados, cabillas en espiral o trozos de perfiles en U (Figura 14.1).

En el caso de vigas prefabricadas de concreto armado o pretensado, la unión con la losa se logra por la acción combinada del rozamiento (superficie rugosa) y de estribos salientes de la viga que penetran en la losa (ver cortante por fricción Capítulo 8).

a) COMPORTAMIENTO

Cuando no hay unión entre viga y losa y bajo la acción de las cargas tenemos, (Figura 14.2).

- Tracciones y alargamientos en la parte inferior de la losa.
- Compresiones y acortamientos en la parte superior de la losa.

Por tanto se producirá deslizamiento en el plano común losa-viga.

Para evitar el deslizamiento es necesaria la presencia de esfuerzos cortantes horizontales v y de elementos de unión que los resistan (conectores).

En presencia de elementos conectores que impidan el deslizamiento el esfuerzo cortante unitario o flujo cortante (por cm lineal de viga) viene dado por,

$$\frac{\text{flujo cortante}}{v \cdot b} = V \cdot Q/I$$

Dónde,

$I \rightarrow$ Momento de inercia de la viga compuesta (sección transformada).

$Q \rightarrow$ Momento estático de la sección transformada de la losa con relación al eje neutro de la viga compuesta.

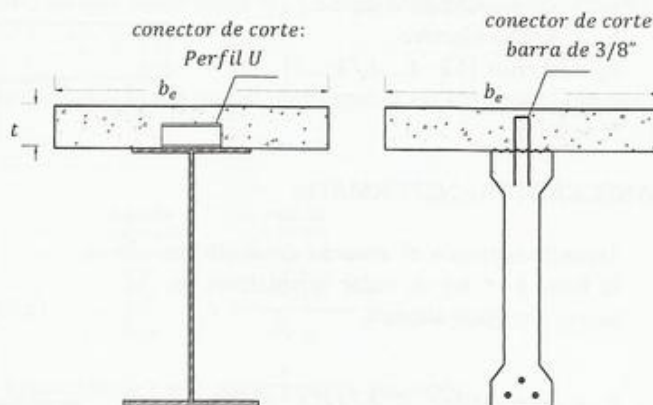


Fig. 14.1 Vigas compuestas

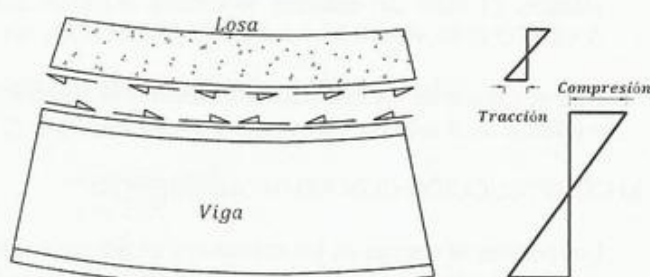


Fig. 14.2 Comportamiento de una viga sin unión o conectores de corte entre el acero y el concreto

14.2 VIGAS COMPUESTAS DE LOSAS SOBRE PERFILES DE ACERO ESTRUCTURAL

L = Luz de la viga
 t = Espesor de la losa
 s = Separación de vigas c-c
 b_e = Ancho efectivo
 $b_e = \text{menor } [12 \cdot t \dots L/4 \dots S]$
 $n = E_s/E_c$
 $N = 3 \cdot n$

a) SECCIÓN TRANSFORMADA

Transformaremos el área de concreto de la losa, $b \cdot t$ en un valor equivalente en acero, con igual altura t ,

$$b \cdot t \Rightarrow b \cdot (t/n) \text{ ó } b \cdot t / (\overbrace{3 \cdot n}^N)$$

Ó sea con,

$$b_1 = b/n \text{ ó } b_3 = b/(3 \cdot n)$$

El valor $3 \cdot n$ se utiliza para tomar en cuenta la acción de las cargas permanentes y el fenómeno del flujo plástico. El valor del esfuerzo se tomará el mayor que resulte al calcular con n o con $3 \cdot n$. (Ver norma AASHTO 1983, Art.10.38.1 ó ASHTO LRFD 2005, Art. 6.10.1.1.1b).

Para el cálculo de los esfuerzos utilizaremos la fórmula $f = M \cdot I/y = M/S$, donde S es el módulo superior o inferior de la sección compuesta y se denotará S_s y S_i respectivamente.

b) CONSTRUCCIÓN CON APUNTALAMIENTO

Los perfiles se apoyan en los extremos y en puntales colocados a lo largo de la luz, los cuales se mantienen en posición desde el vaciado hasta que el concreto de la losa alcance la resistencia de diseño. Los puntales a espaciamientos adecuados resistirán prácticamente la totalidad de la carga hasta que sean removidos y la carga sea transferida a la viga que actuará como compuesta.

Carga muerta: Peso propio viga + Peso propio losa + Peso pavimento + Peso barandas

Carga viva: Carga por personas, muebles o vehículos incluyendo impacto

Esfuerzos:

$$\text{Arriba} \Rightarrow f_c = \frac{M_m + M_v}{(n \cdot S_s)} \leq f_{ca}(\text{esf. adm. conc}) \quad \text{Abajo} \Rightarrow f_s = \left(\frac{M_m}{S_{i \ 3 \cdot n}} \right) + \left(\frac{M_v}{S_{i \ n}} \right) \leq f_{sa}(\text{esf. adm. acero})$$

Nota: El esfuerzo f_c es mayor cuando se calcula con n en cambio f_s es mayor cuando se calcula para $3 \cdot n$.

c) CONSTRUCCIÓN SIN APUNTALAMIENTO

Durante el vaciado de la losa y mientras esta alcance su resistencia se tiene,

Sección resistente: El perfil de momento de inercia I_p y módulos de sección W_s y W_i .

Cargas: Peso propio perfil y conectores + Peso propio losa + Peso del equipo usado en el vaciado.

Esfuerzos:

$$f'_s \text{ (fibra sup. del perfil)} = \frac{M_{\text{vaciado}}}{W_s} \leq f_{sa} \dots \dots f_{s1} \text{ (fibra inf.)} = \frac{M_{\text{vaciado}}}{W_i} \leq f_{sa}$$

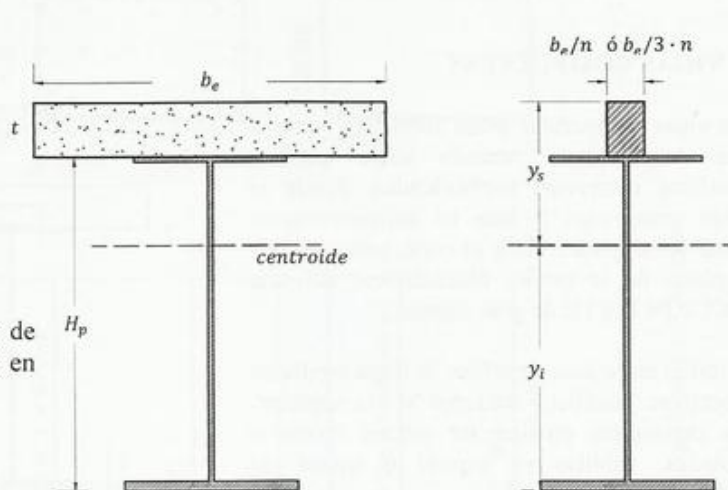


Fig. 14.3 Sección transformada

En el instante en que la losa alcanza la resistencia f'_c tendremos,

Sección resistente: La sección compuesta de acero-concreto.

Cargas: Peso del pavimento, barandas, etc. (muerta) que llamaremos M_p y carga viva incluyendo impacto M_{v+i} .

Estos esfuerzos deben ser menores que los admisibles f_{sa} para que el perfil resista las cargas del proceso constructivo.

Esfuerzos:

$$f_c \text{ (fibra sup. de concreto)} = \frac{\overbrace{M_p}^{\text{Debido a carga permanente}}}{S_s n} + \frac{\overbrace{M_{v+i}}^{\text{Debido a carga viva+impacto}}}{S_s n} \leq f_{ca}$$

Y el esfuerzo en las fibras inferiores del perfil acero debida a esta etapa vendría dado por,

$$f_{s2} \text{ (fibra inf.)} = \frac{M_p}{S_i n} + \frac{M_{v+i}}{S_i n} \leq f_{sa}$$

Los esfuerzos totales en las fibras inferiores del perfil de acero,

$$f_s = f_{s1} + f_{s2}$$

EJEMPLO 14.1

Se pide calcular las características de la sección compuesta con los siguientes datos (Figura 14.4).

PERFIL 24WF - B24 con

$$I = 92807 \text{ cm}^4$$

$$f_{ca} = 100 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = 10$$

$$t = 16 \text{ cm}$$

$$W_i = W_s = 3045 \text{ cm}^3$$

$$f_{sa} = 1450 \text{ kg/cm}^2$$

$$b_e = 150 \text{ cm}$$

$$A = 152 \text{ cm}^2$$

$$b = 22.9$$

$$h = 61 \text{ cm}$$

$$pp = 119 \text{ kg/ml}$$

SECCIÓN COMPUESTA PARA $n = 10$	SECCIÓN COMPUESTA PARA $3 \cdot n = 30$
$b_1 = \frac{150}{10} = 15 \text{ cm}; A_{losa} = 15 \cdot 16 = 240 \text{ cm}^2$ $A = 240 + 152 = 392 \text{ cm}^2$ Centroide $(240) \cdot (8 + 30.5) = (240 + 152) \cdot y'$ $y' = 23.57 \text{ cm} \Rightarrow y'_s = 22.93 \text{ cm}$ $\Rightarrow y'_i = 54.07 \text{ cm}$ $I' = 92807 + (240) \cdot (38.5)^2 + (15) \cdot (16)^3 / 12$ $I' = 453667$ $I = 453667 - (392) \cdot (23.57)^2 = 235867 \text{ cm}^4$ $S_s = I / y_s = 10287 \text{ cm}^3; S_i = I / y_i = 4362 \text{ cm}^3$	$b_3 = 150/30 = 5 \text{ cm}$ $A_{losa} = 5 \cdot 16 = 80$ $A = 80 + 152 = 232 \text{ cm}^2$ $y' = 13.276 \text{ cm} \Rightarrow y'_s = 33.224 \text{ cm}$ $\Rightarrow y'_i = 43.776 \text{ cm}$ $I = 172203 \text{ cm}^4$ $S_s = I / y_s = 5183 \text{ cm}^3$ $S_i = I / y_i = 3934 \text{ cm}^3$

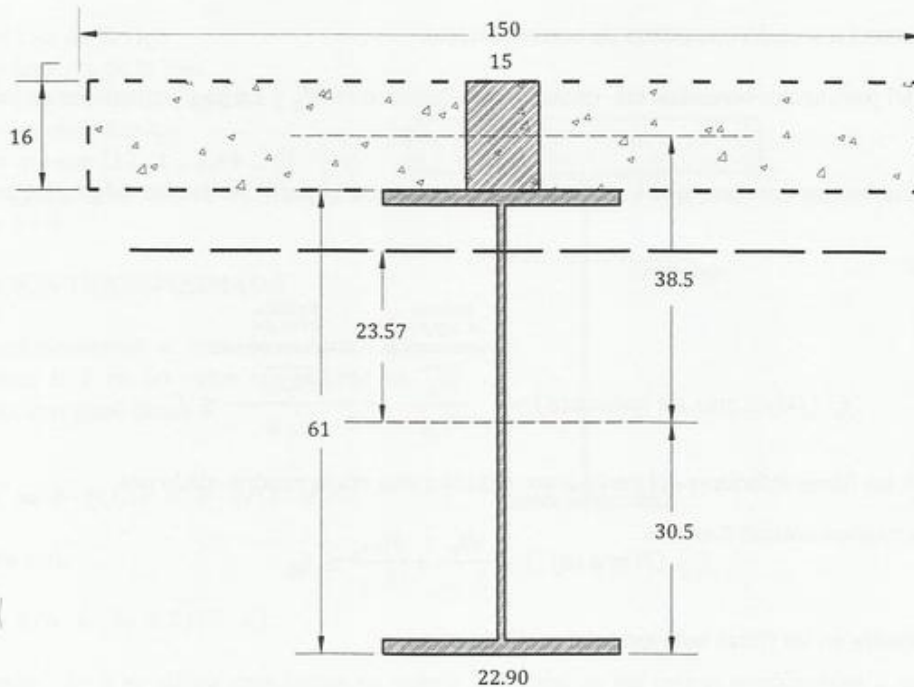


Fig. 14.4 Sección transformada $n = 10$ (Ejemplo 14.1)

- Comparación de valores de esfuerzos en los dos casos n y $3 \cdot n$,

CASO A (n): $f_c = M/(10 \cdot 10287) = M/102870$
 $f_s = M/4362$

CASO B ($3 \cdot n$): $f_c = M/(30 \cdot 5183) = M/155490 \Rightarrow$ Menor que el anterior.
 $f_s = M/3934 \Rightarrow$ Mayor que el anterior.

EJEMPLO 14.2

Viga de puente para camiones H20

Separación de Vigas c-c = 150 cm

$t_{losa} = 16$ cm

Rueda trasera = 7260 kg

Rueda delantera = 1815 kg

vigas = 6

Luz = 14.00 m

- Carga muerta inicial

Por losa = $(0.16) \cdot (2500) \cdot (1.5) = 600 \text{ kg/m}$
 Peso propio + Conectores = 130 kg/m
 Por separador central = 70 kg/m
 = 800 kg/m

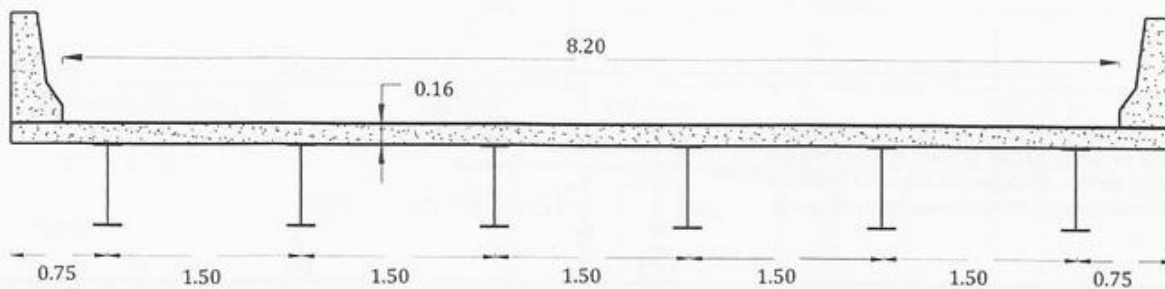


Fig. 14.5a Sección transversal del tablero (Ejemplo 14.2)

- Carga muerta que actúa posteriormente

$$\text{Pavimento} = (0.05) \cdot (2400) \cdot (1.5) = 180 \text{ kg/m}$$

$$\text{Barandas} = (450) \cdot (2)/6 = 150 \text{ kg/m}$$

$$= 330 \text{ kg/m} \Rightarrow w_t = 800 + 330 = 1130 \text{ kg/m}$$

$$M_{m-\text{inical}} = (800) \cdot \frac{(14)^2}{8} = 19600 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_{m-\text{posterior}} = (330) \cdot (196)/8 = 8085 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\text{Total} \quad M_m = 27685 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

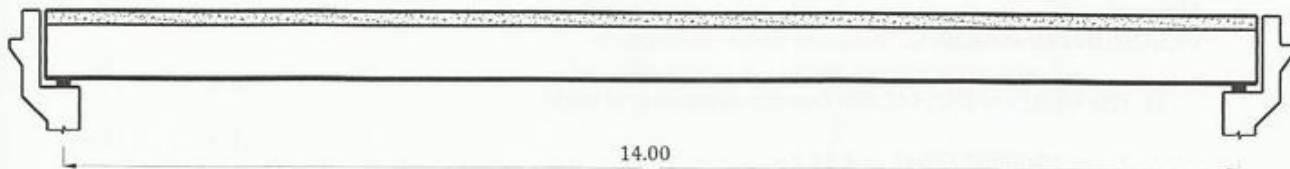


Fig. 14.5b Sección longitudinal del Puente (Ejemplo 14.2)

- Carga viva (AASHTO 83, 3.23)

$$\text{Porción rueda-viga} = s/1.676 = 0.895$$

$$P \text{ rueda trasera} = 7260 \cdot 0.895 = 6500$$

$$P \text{ rueda delantera} = 1815 \cdot 0.895 = 1625$$

$$= 8125 \text{ kg}$$

- Carga viva

$$\text{Impacto} \Rightarrow \frac{15}{L+38} = \frac{15}{52} = 0.2885 \quad \frac{L}{2} - 0.426 = 6.574$$

$$M_{\text{máx}} \Rightarrow M = \overbrace{(8125) \cdot (1.2885)}^{V_A = 4916 \text{ kg}} \cdot \frac{6.574}{14} = 32318 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$\text{Resultante} \dots \Sigma = 6500 + 1625 = 8125 \text{ kg} \dots \text{actuando a} \dots [1625 \cdot 4.26 = 8125 \cdot x] \rightarrow x = 0.852 \text{ m}$$

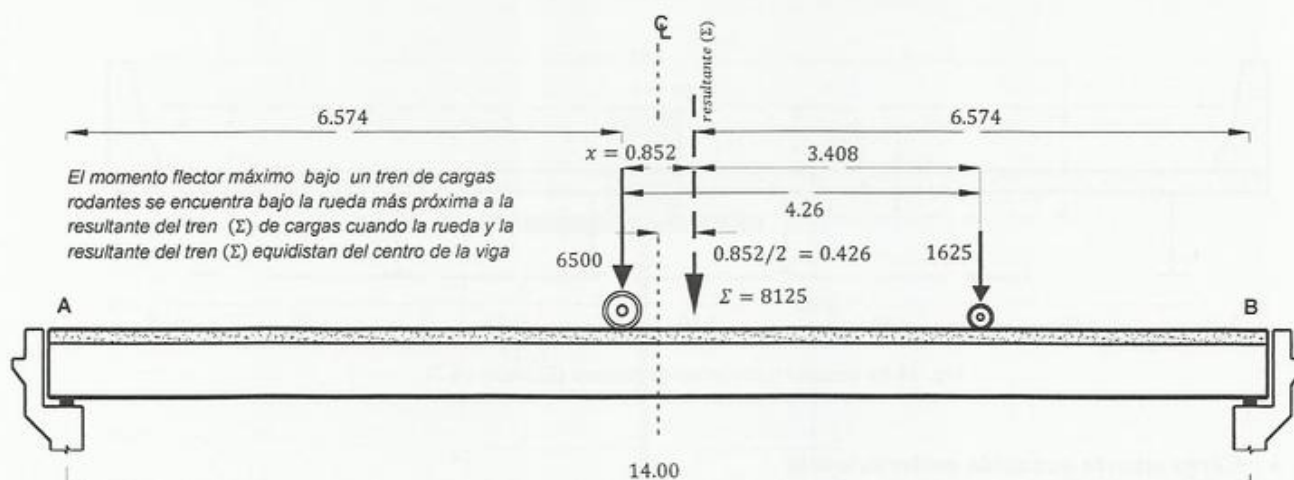


Fig. 14.5c Sección longitudinal del Puente (Ejemplo 14.2) y posición del camión para producir el momento máximo

• **Alternativa I**
VIGAS CON APUNTALAMIENTO

$$f_c = \frac{M_m + M_{v+i}}{n \cdot S_{s(n)}} = \frac{2768500 + 3231800}{(10) \cdot (10287)} = 58.33 \frac{kg}{cm^2} < f_{ca}$$

$$f_s = \frac{M_m}{S_{i(3n)}} + \frac{M_v + I}{S_{i(n)}} = \frac{2768500}{3934} + \frac{3231800}{4362} = 1444.7 \frac{kg}{cm^2} < f_{sa}$$

• **Alternativa II**
VIGAS SIN PUNTALES

1) ESFUERZOS INICIALES: Sección resistente: el perfil

$$f_{s1} = 1960000/3045 = 644 \frac{kg}{cm^2} < f_{sa}$$

El perfil resiste bien la carga inicial aún incluyendo el peso del personal y equipo para el vaciado.

2) ESFUERZOS POR CARGA PERMANENTE: Sección resistente: la compuesta

$$f_c = \frac{808500}{10 \cdot 10287} = 7.86 \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow (n) \quad f_s = \frac{808500}{3934} = 205 \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow (3 \cdot n)$$

3) ESFUERZOS POR CARGA VIVA + IMPACTO: Sección compuesta

$$f_c = \frac{3231800}{10 \cdot 10287} = 31.4 \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow (n) \quad f_s = \frac{3231800}{4362} = 740.9 \frac{kg}{cm^2} \Rightarrow (n)$$

4) ESFUERZOS TOTALES

$$f_c = 7.86 + 31.4 = 39.26 \frac{kg}{cm^2} < f_{ca}$$

$$f_s = 644 + 205.5 + 740.9 = 1590.4 \frac{kg}{cm^2} > f_{sa}$$

La alternativa de construcción sin apuntalamiento excede los esfuerzos admisibles. Adoptaremos la solución de construcción con apuntalamiento. Una solución para la construcción sin apuntalamiento consistiría en colocar una platina soldada al ala inferior del perfil metálico que incrementará el costo de la viga pero evitaremos la compra/alquiler de puntales.

14.3 CÁLCULO A LA ROTURA EN VIGAS COMPUESTAS

Losa

Siendo (Figura 14.6),

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b$$

$$C_o = K \cdot t$$

Perfil

$$A_1 = b_1 \cdot t_1$$

$$A_2 = h_1 \cdot t_2$$

$$A_3 = b_3 \cdot t_3$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$F_o = A \cdot F_y$$

$$F_1 = A_1 \cdot F_y$$

Debe cumplirse,

$$b_1/t_1 \leq 424/\sqrt{F_y}$$

$$h/t_2 \leq 3525/\sqrt{F_y}$$

CASO I $C_o \geq F_o$ Ó sea: $a \leq t$

$$K \cdot a = F_o \quad a = F_o/K$$

$$\bar{M}_u = F_o \cdot (y_{sp} + t - a/2)$$

CASO II $C_o < F_o$

El eje neutro pasa debajo de la losa.

$$C = T \quad \text{Ó sea} \quad C_o + C' = F_o - C' \quad \text{de donde} \quad C' = (F_o - C_o)/2$$

1) $C' \leq F_1$ Eje neutro dentro del ala superior

$$C' = b_1 \cdot F_y \cdot y \quad \text{De donde} \quad y = C'/(b_1 \cdot F_y)$$

$$\bar{M}_u = F_o \cdot (y_{sp} - y) + C_o \cdot \left(y + \frac{t}{2}\right) + 2 \cdot C' \cdot \left(\frac{y}{2}\right)$$

2) $C' > F_1$ Eje neutro en el alma

$$C' = F_1 + t_2 \cdot F_y \cdot y \quad \text{siendo} \quad y' = y - t_1 \quad y = t_1 + \frac{C' - F_1}{F_y} \cdot \frac{1}{t_2}$$

$$\bar{M}_u = F_o \cdot (y_{sp} - y) + C_o \cdot \left(y + \frac{t}{2}\right) + 2 \cdot F_1 \cdot \left(y - \frac{t_1}{2}\right) + 2 \cdot (C' - F_1) \cdot \left(\frac{y'}{2}\right)$$

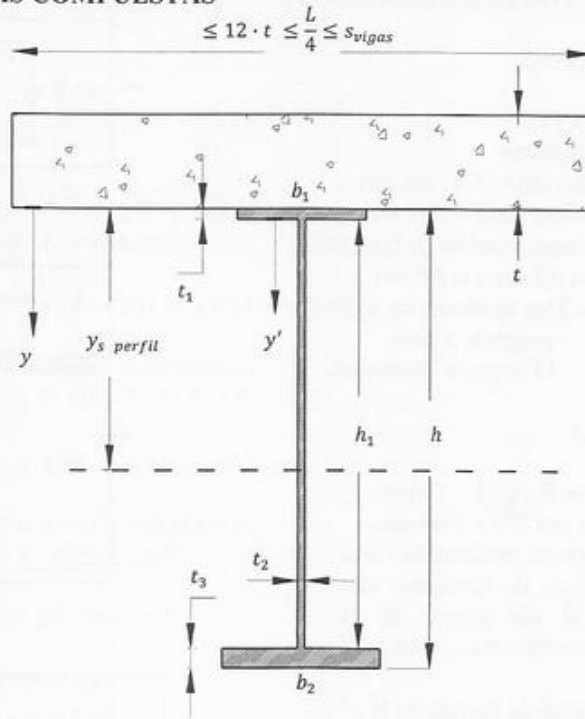


Fig. 14.6 Sección compuesta (Rotura)

Nota: La resistencia de la viga es independiente de que haya o no apuntalamiento en el momento del vaciado. Sin embargo, en el caso de no utilizarse puntales, el perfil o la viga prefabricada debe ser capaz de resistir por sí solo los esfuerzos debidos a las cargas que actúan durante la construcción.

14.4 CONECTORES DE CORTE EN U

a) DIMENSIONES

Ver Figura 14.7.

Longitud máxima

$$L_c = \text{Ancho ala} - 5.1 \text{ en cm}$$

Altura mínima alma = 5.1 cm

Recubrimiento superior ≥ 5.1 cm

Separación máxima = 60 cm

Soldadura: Dos cordones de 3/16 de pulgada a todo lo largo del conector.

b) CÁLCULO

$$S = v \cdot b = V \cdot Q / I \quad \text{Donde,}$$

V = Corte por CV + Impacto

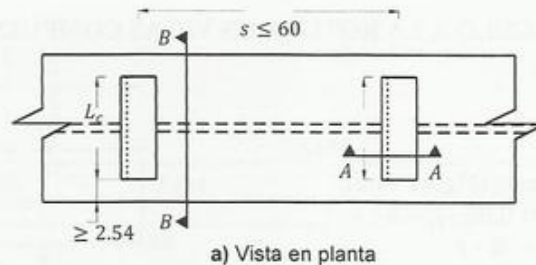
Q = Momento estático del área transformada de concreto con relación al eje neutro de la sección compuesta, calculado con n .

I = Momento de inercia de la sección compuesta

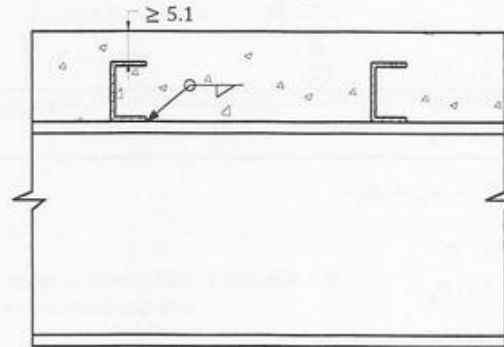
transformada) calculada con n .

$$Z = B \cdot L_c$$

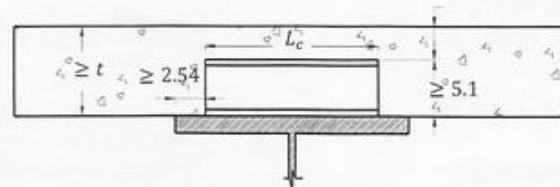
Los valores de B para un número N de ciclos de cargas son (Tabla 14.1),



a) Vista en planta



b) Sección A-A



c) Sección B-B

Fig. 14.7 Conectores de corte en U

Tabla 14.1 Valores de B y N

# CICLOS	100000	500000	2000000	20000000
B	714	535	428	375

Para vigas de un tramo con apoyos simples, la separación entre conectores (para un valor de V) viene dada por la siguiente fórmula,

$$s = Z / S$$

c) COMPROBACIÓN DE LOS CONECTORES POR EL MÉTODO DE ROTURA

A_s = Área del perfil (cm^2)

t = Espesor de losa de concreto (cm)

b_e = Ancho efectivo de losa (cm)

P = Valor menor entre P_1 y P_2

$$P_1 = 0.85 \cdot f'_c \cdot b_e \cdot t$$

$$P_2 = A_s \cdot F_y$$

$$S_u = \text{Resistencia última del conector} = (145.75) \cdot (t_a + t_w/2) \cdot L_c \cdot \sqrt{f'_c}$$

Donde, t_a = Espesor promedio de las alas del conector, t_w = Espesor del nervio o alma del conector en cm

El número de conectores necesarios entre el apoyo simple y el punto o sección de máximo momento es de,

$$n_c = P / (0.85 \cdot S_u)$$

EJEMPLO 14.3

Cálculo de conectores en U

- Corte carga viva + impacto

$$\Sigma P \cdot l = 8125 \cdot \frac{l}{1.2885}$$

$$\Sigma P \cdot l = 10469 \text{ kg}$$

$$L - 2 \cdot (0.426) = 13.148 \text{ m}$$

Por estática encontramos,

$$V_{(x)} = 10469 \cdot (13.148 - x)/L$$

$$A = 150 \cdot 16/10 = 240 \text{ cm}^2$$

$$Q = (240) \cdot (22.93 - 8)$$

$$Q = 3583.2 \text{ cm}^3$$

$$I = 235867 \text{ cm}^4$$

$$S = V \cdot Q/I$$

- Para conectores en U normales # 8 tenemos $A_c = 11 \text{ cm}^2$

$$g = 8.6 \text{ kg/m}$$

$$b = 4.5 \text{ cm}$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$t_a = 0.8 \text{ cm}$$

$$t_w = 0.6 \text{ cm}$$

$$L_{c \text{ máx}} = 22.9 - 5.1 = 17.1 \text{ (22.9 ancho ala perfil WF - 24)}$$

Usaremos $L = 16 \text{ cm}$

$$Z = B \cdot L_c$$

$$B = 375 \text{ (Puentes)}$$

$$Z = 375 \cdot 16 = 6000$$

Tabla 14.2 Resumen del cálculo de s

$x \text{ (m)}$	0 m	1.00 m	2.00 m	3.00 m	4.00 m
$V \text{ (kg)}$	9832	9084	8336	7589	6841
$S \text{ (kg/cm)}$	19	138	125	115	104
$s = Z/S \text{ (cm)}$	40	43	48	52	57

- Comprobación de la rotura $f'_c = 100/0.45 = 222 \text{ kg/cm}^2$

$$P_1 = (0.85) \cdot (222) \cdot (150) \cdot (16) = 452880 \text{ kg}$$

$$P_2 = (152) \cdot (2800) = 425600 \text{ kg} \Rightarrow \text{Luego} \Rightarrow P = 425600 \text{ kg}$$

$$S_u = (145.75) \cdot (0.8 + 0.6/2) \cdot (16) \cdot 222 = 38220 \text{ kg}$$

$$\text{Número de conectores: } n_c = (425600)/(0.85 \cdot 38220) = 13.1$$

O sea que se necesitan 13.1 conectores en la mitad de la luz o más exactamente entre,

$$x = 0 \text{ m} \quad y \quad x = 6.574 \text{ m}$$

• **Distribución de conectores**

Entre $x = 0.00 \text{ m}$ y $x = 1.60 \text{ m} \Rightarrow 5$ Conectores cada 40 cm

Entre $x = 1.60 \text{ m}$ y $x = 2.50 \text{ m} \Rightarrow 2$ Conectores cada 45 cm

Entre $x = 2.50 \text{ m}$ y $x = 4.00 \text{ m} \Rightarrow 3$ Conectores cada 50 cm

Entre $x = 4.00 \text{ m}$ y $x = 6.75 \text{ m} \Rightarrow 5$ Conectores cada 55 cm

Lo que arroja un total de 30 conectores por viga de $14 \text{ m} \Rightarrow$ con un peso total de $(30) \cdot (0.16) \cdot (8.64) = 41.5 \text{ kg}$.

EJEMPLO 14.4

Cálculo de las Flechas,

$$I_{(n)} = 235867 \text{ cm}^4$$

$$I_{(3 \cdot n)} = 172203 \text{ cm}^4$$

• **Construcción con Apuntalamiento**

Instantánea,

Inmediatamente antes de retirar los puntales tendremos, que actúan la sección compuesta y el efecto del flujo plástico no ha afectado a la viga, la flecha será $\Delta_{I(n)}$,

$$\Delta_{I(n)} = \frac{5}{384} \cdot \frac{W_t \cdot L^4}{E \cdot I_{(n)}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{\overbrace{11.3}^{kg/cm} \cdot \overbrace{1400^4}^{cm}}{2.1 \cdot 10^6 \cdot 235867} = 1.14 \text{ cm} \Rightarrow \frac{L}{1227} \text{ O.K.}$$

Largo Plazo,

Al retirar los puntales el concreto de la losa estará comprimido bajo cargas de servicio y el fenómeno del flujo plástico producirá flechas diferidas o a largo plazo que se incrementan con el tiempo. Para su estimación usaremos la inercia de la sección calculada con una relación modular de $3 \cdot n$,

$$\Delta_{LP(3 \cdot n)} = \frac{5}{384} \cdot \frac{\overbrace{11.3}^{kg/cm} \cdot \overbrace{1400^4}^{cm}}{2.1 \cdot 10^6 \cdot 172203} = 1.56 \text{ cm} \Rightarrow \frac{L}{896} \text{ O.K.}$$

• **Flecha debido a la carga muerta,**

$$\Delta_{(CM)} = \Delta_{I(n)} + \Delta_{LP(3 \cdot n)} = 1.14 + 1.56 = 2.70 \text{ cm} \Rightarrow \frac{L}{517} \text{ O.K.}$$

• **Flecha debido a la carga viva,**

Asumiremos que la flecha máxima debido a carga viva ocurre con el camión en la posición que se indica en la Figura 14.5c. Usaremos el método de la doble integración. La coordenada x se medirá a partir del apoyo A (extremo izquierdo del puente),

$$M_{(x)} = \overbrace{4916}^{V_A} \cdot x - 6500 \cdot \langle x - 657.4 \rangle - 1650 \cdot \langle x - \overbrace{1083.4}^{657.4+426} \rangle$$

$$E \cdot I_{(n)} \cdot \theta_{(x)} = \frac{4626 \cdot x^2}{2} - \frac{6500 \cdot \langle x - 657.4 \rangle^2}{2} - \frac{1650 \cdot \langle x - 1083.4 \rangle^2}{2} + C_1$$

$$E \cdot I_{(n)} \cdot y_{(x)} = \frac{4626 \cdot x^3}{6} - \frac{6500 \cdot \langle x - 657.4 \rangle^3}{6} - \frac{1650 \cdot \langle x - 1083.4 \rangle^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

Condiciones de borde, para,

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x = 1400 \text{ cm} \rightarrow y = 0 \Rightarrow C_1 = 110.8985 \cdot 10^7 \cdot \text{kg} \cdot \text{cm}^2$$

Para el cálculo de las flechas por carga viva se usará $I_{(n)}$ debido a que el efecto del camión pasando sobre el puente se considera como una flecha instantánea.

Los resultados se presentan en la Tabla 14.3

Tabla 14.3. Flechas debido a la carga viva con el camión en la posición que se indica en 14.5c

$x \text{ (m)}$	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5
$y_{(x)} \text{ (cm)}$	-1.005	-1.006	-1.103	-1.132	-1.145 ($L/1220$)	-1.144	-1.128	-1.098

Se recomienda que la flecha debido a carga viva no supere $L/800$. O.K. La flecha máxima para el caso de carga dado ocurre para $x = 7.20 \text{ m}$ donde tendremos $\theta_{(7.2 \text{ m})} = 0$.

14.5 MURO DE SOSTENIMIENTO

EJEMPLO 14.5

Muro de sostenimiento para carretera

Sobrecarga = 0.60 m

Ubicación: Mérida, Venezuela.

Coefficiente de aceleración sísmica = 0.30

Coefficiente horizontal $K_h = 0.6 \cdot C = 0.18$
(Ver Seed y Whitman 1970)

Concreto $\Rightarrow f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$

Acero $\Rightarrow F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Suelo $\Rightarrow R_s = 2 \text{ kg/cm}^2$

Ángulo de fricción $\phi_{\text{suelo}} = 34^\circ$

Peso unitario relleno = 1800 kg/m^3

Coefficiente de roce concreto-suelo = 0.55

• Dimensiones

t Coronamiento = 0.20

t En la base $H/10$ = 0.60

t De la zapata $H/10$ = 0.60

Base interior $H/3$ \cong 2.05

Base exterior $H/5$ \cong 1.25

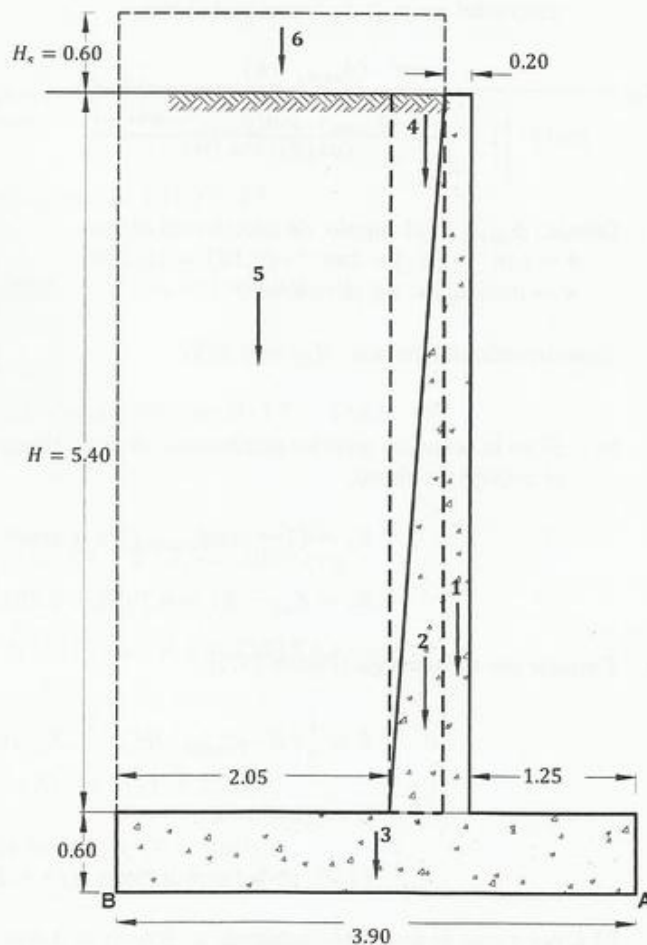


Fig. 14.8 Muro de Sostenimiento Ejemplo 14.5

• Estabilidad al volcamiento

Momento estabilizante (con relación al punto A). Figura 14.8.
Los resultados se resumen en la Tabla 14.4.

Tabla 14.4 Momentos estabilizantes del muro

	PESOS (ton)	BRAZOS (m)	MOMENTOS (ton · m)
1-. $(0.20) \cdot (5.40) \cdot (2.4) =$	2.592	1.350	3.500
2-. $(0.20) \cdot (5.40) \cdot (2.4) =$	2.592	1.583	4.104
3-. $(0.60) \cdot (3.90) \cdot (2.4) =$	5.616	1.950	10.951
4-. $(0.20) \cdot (5.40) \cdot (1.8) =$	1.944	1.717	3.337
5-. $(2.05) \cdot (5.40) \cdot (1.8) =$	<u>19.926</u>	2.875	<u>57.287</u>
Sin sobrecarga =	32.670		$M_e = 79.179$
6-. $(0.60) \cdot (2.45) \cdot (1.8) =$	<u>2.646</u>	2.675	<u>7.078</u>
Con sobrecarga =	35.316		$M_e = 86.257$

• Empujes (Coulomb 1776, Mononobe y Matsuo 1929, Okabe 1926, Rankine 1857, Seed y Whitman 1970)

- a) El coeficiente de empuje incluyendo el efecto del empuje de tierras y el sismo,

$$K_{AE} = \frac{\cos^2 \cdot (\phi_{suelo} - \theta)}{\cos^2 \theta \cdot \left[1 + \frac{\sin(\phi_{suelo}) \cdot \sin(\phi_{suelo} - \theta - w)}{\cos(\theta) \cdot \cos(w)} \right]}$$

Donde, ϕ_{suelo} es el ángulo de fricción del relleno,
 $\theta = \tan^{-1} \cdot (K_h) = \tan^{-1} \cdot (0.18) = 10.204^\circ$
 $w =$ Inclinación del terreno = 0°

Sustituyendo obtenemos $K_{AE} = 0.3952$

- b) Si en la ecuación anterior sustituimos $\theta = 0$ obtenemos, el empuje sin sismo,

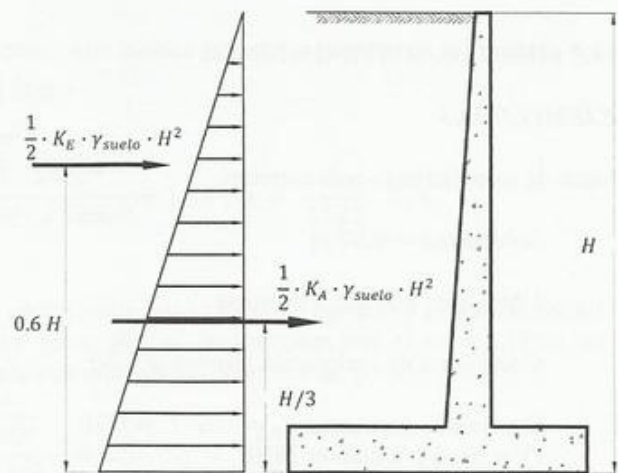


Fig. 14.9 Empujes sobre el muro

$$K_A = (1 - \sin \phi_{suelo}) / (1 + \sin \phi_{suelos}) = 0.2827 \text{ y para el sismo solo,}$$

$$K_S = K_{AE} - K_A = 0.3952 - 0.2827 = 0.1125$$

• Empuje sin sobrecarga (Figura 14.9)

$$E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \gamma_{suelo} \cdot H^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot 1800 \cdot 6^2 = 32400 \cdot K$$

$$E = 32400 \cdot K$$

El -E- de la tierra actúa a $H/3 = 2 \text{ m}$ de la base o punto A.

El E por sismo lo asumimos actuando a $0.6 \cdot H = 3.6 \text{ m}$ del punto B. (Seed y Whitman, 1970).

$$1) \text{ ESTÁTICO} \quad E_o = \frac{K_A}{0.2827} \cdot (32400) = 9160 \text{ kg} \Rightarrow M_{vo} = 18320 \text{ kg} \cdot m$$

$$2) \text{ DINÁMICO} \quad E_s = \frac{K_E}{0.1125} \cdot (32400) = 3645 \text{ kg} \Rightarrow M_{vs} = 13120 \text{ kg} \cdot m$$

$$E = (0.3952) \cdot (3240) = 12805 \text{ kg} \Rightarrow M_v = 31440 \text{ kg} \cdot m$$

El empuje total actúa a $\bar{y} = M_v/E = 2.4554 \text{ m}$ de la base, o sea: $0.4092 \cdot H$

Luego, para una profundidad $-Y-$ a partir del coronamiento, tenemos,

$$E_y = \left(\frac{K_{AE}}{0.3952/2} \right) \cdot (1800) \cdot Y^2 = 355.7 \cdot Y^2$$

$$M_y = (355.7) \cdot (0.4092) \cdot Y^3 = 145.6 \cdot Y^3$$

Y si consideramos separadamente las dos acciones, tenemos:

$$3) \text{ ESTÁTICO} \quad E_o = \left(\frac{K_A}{0.2827/2} \right) \cdot (1800) \cdot Y^2 = 254.5 \cdot Y^2$$

$$\Rightarrow M_{oy} = 254.5 \cdot Y^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot Y \right) = 84.8 \cdot Y^3$$

$$4) \text{ DINÁMICO} \quad E_s = \left(\frac{K_E}{0.1125/2} \right) \cdot (1800) \cdot Y^2 = 101.25 \cdot Y^2$$

$$\Rightarrow M_{sy} = 101.25 \cdot Y^2 \cdot (0.6 \cdot Y) = 60.8 \cdot Y^3$$

5) TOTAL

$$M_y = 101.25 \cdot Y^2 \cdot (0.6 \cdot Y) = 60.8 \cdot Y^3 + 84.8 \cdot Y^3 = 145.6 \cdot Y^3$$

• Empuje con sobrecarga

$$E = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \gamma_{suelo} \cdot H \cdot (H + 2 \cdot H_s) = 10991 \text{ kg}$$

$$M_v = \frac{1}{6} \cdot K \cdot \gamma_{suelo} \cdot H^2 \cdot (H + 3 \cdot H_s) = 23815 \text{ kg} \cdot m$$

Y para profundidad y en metros desde arriba,

$$E_y = (254.5) \cdot (Y) \cdot (Y + 1.20)$$

$$M_y = (84.8) \cdot (Y)^2 \cdot (Y + 1.80)$$

• Comprobación de la estabilidad

1) CON SISMO (Sin sobrecarga)

$$P_{\text{Total}} = 32670 \text{ kg}$$

$$M_{\text{Estabilizante}} = 79179 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Factores de seguridad,

$$FS_{\text{volcamiento}} = 79179/31440 = 2.52$$

$$FS_{\text{deslizamiento}} = (32670) \cdot (0.55)/12805 = 1.40$$

2) CON SOBRECARGA (Sin sismo)

$$FS_{\text{volcamiento}} = 86257/23815 = 3.62$$

$$FS_{\text{deslizamiento}} = (33316) \cdot (0.55)/10991 = 1.67$$

Los factores de seguridad al volcamiento y al deslizamiento son suficientes en ambos casos.

• Presiones sobre el terreno $\sigma_{\text{suelo}} = P/A \cdot (1 \pm 6 \cdot e/B) \leq 2 \text{ kg/cm}^2$

Ver Figura 14.10

$$A = \text{Área base} = 100 \cdot 390 = 39000 \text{ cm}^2$$

$$B = \text{Longitud de la base} = 390 \text{ cm}, B/6 = 65 \text{ cm}$$

e = Excentricidad de la resultante

P = Carga total/Base

1) CON SISMO (Sin sobrecarga)

$$e = B/2 - (M_e - M_v)/P$$

$$e = 1.95 - (79179 - 31440)/32670$$

$$e = 0.489 \text{ m} = 48.9 \text{ cm}$$

$$6 \cdot e/B = 0.752 \quad P/A = 0.8377$$

$$\sigma_A = (0.8377) \cdot (1.752) = 1.47 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = (0.8377) \cdot (0.248) = 0.21 \text{ kg/cm}^2$$

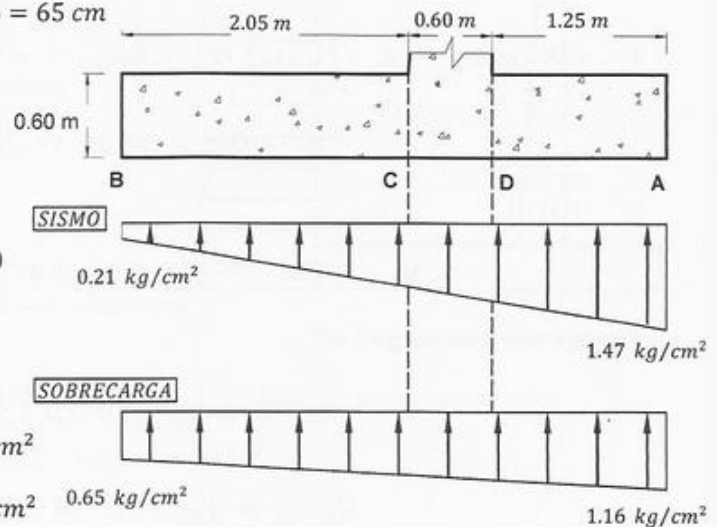


Fig. 14.10 Esfuerzos en el suelo

2) CON SOBRECARGA (Sin sismo)

$$e = 18.19 \text{ cm} \dots \dots \frac{P}{A} = 0.906 \dots \dots \sigma_A = 1.16 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \dots \dots \sigma_B = 0.65 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

• Cálculo de la base exterior

La base exterior (pie) es un volado sometido a una presión o carga hacia arriba (reacción del suelo) y al peso propio hacia abajo, predominando la relación del suelo. Está sometida a tracción en su cara inferior.

La condición más desfavorable corresponde al caso de sismo sin sobrecarga. Despreciamos el peso del relleno sobre el pie. $B_e = 1.25 \text{ m}$

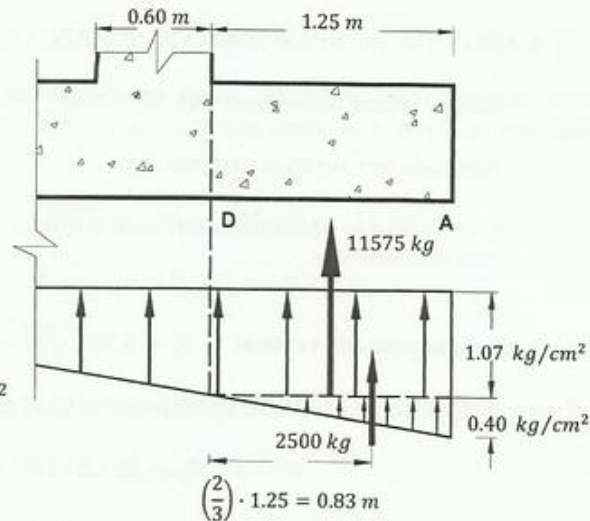
$$w_{\text{propio}} = (0.60) \cdot (2400) = 1440 \text{ kg/m}^2$$

1) SISMO SIN SOBRECARGA.

$$i = \frac{1.47 - 0.21}{3.90} = 0.323$$

$$\sigma_D = (2.65) \cdot i + 0.21 = 1.07 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$1.47 - 1.07 = 0.40 \text{ kg/cm}^2 = 4000 \text{ kg/m}^2$$



2) REACCIÓN TERRENO

Fig. 14.11 Esfuerzos sobre la base exterior (sismo sin sobrecarga)

Descomponemos en una carga uniforme constante y una triangular, y a la primera le restamos el peso propio de 1440 kg/m^2 .

$$\begin{aligned} (10700 - 1440) \cdot (1.25) &= 11575 \text{ kg} \\ (4000) \cdot (1.25)/2 &= 2500 \text{ kg} \\ &14075 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= (11575) \cdot (1.25/2) = 7234 \text{ kg} \cdot \text{m} \\ M &= (2500) \cdot (2.5/3) = 2084 \text{ kg} \cdot \text{m} \\ \Sigma M &= 9318 \text{ kg} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

• Base interior (Figura 14.12)

$$B_i = 2.05 \text{ m}$$

$$B_i/3 = 0.683$$

1) SISMO SIN SOBRECARGA

Carga vertical hacia abajo,
Reacción terreno sobre el pie ↓

$$(5.4) \cdot (1800) + 1440 = 11160 \text{ kg}$$

Recordemos que $i = 0.323$

$$\sigma_c = (2.05) \cdot i + 0.21 = 0.87 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$0.87 - 0.21 = 0.66 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

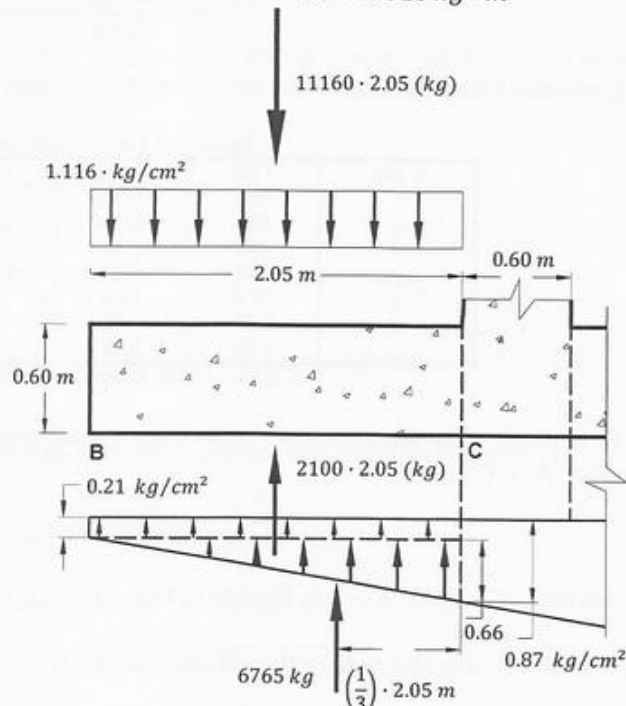


Fig. 14.12 Esfuerzos sobre la base interior (sismo sin sobrecarga)

$$(11160 - 2100) \cdot (2.05) = 18573 \text{ kg} \quad M = (18573) \cdot (1.025) = 19037 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$(6600) \cdot (2.05)/2 = 6765 \text{ kg} \quad M = (6765) \cdot (B_i/3) = 4623 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$= 11808 \text{ kg}$$

$$\Sigma M = 14414 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

2) CARGA TOTAL SIN SISMO CON SOBRECARGA

$$\text{Carga vertical hacia abajo} \downarrow (5.40 + 0.60) \cdot (1800) + 1440 = 12240 \text{ kg} \quad (\text{Hacia abajo})$$

$$\text{Reacción terreno en el extremo } B \uparrow = 6500 \text{ kg/m}^2 \quad (\text{Hacia arriba})$$

Como la carga hacia abajo será menor que 12240 $\downarrow -6500 \uparrow = 5740 \text{ kg/m}^2 \downarrow$ el caso con sismo es más desfavorable.

• **Cálculo de la pantalla vertical** $V_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \left(\frac{b}{100}\right) \cdot d = 768 \cdot d$

La condición más desfavorable corresponde al caso cuando actúa el sismo, ó sea para:

$$E_y = 355.8 \cdot Y^2 \quad y \quad M_y = 145.6 \cdot Y^3.$$

Si utilizamos para el efecto del sismo un factor de mayoración = 1 y para el empuje de tierras (estáticos) 1.60, tendremos un factor de seguridad:

Para $M \Rightarrow$

$$\frac{(1.60) \cdot (84.8) + 60.8}{145.6} = 1.361 \Rightarrow 1.4$$

Para $V \Rightarrow$

$$\frac{(1.60) \cdot (254.5) + 101.3}{355.8} = 1.44 \Rightarrow 1.5$$

Usaremos 1.5 en ambos casos.

Tabla 14.5 Diseño de la pantalla del muro

Y (m)	1.00	2.00	3.00	4.00	5.40
V	356	1423	3201	5691	10372
V_u	534	2134	4802	8538	15558
M	146	1165	3931	9318	23927
M_u/ϕ	243	1942	6552	15530	39878
d	22.4	29.8	37.2	44.6	55.0
A_s	0.25	1.56	4.25	8.48	17.95
$A_{s \text{ min}}$	4.93	6.27	7.60	8.93	10.8

V, V_u en kg, ... M, M_u en kg · m ... d en cm ... A_s en cm^2

El arranque de la pantalla para $Y = 5.40 \text{ m}$, el corte último que resiste el concreto es mucho mayor que el corte último,

$$\frac{\phi}{(0.75)} \cdot \frac{V_c}{(768) \cdot (55)} = 31680 \text{ kg} > \frac{V_u}{15558 \text{ kg}}$$

• **Aceros** $K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = (0.85) \cdot (210) \cdot (100) = 17850 \text{ kg/cm}$

$$a = d - \sqrt{d^2 - 200 \cdot \bar{M}_u / K} \dots [5.25]$$

$$A_s = K \cdot a / F_y = K \cdot a / 4200$$

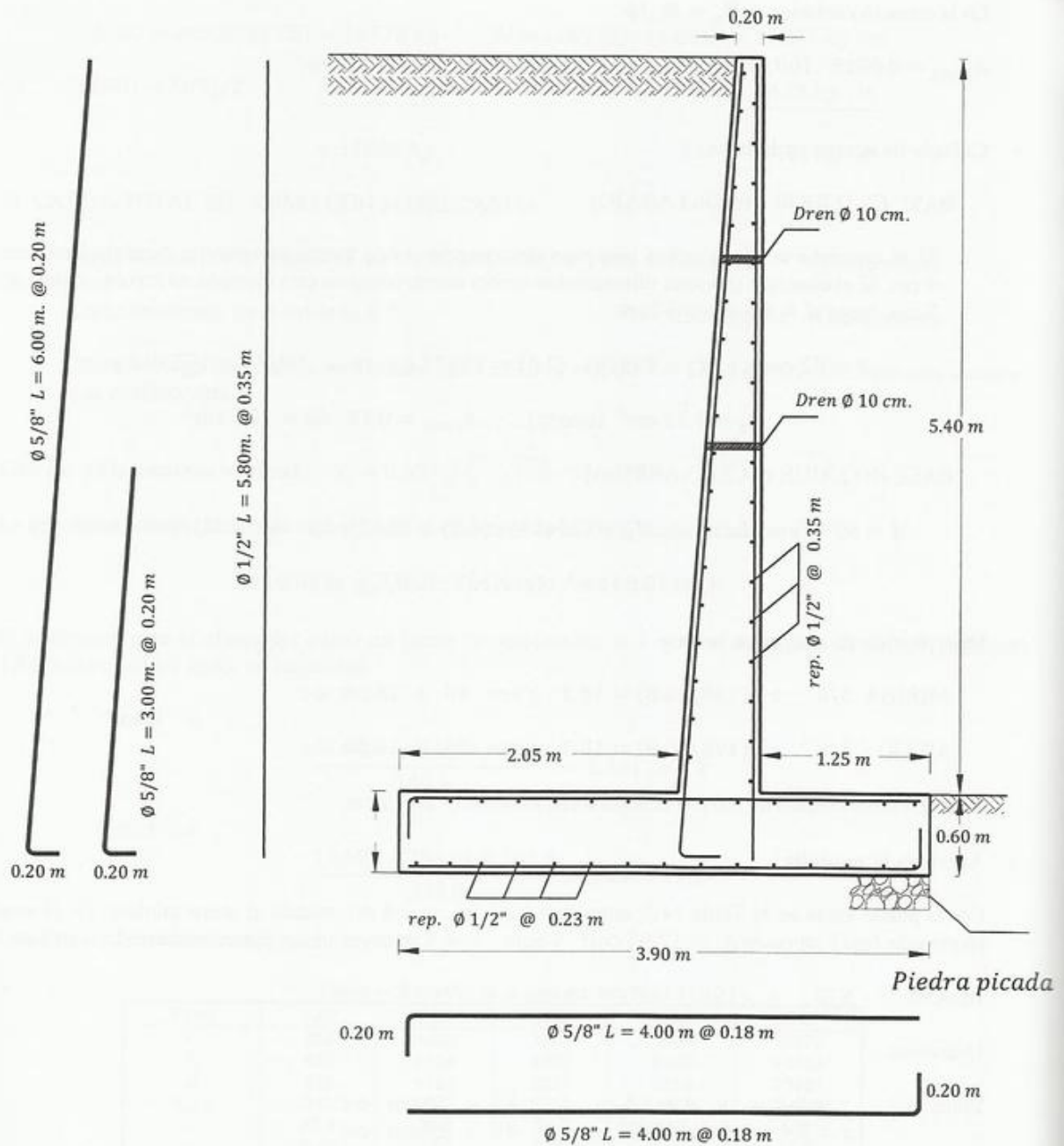


Fig. 14.13 Despiece del muro

Cómputos Métricos

Acero: 210 kg/ml

Concreto: $4.62 \text{ m}^3/\text{ml}$

Nota: Se deben canalizar las aguas provenientes de los drenes para evitar una posible socavación de la base exterior del muro.
Los drenes se colocarán cada 2 m² aprox.

En el concreto pre-esforzado aplicaremos fuerzas de compresión a los elementos mediante el uso de acero de alta resistencia. Generalmente la fuerza de tensado actúa con cierta excentricidad del centroide de la sección lo que hace posible aplicar momentos externos a la viga al hacer la operación del tensado. En Venezuela, los elementos pretensados más usados son las vigas de puentes con luces entre los 15-40 metros. Con el uso de vigas pretensadas se logran relaciones de esbeltez (largo/alto) por el orden de 20 para resistir pesadas cargas vehiculares. El avance del concreto pretensado se debe principalmente a los esfuerzos de varios ingenieros, entre los que destacan: Freyssinet, Magnel, Guyón, Abeles, Leonhardt y Lin, sin pretender que la lista sea completa. El contenido de este Capítulo se apoya principalmente en el tratado de Lin y Burns (1981) que es difícil de mejorar y el de Naaman (2004). El concreto pre-esforzado abarca piezas pretensadas y postensadas. El estudio ó análisis estructural de ambas alternativas es prácticamente idéntico excepto por el proceso constructivo, según se muestra en la Figura 15.1. La historia de esfuerzos en la viga se resume en la Figura 15.2. Es importante destacar que el diseño de piezas tensadas se hace en condiciones de servicio (con esfuerzos admisibles). Culminado el diseño se procede a verificar la resistencia última del elemento (Sección 15.7). En este capítulo nos centraremos en el diseño de vigas.

15.1 VENTAJAS DE LAS VIGAS PRE-ESFORZADAS

- Aprovechamiento de la resistencia a compresión del concreto para evitar que se generen grietas bajo cargas de servicio.
- Sin grietas bajo cargas de servicio, toda la sección transversal comprimida trabaja para resistir las fuerzas externas lográndose así el uso de secciones más pequeñas que su similar en concreto armado y por lo tanto más livianas y de más fácil manejo para construcción prefabricada.
- La ausencia de grietas disminuye considerablemente el peligro de corrosión de la armadura.
- La fuerza de pretensado disminuye la tensión diagonal en el alma y mejoran el comportamiento a corte del elemento.
- Posibilidad de lograr contra-flechas en la viga al momento de tensado y así disminuir e incluso eliminar las flechas producidas por su peso propio.
- Las vigas pretensadas diseñadas adecuadamente presentan un comportamiento dúctil en condiciones últimas.

15.2 DESVENTAJAS DE LAS VIGAS PRE-ESFORZADAS

- Requiere el uso de materiales de alta resistencia. Los concretos para vigas pretensadas alcanzan resistencia a compresión de hasta 500 kg/cm^2 y aceros que llegan a resistir 18900 kg/cm^2 .
- El proceso de tensado requiere el uso de equipo y personal especializado.
- Es poco eficiente para luces menores a los 10 m, por lo que resulta más conveniente el uso de vigas de concreto armado en luces cortas.

15.3 PÉRDIDAS DE LA FUERZA DE TENSADO

La fuerza inicial de tracción del cable medida en el gato de tensado (F_g) disminuye durante la operación de tensado a un valor por efecto de las pérdidas instantáneas a (F_i) y continua disminuyendo con el transcurrir del tiempo por efecto de las pérdidas a largo plazo hasta alcanzar un valor final ($F = \eta \cdot F_i$) donde η generalmente varía entre 0.70 y 0.90.

a) PÉRDIDAS INSTANTÁNEAS

Ocurren durante la operación de fabricación y tensado de la viga. Se pueden minimizar siendo cuidadosos en obra con el proceso constructivo. En vigas pretensadas las pérdidas instantáneas ocurren por: 1) relajación del acero y 2) acortamiento de la viga. En vigas postensadas: 1) por el acortamiento de la viga, 2) la fricción entre el cable de tensado y el ducto, y 3) las pérdidas ocurridas en el aparato de anclaje durante la operación de tensado (al trabar las cuñas).

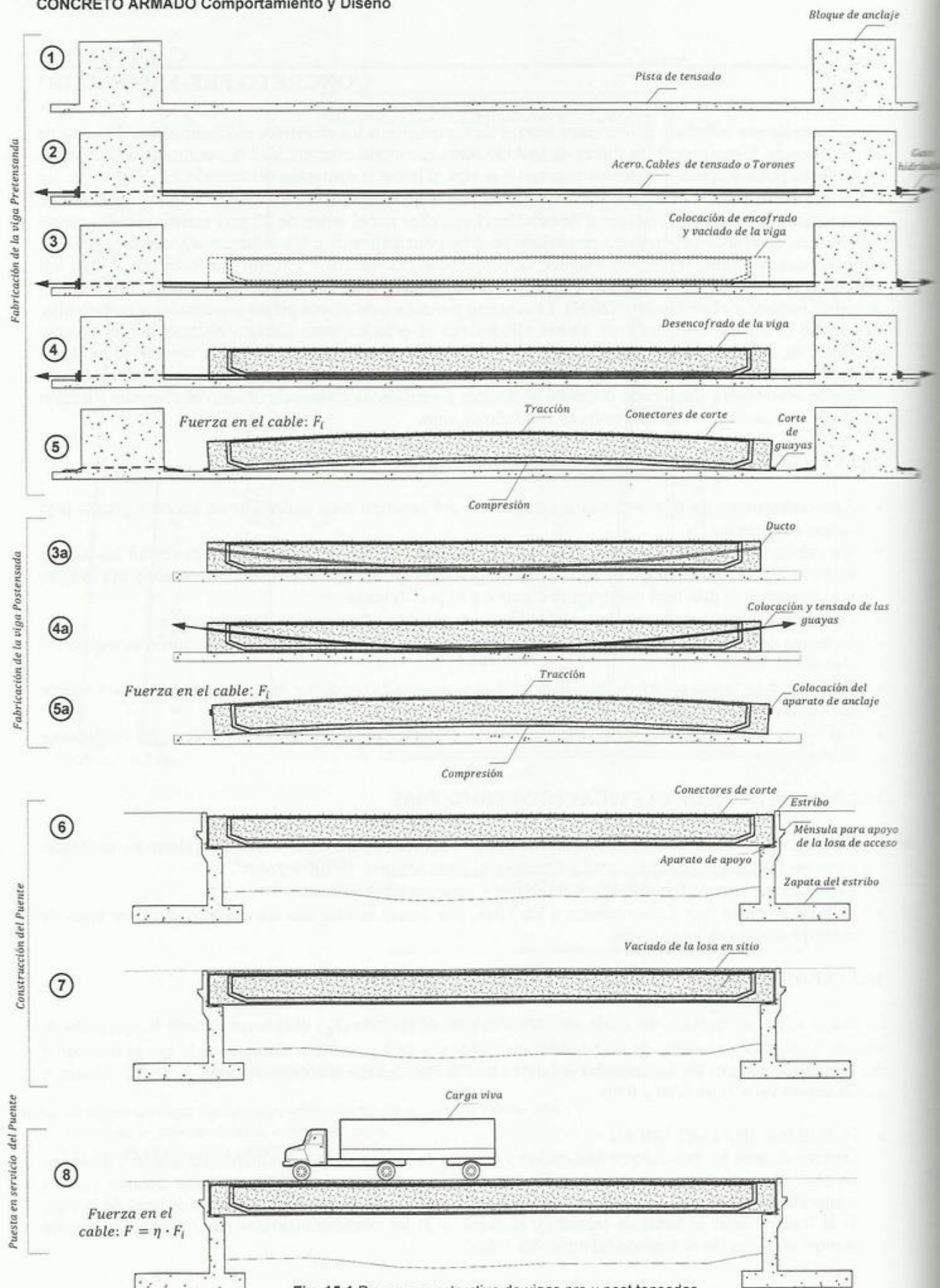
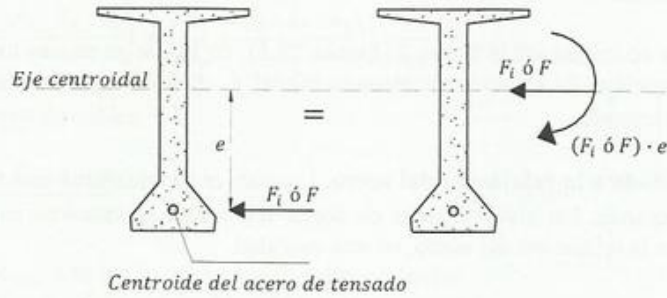
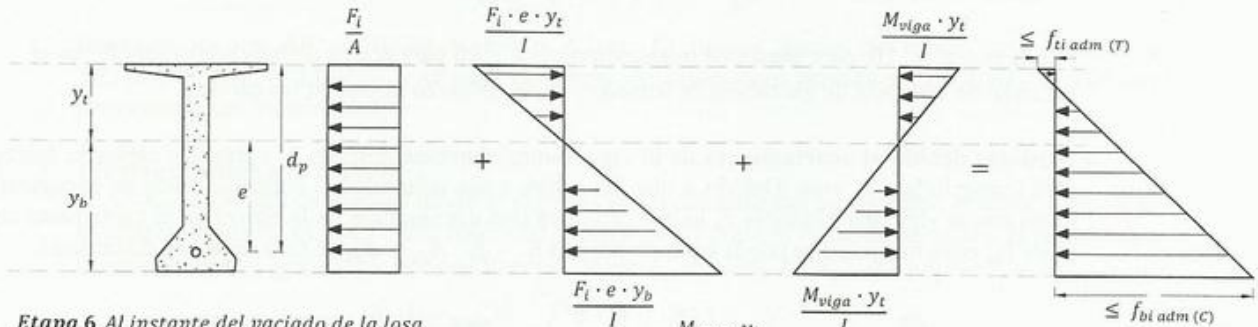


Fig. 15.1 Proceso constructivo de vigas pre y post tensadas

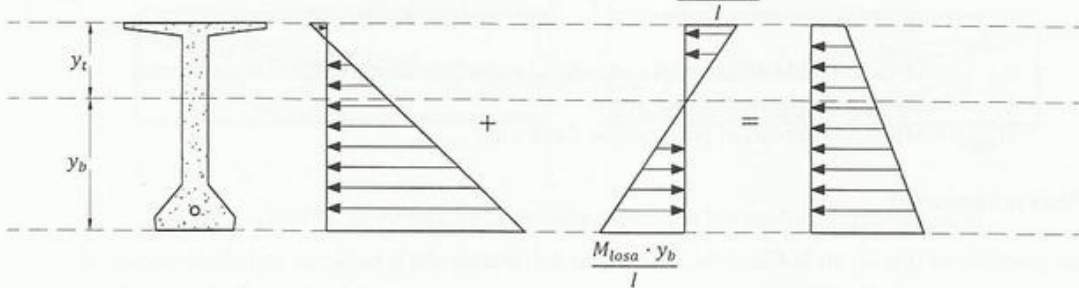
Efecto de la fuerza de tensado sobre la viga



Etapa 5 ó 5a. Al instante en que se transfiere la fuerza de tensado a la viga



Etapa 6. Al instante del vaciado de la losa



Etapa 7. Endurecido el concreto de la losa tenemos una sección compuesta de inercia I' . Colocaremos el pavimento, las barandas, y circulará el tráfico

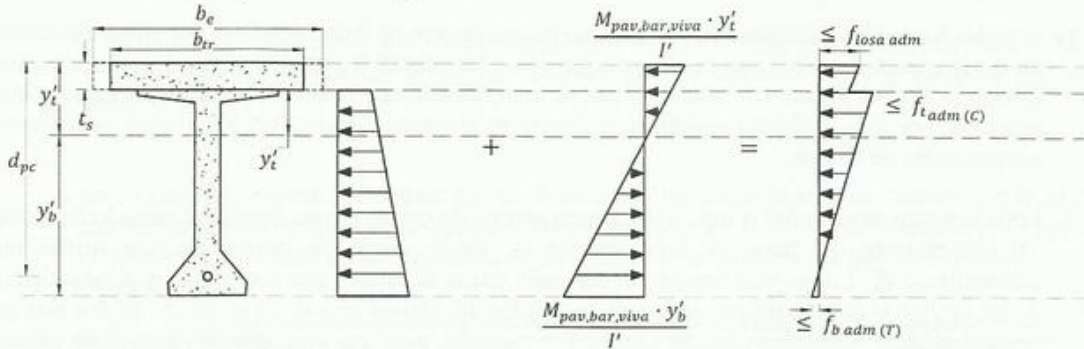


Fig. 15.2 Esfuerzos en la viga en las diferentes etapas constructivas y de servicio

Vigas pretensadas

Las pérdidas se inician en la Etapa 2 (Figura 15.1), en la que se tensan los cables y se anclan en los bloques de anclaje. El esfuerzo de tensado inicial $f_g \leq 0.70 \cdot f_{pu}$, donde f_{pu} es el esfuerzo último del acero de tensado.

- **Pérdidas debido a la relajación del acero.** Los cables se tensarán a una fuerza F_g . Luego se vaciará la viga pretensada. Un instante antes de cortar los cables su esfuerzo habrá disminuido a un valor (f_r) debido a la relajación del acero, en una cantidad,

$$\frac{f_r}{f_g} = 1 - \left(\frac{\log(t)}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{f_{pi}}{f_{py}} - 0.55 \right) \quad [15.1]$$

t en horas, $\alpha = 10$, para aceros de relajación normal y 40 para aceros de baja relajación. f_{py} es el esfuerzo de cedencia de los cables de tensado y f_{pi} el esfuerzo inicial en los cables.

- **Pérdidas debido al acortamiento de la viga.** Inmediatamente después de cortar los cables la fuerza será transmitida a la viga. Debido a que los cables están adheridos al concreto, estos se encogerán junto con la viga una distancia δ , lo que originará una disminución de la fuerza en el cable hasta un valor F_i , cuya magnitud se puede estimar. Siendo $F_r = f_r \cdot A_{ps}$ y A_{ps} el área del acero de tensado,

$$\Delta_p = \left[\left(\frac{F_r}{A_c} + \frac{F_r \cdot e^2}{I} \right) - \frac{M_{viga} \cdot e}{I} \right] \cdot \frac{E_s}{E_{ci}} \quad [15.2]$$

E_{ci} = Módulo de elasticidad del concreto al momento de transferencia de fuerzas

E_s = Módulo de elasticidad del acero

M_{viga} = Momento debido al peso propio de la viga

Vigas postensadas

Las pérdidas se inician en la Etapa 4a, al instante del tensado de la viga.

- **Pérdidas debido al acortamiento de la viga**

- 1) Si todos los cables o guayas son tensados simultáneamente no habrá pérdidas por el acortamiento de la viga, pues a medida que se aplica la tensión a los cables el gato de tensado reacciona contra la viga la cual se acorta. Un instante antes de completar la operación de tensado la viga se habrá acortado, por lo que el gato registrará la fuerza en el cable, esto es, luego de haber ocurrido el acortamiento de la viga.
- 2) En la práctica se usan dos o tres, hasta cuatro grupos de cables lo que impide el tensado de todos simultáneamente. Al tensar y luego anclar el primer grupo de cables, la viga sufrirá un acortamiento δ_1 . Luego será tensado el segundo grupo de cables que producirá un acortamiento δ_2 en la viga y destensará parcialmente los cables del primer grupo. El grupo de cables que se tense de último no sufrirá pérdida alguna. Por ejemplo, para una viga con tres grupos de cables que inicialmente se deben tensar a $F_1 = F_2 = F_3 = 100 \text{ ton c/u}$, Lin y Burns (1981) recomiendan calcular las pérdidas en el primer grupo de cables, debido al tensado del segundo y tercer grupo de cables usando la siguiente Ecuación aproximada,

$$\Delta F_1 = \left[\left(\frac{F_2}{A_c} + \frac{F_2 \cdot e_2 \cdot e_1}{I} \right) + \left(\frac{F_3}{A_c} + \frac{F_3 \cdot e_3 \cdot e_1}{I} \right) \right] \cdot \frac{E_s}{E_{ci}} \cdot A_{ps1} \quad [15.3a]$$

Para el segundo grupo de cables,

$$\Delta F_2 = \left[\left(\frac{F_3}{A_c} + \frac{F_3 \cdot e_3 \cdot e_2}{I} \right) \right] \cdot \frac{E_s}{E_{ci}} \cdot A_{ps2} \quad [15.3b]$$

$F_1 \dots F_3$ y $A_{ps1} \dots A_{ps3}$ son las fuerzas a las que desean tensar los cables y sus correspondientes áreas sin considerar las pérdidas.

Imaginemos que $\Delta F_1 = 10 \text{ ton}$ y $\Delta F_2 = 4 \text{ ton}$. El primer grupo de cables será tensado a $100 \text{ ton} + \Delta F_1 = 110 \text{ ton}$ y el segundo grupo de cables será tensado a $100 + \Delta F_2 = 104 \text{ ton}$ para compensar las pérdidas.

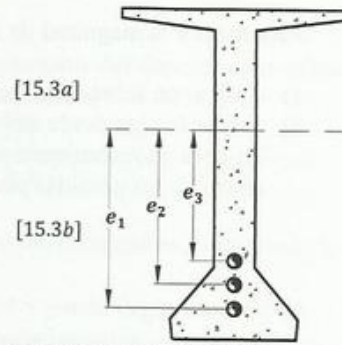


Fig. 15.3 Viga post-tensada con tres grupos de cables

• Pérdidas debido a la fricción

Al aplicar la fuerza de tensado desde el extremo izquierdo mientras se mantiene el cable anclado en el extremo derecho se genera una fuerza de fricción (ΔF_f) entre el cable de tensado y el ducto como se muestra en la Figura 15.4. Por equilibrio de fuerzas, $F_j = F_k + \Delta F_f$ ó $\Delta F_f = F_j - F_k$

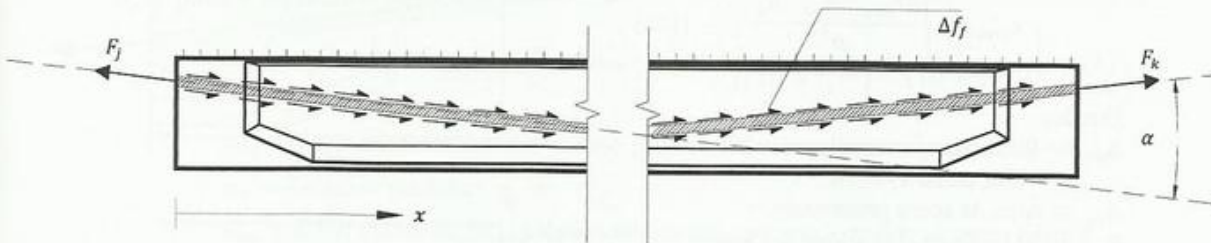


Fig. 15.4 Pérdidas de tensión debido a la fricción (vigas post-tensadas)

Se puede demostrar que (Lin y Burns 1981),

$$\Delta F_f = F_j \cdot (1 - e^{-\mu \cdot \alpha - K \cdot x}) \quad [15.4]$$

α en radianes, x en metros. μ y K son coeficientes de fricción angular y lineal. La tabla 5.9.5.2.2b - 1 del código AASHTO LRFD (2005) recomienda para ductos metálicos flexibles los siguientes valores,

$$K = 0.00066/m \quad \mu = 0.15 - 0.25/radian$$

La Figura 15.5 muestra la reducción en el esfuerzo del cable si este es tensado desde el extremo izquierdo. Por conveniencia, la disminución del esfuerzo en el cable mostrado en la Figura 15.5 se simplifica a una línea recta. En realidad, esta debería ser curva y su trayectoria es descrita por la Ecuación 15.4.

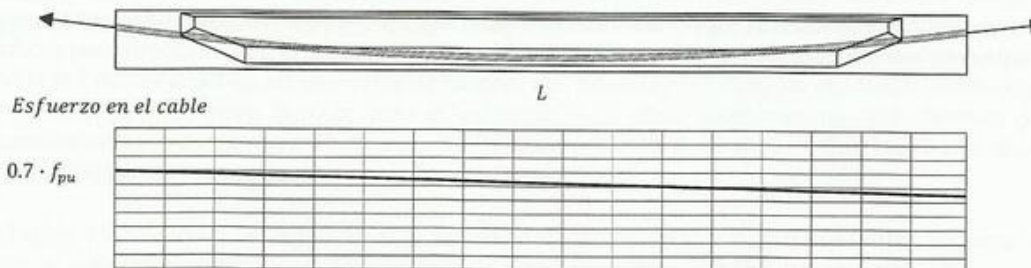


Fig. 15.5 Esfuerzos en el cable considerando las pérdidas por fricción (vigas postensadas)

Para reducir la magnitud de las pérdidas por fricción, Lin y Burns (1981) recomiendan,

- 1) Aplicar un sobre-tensado en los cables y volverlos a anclar nuevamente.
 - 2) Tensar la viga desde ambos extremos, preferiblemente de manera secuencial.
- En obra se recomienda monitorear la elongación del cable (Δ) durante el tensado considerando el efecto de las pérdidas por fricción. La elongación Δ o estiramiento del cable puede calcularse así,

$$\Delta = \frac{F_{promedio} \cdot L_{cable}}{A_{cables} \cdot E} \quad [15.5]$$

Para el caso de vigas postensadas desde un extremo con trayectorias de cables simétricas se puede aproximar,

$$F_{promedio} = F_{(x=L/2)}$$

• **Pérdidas en el aparato de anclaje**

Pérdidas en el tensado ocurren al instante de anclar los cables a los aparatos de anclaje. Una vez tensado el cable por el gato, es necesario dejar retrocederlo levemente para que una cuña los trabe. El efecto de este retroceso es que se invierte las fuerzas de fricción y disminuye la fuerza en el cable a lo largo de una distancia x_{anc} (Figura 15.6). Collins y Mitchell (1991) recomiendan,

$$x_{anc} = \sqrt{\frac{\Delta F_{anc} \cdot A_{ps} \cdot E_s}{\rho}} \quad [15.6]$$

Donde,

ΔF_{anc} = Retroceso para anclar el cable.
Valor usual 1/2 cm.

A_{ps} = Área de acero pretensado.

E_s = Módulo de elasticidad del acero.

ρ = Pérdida originada por fricción expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud.

La pérdida en unidades de fuerza es,

$$\Delta F_{anc} = 2 \cdot \rho \cdot x_{anc}$$

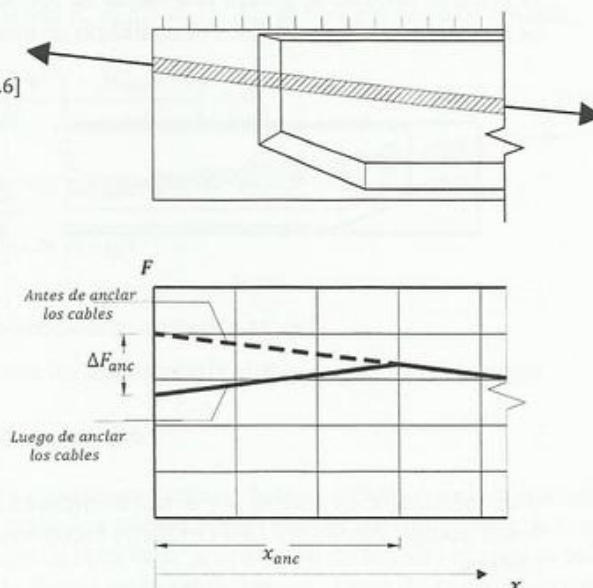


Fig. 15.6 Esfuerzos en el cable considerando las pérdidas en el aparato de anclaje (vigas post-tensadas)

b) **PÉRDIDAS DIFERIDAS**

Ocurren una vez fabricada la viga y son comunes para vigas pre y post-tensadas debido a, *Flujo plástico de concreto, retracción del concreto y relajación del acero* (Ecuación 15.1)

- **Pérdidas por retracción del concreto**

Las pérdidas de esfuerzo en el acero de tensado debido al encogimiento del concreto por efecto del flujo plástico en un intervalo de tiempo $t_i - t_j$ en días, son expresadas como,

$$\Delta f_{ps}(t_i, t_j) = E_s \cdot \varepsilon_{su} \cdot K_{sh} \cdot K_{ss} \cdot \frac{b \cdot (t_j - t_i)}{(b + t_i) \cdot (b + t_j)} \dots (a)$$

Donde,

$\Delta f_{ps}(t_i, t_j)$: Pérdidas de esfuerzo debidas a la retracción del concreto en el intervalo $t_i - t_j$.

E_s = Módulo de elasticidad del acero.

ε_{su} = Retracción última del concreto...varía entre 0.0004 y puede llegar hasta 0.001.

K_{sh} = Factor de corrección de retracción debido a la humedad relativa.

$K_{sh} = 1.4 - 0.01 \cdot H \dots H$ = humedad relativa en porcentaje.

K_{ss} : Factor de forma y tamaño de la retracción

$$K_{ss} = 1.14 - 0.09 \cdot \frac{V}{S}$$

$\frac{V}{S}$ = Relación volumen-superficie del miembro

b : parámetro $\rightarrow b = 35$ para curado con humedad, $b = 55$ para curado con vapor

- **Pérdidas por fluencia lenta o flujo plásticos (creep) del concreto**

Las pérdidas de esfuerzo en el acero debido al flujo plástico del concreto en un intervalo de tiempo $t_i - t_j$ pueden expresarse como,

$$\Delta f_{pc}(t_i, t_j) = n_p \cdot C_{cu} \cdot K_{ch} \cdot K_{ca} \cdot K_{cs} \cdot f_{cgs}(t_i) \left[\frac{t_j^{0.6}}{(10 + t_j^{0.6})} - \frac{t_i^{0.6}}{(10 + t_i^{0.6})} \right] \dots (b)$$

$\Delta f_{pc}(t_i, t_j)$: Pérdidas debidas al flujo plástico del concreto en el intervalo $t_i - t_j$

n_p = Relación modular: $n_p = \frac{E_s}{E_c}$

$C_{cu} \cong 2.50$: Factor de flujo plástico último del concreto...puede alcanzar hasta 3.

K_{ch} = Factor de corrección de flujo plástico debido a la humedad $K_{ch} = 1.27 - 0.0067 \cdot H$

K_{ca} = Factor debido al tiempo de carga

Para curado con humedad, $K_{ca} = 1.25 \cdot t_A^{-0.118}$

Para curado con vapor, $K_{ca} = 1.13 \cdot t_A^{-0.095}$

t_A = tiempo de carga en días

K_{cs} = Factor de forma y tamaño del flujo plástico

$$K_{cs} = 1.14 - 0.09 \cdot \frac{V}{S}$$

$f_{cgs}(t_i)$: Esfuerzo en el concreto alrededor del centroide del acero de preesfuerzo en el tiempo inicial debido a la fuerza de preesfuerzo y la carga muerta.

Los resultados arrojados por las ecuaciones a y b presentan gran variabilidad cuando se comparan con observaciones en el campo. Sin embargo a la fecha son las herramientas más convenientes para estimar las pérdidas por retracción y flujo plástico, a juicio del autor. Al emplear las ecuaciones se recomienda dividir la vida útil de la estructura en intervalos de tiempo. Por ejemplo: 1-7 días, los resultados obtenidos para el día siete se usarán como entrada para el intervalo 7-30 días; sucesivamente calcularemos para los intervalos comprendidos entre 30-90 días, 90-365 días, 365-1825 (5 años), 1825-18250 (50 años). Para mayor información recomendamos consultar (Naaman 2004).

La Figura 15.7 muestra la variación de la fuerza de tensado debido a las pérdidas diferidas para una viga típica, al considerar el efecto del flujo plástico, la retracción y flujo plástico del concreto.

Observaciones,

- Gran parte de las pérdidas ocurre en los primeros días luego de efectuado el tensado. Las pérdidas ocurridas a los 10 y 30 días son aproximadamente el 30% y 50% respectivamente del total de las pérdidas.
- Transcurridos 3 meses del tensado, las pérdidas alcanzan aproximadamente el 70% del total.
- Luego de 3 años podemos afirmar que para efectos prácticos no ocurrirán más pérdidas.

La magnitud de las pérdidas diferidas se disminuye con,

- El aumento de f'_c .
- El uso de aceros de baja relajación (*low - relaxation steel*).
- Un adecuado y generoso curado del concreto.
- El aumento de la humedad relativa del ambiente.

Estudios realizados por Naaman (2004) sugieren $\eta_{50 \text{ años}} \cong 0.80$ para $f'_c > 420 \text{ kg/cm}^2$. Si se emplean aceros de baja relajación $\eta_{50 \text{ años}} \cong 0.85$.

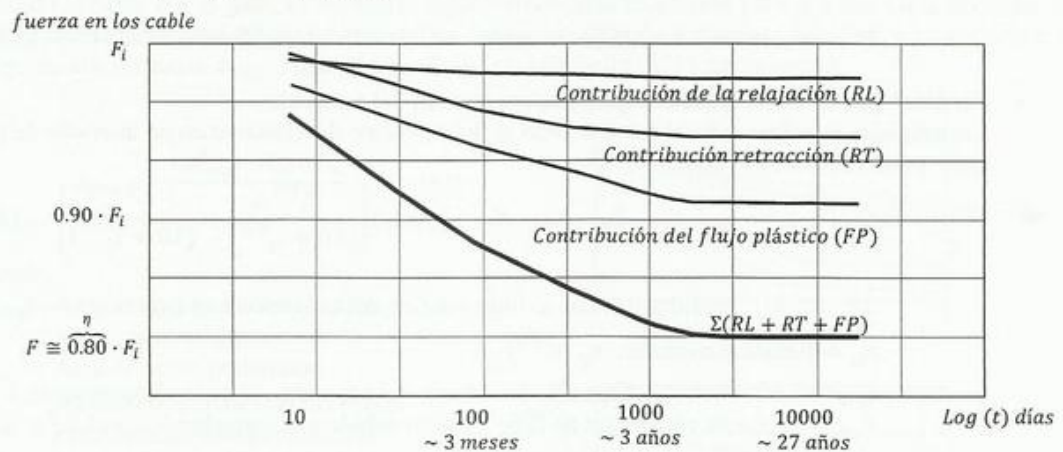


Fig. 15.7 Pérdidas del tensado vs. tiempo

Lectores interesados en profundizar el tema de pérdidas se les recomienda consultar Zia, Preston, Scott y Workman (1979)

EJEMPLO 15.1

Programar la operación de tensado para la siguiente viga. Datos de la viga,

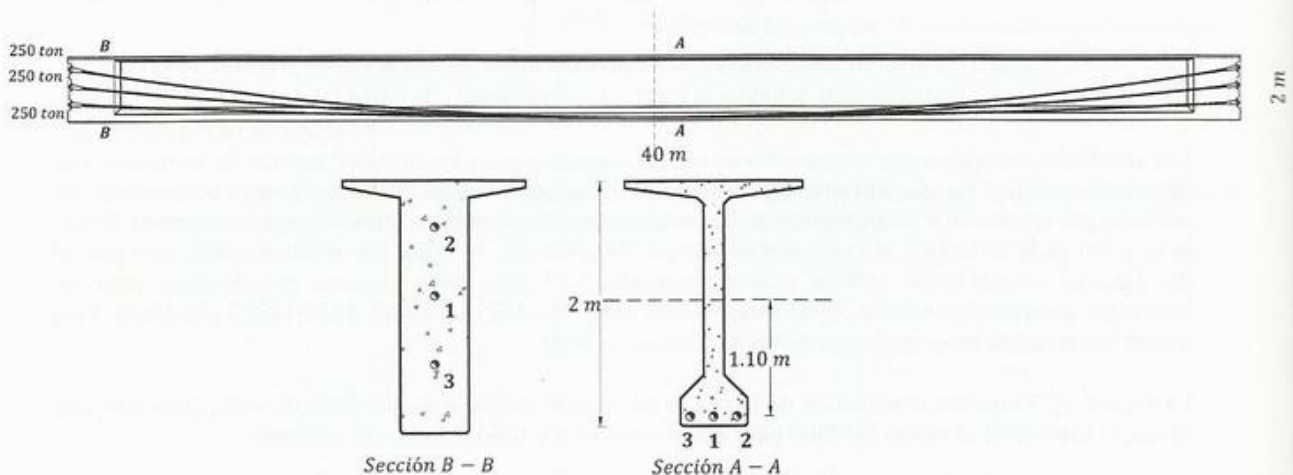


Fig. 15.8 Viga del Ejemplo 15.1.

Calcularemos las pérdidas en la sección AA.

Propiedades,

$$A_c = 7032 \text{ cm}^2 \quad I = 45702727 \text{ cm}^4 \quad \frac{E_s}{E_c} = 7 \quad f_{pu} = 18900 \text{ kg/cm}^2$$

En cada grupo de cables tenemos 19 torones de 1.0 cm^2 c/u para un total de 19 cm^2 .

El esfuerzo en los cables es de,

$$f_{ps} = \frac{250000}{19 \cdot 1.0} = 13158 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad (\cong 0.70 f_{pu})$$

Calcularemos las pérdidas por acortamiento de la viga

Asumiremos que no ocurren pérdidas por fricción. El orden de tensado será: 1-2-3. $A_{ps} = 19 \text{ cm}^2$

Aplicando la Ecuación 15.3b nos viene,

$$\Delta F_2 = \left[\left(\frac{250000}{7032} + \frac{250000 \cdot 110 \cdot 110}{45702727} \right) \right] \cdot 7 \cdot 19 \dots \dots \Delta F_2 = 13532 \text{ kg} \quad (5.4\%)$$

Para eliminar las pérdidas por acortamiento de la viga sobre-tensaremos el cable 2 la nueva fuerza de tensado será, (Ecuación 15.3a)

$$F_2 = 250000 + 13532 = 263532 \text{ kg}$$

$$\Delta F_1 = \left[\left(\frac{F_2}{A_c} + \frac{F_2 \cdot e_2 \cdot e_1}{I} \right) + \left(\frac{F_3}{A_c} + \frac{F_3 \cdot e_3 \cdot e_1}{I} \right) \right] \cdot \frac{E_s}{E_c} \cdot A_{ps1}$$

$$\Delta F_1 = \left[\left(\frac{263532}{7032} + \frac{263532 \cdot 110 \cdot 110}{45702727} \right) + \left(\frac{250000}{7032} + \frac{250000 \cdot 110 \cdot 110}{45702727} \right) \right] \cdot 7 \cdot 19$$

$$\Delta F_1 = 27796 \text{ kg} \quad (11.11\%)$$

Sobre-tensaremos el cable 1.

$$F_1 = 250000 + 27796 = 277796 \text{ kg}$$

Este valor debe ser comparado con el máximo permitido por el código. La mayoría de los códigos permite esfuerzos temporales de hasta $0.80 f_{pu}$. Tendríamos,

$$f_{ps1} = \frac{277796 \text{ kg}}{19 \text{ cm}^2} = 14620 \text{ kg/cm}^2 < 0.80 \cdot f_{pu} = 15120 \text{ kg/cm}^2. \quad O.K.$$

Calcularemos las pérdidas por fricción

Se calcularán las pérdidas en la mitad de la viga. Para calcular α , usaremos la trayectoria del cable intermedio y la asumiremos como representativa (Figura 15.9). Tendríamos,

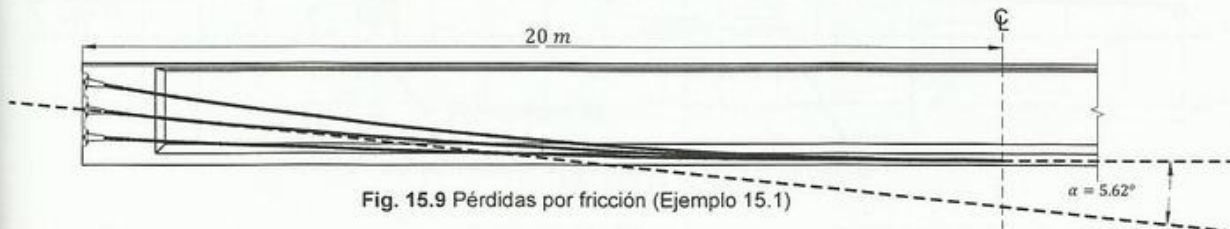


Fig. 15.9 Pérdidas por fricción (Ejemplo 15.1)

Al aplicar 15.4 nos queda,

$$F_{(x=\frac{L}{2}, \alpha)} = F_j \cdot \left(1 - e^{-\mu \cdot \frac{\pi}{2} - K \cdot x} \right) \dots \dots \Delta F_{fr(x=\frac{L}{2})} = 250000 \cdot (1 - e^{-0.20 \cdot 0.09810 - 0.00066 \cdot 20})$$

$$\Delta F_{fr(x=\frac{L}{2})} = 250000 \cdot (0.032) \dots \dots \Delta F_{fr(x=\frac{L}{2})} = 8000 \text{ kg } (\cong 0.02 f_{pu})$$

En la mitad de la viga tendríamos un esfuerzo en los cables de aproximadamente: $\cong 0.68 f_{pu}$

En el extremo derecho los esfuerzos estarían por el orden de: $\cong 0.66 f_{pu}$

Calcularemos el estiramiento esperado en los cables

Al emplear 15.5 nos viene,

$$\Delta = \frac{F_{promedio} \cdot L_{cable}}{A_{cables} \cdot E} \dots \dots F_{promedio} = 250000 - 8000 = 242000 \text{ kg}$$

$$\Delta = \frac{242000 \cdot 40 \cdot 10^2}{19 \cdot 2.1 \cdot 10^6} \cong 24.26 \text{ cm}$$

Si la elongación en los cables obtenida en campo al momento del tensado es considerablemente menor a la calculada, es probable que los cables estén atascados dentro de la viga.

Calcularemos las pérdidas en el aparato de anclaje

Las pérdidas por unidad de longitud en cada grupo de cables,

$$\rho = \frac{8000 \text{ kg}}{20 \text{ m}} = 400 \frac{\text{kg}}{\text{m}} = 4.00 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

Al aplicar 15.6,

$$X_{anc} = \sqrt{\frac{\Delta_{anc} \cdot A_{ps} \cdot E_p}{\rho}} \dots \dots X_{anc} = \sqrt{\frac{0.50 \cdot 19 \cdot 2.1 \cdot 10^6}{4.00}} = 2233.3 \text{ cm}$$

$$\Delta F_{anc} = 2 \cdot \rho \cdot X_{anc} = 2 \cdot 4.00 \cdot 2233.3 = 17866 \text{ kg } (\cong 0.05 f_{pu}) \text{ (Figura 15.10)}$$

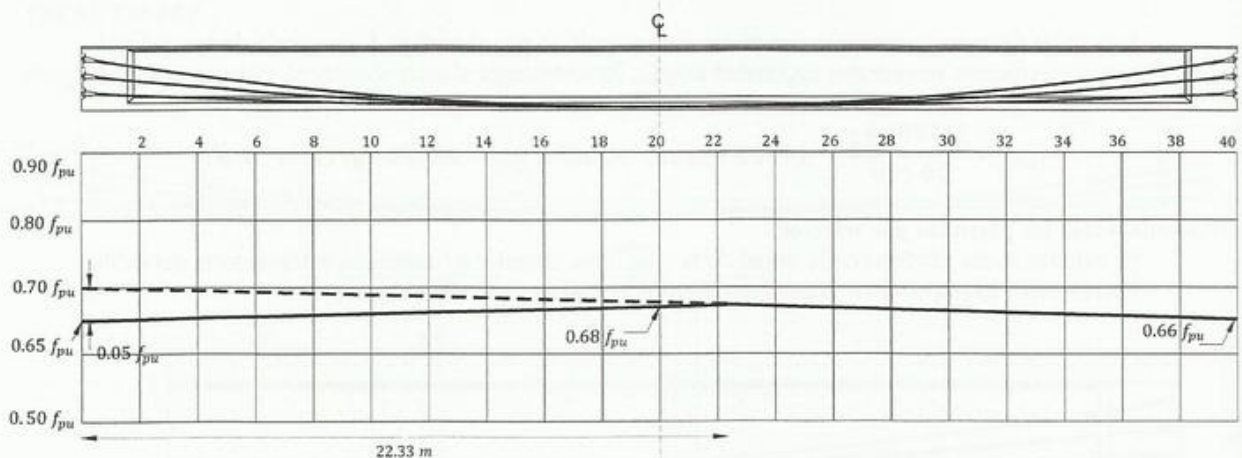


Fig. 15.10 Pérdidas en el aparato de anclaje (Ejemplo 15.1)

15.4 DISEÑO DE SECCIONES SIN PERMITIR TRACCIONES EN EL CONCRETO

El procedimiento para el diseño que se presenta a continuación es el recomendado por Lin y Burns (1981). Empezaremos por calcular la altura h de la viga que se puede estimar preliminarmente de acuerdo a,

$$h = k \cdot \sqrt{M_{max}} \quad [15.7]$$

h es expresada en centímetros, M_{max} debe estar en ton-m, y k varía entre 6 y 8.

a) NÚCLEO DE SECCIÓN

Calcularemos las distancias que definen el núcleo de sección superior e inferior, k_t y k_b , respectivamente, en los que debe actuar la fuerza resultante de compresión para que no se generen tracciones en la sección transversal (Figura 15.11).

$$\frac{F}{A} - \frac{F \cdot k_b \cdot y_t}{I} = \sigma = 0 \dots \dots \dots k_b = \frac{I}{y_t \cdot A} = \frac{r^2}{y_t}$$

De manera similar tendríamos para $\sigma = 0$ en las fibras inferiores extremas,

$$k_t = \frac{r^2}{y_b}$$

El diseño de vigas pretensadas esta generalmente dominado por la Etapa 5 o por la Etapa 8 (Figura 15.1 y 15.2).

b) ESTIMACIÓN PRELIMINAR DE LA FUERZA DE TENSADO

- El diseño quedará dominado por la etapa 5 (ó 5a) si la relación M_{min}/M_{max} es baja, digamos menor que 0.20 ~ 0.30. En este caso tendremos la máxima fuerza de tensado actuando en la viga F_i (pues no han ocurrido las pérdidas diferidas) junto con el momento externo mínimo M_{min} , que generalmente es igual al producido por el peso propio del elemento. Al instante de transferir las fuerzas de tensado y bajo la acción del M_{min} la excentricidad de C medida desde el baricentro de la sección no puede ser mayor que k_b , y bajo la acción de M_{max} la excentricidad no puede ser mayor que k_t . Por lo tanto, el incremento de momentos de M_{min} a M_{max} será resistido por un brazo de palanca de $k_b + k_t$ (Figura 15.11a). La fuerza de tensado F luego de ocurridas las pérdidas será de,

$$C = F = \frac{M_{max} - M_{min}}{k_b + k_t} \quad [15.8a]$$

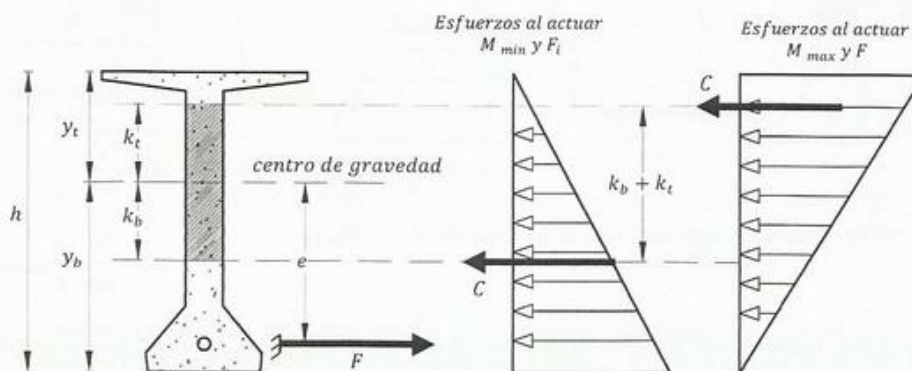


Fig. 15.11a Núcleo de sección

El término $k_b + k_t$ es en promedio igual a $0.50 \cdot h$ y varía entre $0.43 \cdot h$ y $0.54 \cdot h$ para la mayoría de las secciones de viga usadas en puentes en Venezuela.

- Si la relación entre M_{min}/M_{max} es grande, y digamos que supera aproximadamente 0.30, el diseño de la viga estará dominado por M_{max} (Etapa 8, Figura 15.1), debido a que al instante de transferencias de fuerzas es muy probable que el brazo de palanca ubique a C por dentro del núcleo de sección (Figura 15.11b). En la etapa 8 tendremos la mínima fuerza de tensado F , luego de ocurridas las pérdidas, que actúan en combinación con los momentos máximos en la viga. La fuerza de tensado estaría dada por,

$$F = \frac{M_{max}}{e + k_t} \quad [15.8b]$$

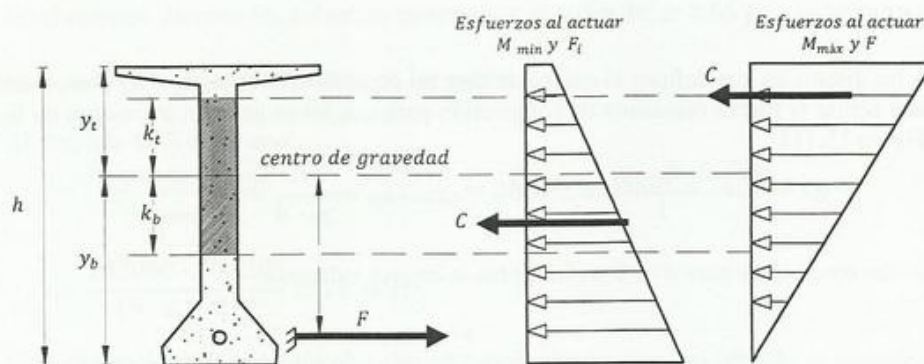


Fig. 15.11b Núcleo de sección

El término $(e + k_t)$ se puede asumir como $(e + k_t = 0.67 \cdot h)$ en la fase preliminar del diseño.

c) ESTIMACIÓN PRELIMINAR DE LA EXCENTRICIDAD Y ÁREA DE LA SECCIÓN REQUERIDA AL INSTANTE DE LA TRANSFERENCIA

Al instante de la transferencia de fuerzas tendremos la máxima fuerza F_i de tensado actuando en conjunto con el peso propio del elemento, que por lo general produce los momentos mínimos (M_{min}) a los que la estructura estará sujeta. En este caso tendríamos,

$$e = a_i + k_b \quad [15.9a]$$

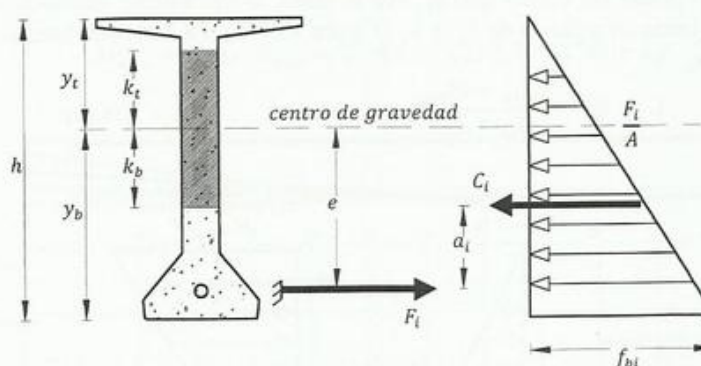


Fig. 15.12 Diseño de vigas para relaciones bajas de M_{min}/M_{max} (Diseño dominado por M_{min})

Equilibrio de fuerzas internas con momentos externos:

$$M_{min} = C_i \cdot a_i = F_i \cdot a_i$$

$$\therefore a_i = \frac{M_{min}}{F_i}$$

Por relación de triángulos (Figura 15.12)

$$f_{bi} = \frac{F_i}{A} \cdot \frac{h}{y_t} \quad \therefore$$

$$A = \frac{F_i}{f_{bi}} \cdot \frac{h}{y_t} \quad [15.10a]$$

Pudiese ocurrir que a_i fuese mayor que el e disponible en la viga (si M_{min}/M_{max} es grande) o que decidamos utilizar una excentricidad menor que $a_i + k_b$ (Figura 15.13). En ambos casos se tiene,

$$a_i = \frac{M_{min}}{T_i} > e_{asumida}$$

Al instante en que se transfieran las fuerzas a la viga tendríamos,

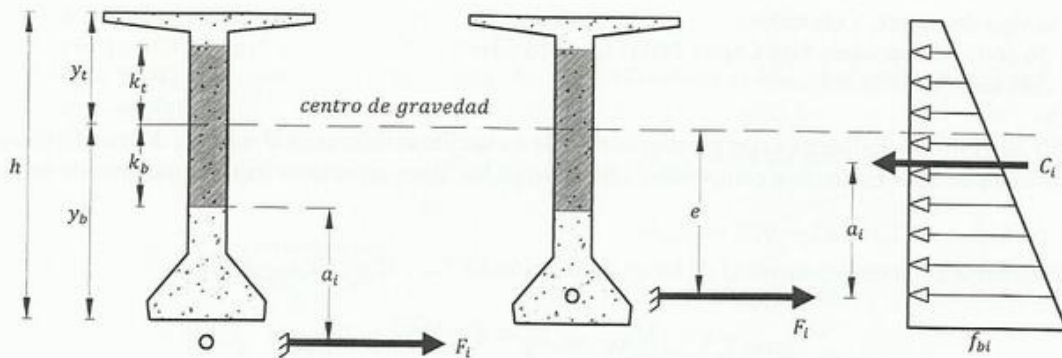


Fig. 15.13 Diseño de vigas para relaciones altas de M_{min}/M_{max}
(Diseño dominado por M_{min})

$$f_{bi} = \frac{C_i}{A} + \frac{C_i \cdot (e - a_i) \cdot y_b}{I} \Rightarrow \overbrace{C_i = F_i}^{\text{equilibrio fuerzas horizontales}} \Rightarrow A = \frac{F_i}{f_{bi}} \cdot \left[1 + \frac{e - M_{min}/F_i}{k_t} \right] \quad [15.10b]$$

d) ESTIMACIÓN PRELIMINAR DEL ÁREA DE LA SECCIÓN REQUERIDA BAJO CONDICIONES DE SERVICIO

Bajo condiciones de servicio tendremos la mínima fuerza de tendado luego de ocurridas las pérdidas ($F = \eta \cdot F_i$), que actúa en combinación con los momentos máximos (M_{max}), que incluyen por ejemplo en el caso de puentes, las cargas vivas (Figura 15.14).

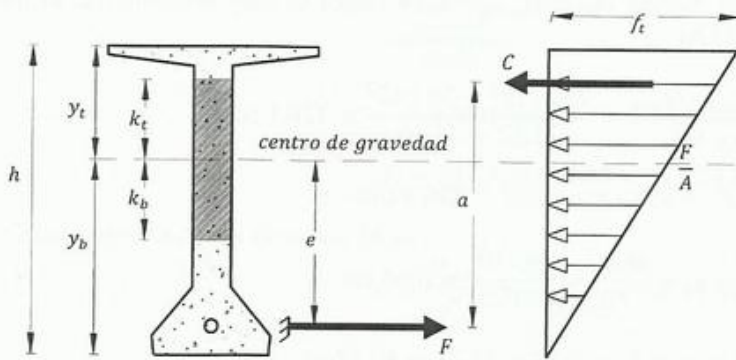


Fig. 15.14 Diseño dominado por M_{max}

$$a = e + k_t$$

Equilibrio de fuerzas internas con momentos externos,

$$M_{max} = C \cdot a = F \cdot a$$

$$F = \frac{M_{max}}{a} = \frac{M_{max}}{e + k_t}$$

$$f_t = \frac{F}{A} \cdot \frac{h}{y_b} \quad \therefore$$

$$A = \frac{F}{f_t} \cdot \frac{h}{y_b} \quad [15.10c]$$

Observaciones

En el concreto pretensado los incrementos de momentos externos (M_{min} a M_{max}) son resistidos principalmente por el incremento del brazo de palanca entre C y T , que permanecen casi inalterados en magnitud. En cambio en el concreto armado, los incrementos de momentos son resistidos principalmente por el aumento de C y T pues el brazo de palanca aumenta poco.

EJEMPLO 15.2

Diseñar la viga de puente. Conocidos,

$M_{min} = 34 \text{ ton} \cdot \text{m}$ -para una viga Cagua 140 (Figura 15.15)-

$M_{max} = 250 \text{ ton} \cdot \text{m}$

$\eta = 0.83$

$f_{bi} = 230 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow$ Esfuerzo a compresión admisible en las fibras inferiores al instante de transferencias

$f_t = 170 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow$ Esfuerzo a compresión admisible en las fibras superiores bajo condiciones de servicio

- Verificaremos el orden de magnitud de h con la ecuación 15.7.... $M_{min}/M_{max} = 0.14$.

$$h_{(cm)} = k \cdot \sqrt{M_{max} \text{ (ton} \cdot \text{m)}} = 8 \cdot \sqrt{250} = 126 \text{ cm.}$$

Asumiremos: $h = 140 \text{ cm}$. O.K viga asumida.

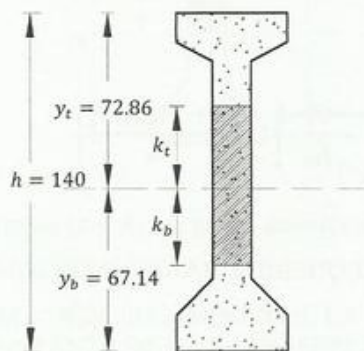


Fig. 15.15 Viga CAGUA 140 del Ejemplo 15.2

- Propiedades de la viga Cagua-140,

$$A = 3395 \text{ cm}^2$$

$$I = 7809262 \text{ cm}^4$$

$$y_t = 72.86 \text{ cm}$$

$$y_b = 67.14 \text{ cm}$$

- Calcularemos el núcleo de sección:

$$k_b = \frac{I}{y_t \cdot A} = \frac{7809262}{72.86 \cdot 3395} = 31.57 \text{ cm}$$

$$k_t = \frac{I}{y_b \cdot A} = \frac{7809262}{67.14 \cdot 3395} = 34.26 \text{ cm}$$

- Estimaremos la fuerza de tensado. Siendo $M_{min}/M_{max} = 0.14$ (bajo) es muy probable que el diseño quedo dominado por la Ecuación 15.8a

$$F = \frac{M_{max} - M_{min}}{k_b + k_t} = \frac{250 \cdot 10^2 - 34 \cdot 10^2}{31.57 + 34.26} \cong 328.1 \text{ ton}$$

$$F_i = 328.1 \text{ ton} / 0.83 = 395.3 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

- Calcularemos e ,

$$a_i = \frac{M_{min}}{F_i} = \frac{34 \cdot 10^2}{395.3} = 8.60 \text{ cm}$$

Aplicando la Ecuación 15.9a

$$e = a_i + k_b = 8.60 + 31.57 = 40.17 \text{ cm}$$

- Verificaremos el área para que no se excedan los esfuerzos admisibles a compresión en el concreto, con las ecuaciones 15.10a y 15.10c.

$$\text{Transferencia (abajo } \downarrow) \dots A = \frac{F_i}{f_{bi}} \cdot \frac{h}{y_t} = \frac{395.3 \cdot 10^3}{230} \cdot \frac{140}{72.86} = 3302 \text{ cm}^2 < 3395 \text{ cm}^2 \text{ O.K}$$

$$\text{Servicio (arriba } \uparrow) \dots A = \frac{F}{f_t} \cdot \frac{h}{y_b} = \frac{328.1 \cdot 10^3}{170} \cdot \frac{140}{67.14} = 4024 \text{ cm}^2 > 3395 \text{ cm}^2$$

\therefore debemos usar una sección con más área usaremos viga Cagua 142

- Propiedades de la viga *Cagua* – 142 (Figura 15.16),

$$\begin{aligned} A &= 4324 \text{ cm}^2 \\ I &= 10470973 \text{ cm}^4 \\ y_t &= 79.92 \text{ cm} \\ y_b &= 62.08 \text{ cm} \end{aligned}$$

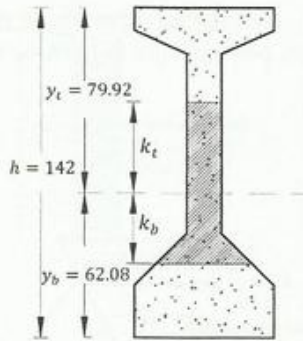


Fig. 15.16 Viga CAGUA 142 del Ejemplo 15.2

- Encontraremos el M_{min} por proporcionalidad:

$$M_{min} = 34.00 \text{ ton} \cdot \text{m} \cdot \frac{4324 \cdot \text{cm}^2}{3395 \cdot \text{cm}^2} = 43.30 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{max} = 250 - 34 + 43.30 = 259.30 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{min}/M_{max} = 0.17$$

- Calcularemos el núcleo de sección:

$$k_b = \frac{I}{y_t \cdot A} = \frac{10470973}{79.92 \cdot 4324} = 30.30 \text{ cm}$$

$$k_t = \frac{I}{y_b \cdot A} = \frac{10470973}{62.08 \cdot 4324} = 39.00 \text{ cm}$$

Estimaremos la fuerza de tensado. Debido a que $M_{min}/M_{max} = 0.17$ es próximo a 0.20, verificaremos la fuerza de tensado necesaria con las ecuaciones 15.8a y 15.8b,

$$F = \frac{M_{max} - M_{min}}{k_b + k_t} = \frac{259.3 \cdot 10^2 - 43.30 \cdot 10^2}{30.30 + 39.00} \cong 311.7 \text{ ton}$$

$$F = \frac{M_{max}}{\underbrace{e + k_t}_{\substack{\text{asumiremos:} \\ 0.67 \cdot h}}} = \frac{259.3 \cdot 10^2}{0.67 \cdot 140} \cong 276.4 \text{ ton}$$

$$\therefore \text{asumiremos } F = 311.7 \text{ ton}$$

$$F_i = 311.7 \text{ ton} / 0.83 = 375.54 \text{ ton}$$

- Calcularemos e con la Ecuación 15.9a

$$a_i = \frac{M_{min}}{F_i} = \frac{43.30 \cdot 10^2}{375.5} = 11.53 \text{ cm}$$

$$e = a_i + k_b = 11.53 + 30.30 = 41.83 \text{ cm} < (67.14 \text{ cm} - \overbrace{\text{recubrimiento}}^{\text{referido al centroide del acero de tensado}}) \text{ O.K}$$

- Verificaremos el área para que no se excedan los esfuerzos admisibles (15.10a y 15.10c)

$$\text{Transferencia (abajo } \downarrow) \dots A = \frac{F_i}{f_{bt}} \cdot \frac{h}{y_t} = \frac{375.5 \cdot 10^3}{230} \cdot \frac{142}{79.92} = 2900 \text{ cm}^2 < 4324 \text{ cm}^2 \text{ O.K}$$

$$\text{Servicio (arriba } \uparrow) \dots A = \frac{F}{f_t} \cdot \frac{h}{y_b} = \frac{311.7 \cdot 10^3}{170} \cdot \frac{142}{67.14} = 3877 \text{ cm}^2 < 4324 \text{ cm}^2 \text{ O.K} \blacksquare$$

15.5 DISEÑO DE SECCIONES DE CONCRETO PRETENSADO ADMITIENDO TRACCIONES EN EL CONCRETO

Los códigos de diseño permiten tomar ventaja de la resistencia a tracción del concreto y admiten esfuerzos de tracción en las secciones de las vigas. De esta forma es posible lograr secciones más económicas si se comparan con aquellas en las solo se permite la compresión.

a) ESTIMACIÓN PRELIMINAR DE LA EXCENTRICIDAD Y ÁREA DE LA SECCIÓN REQUERIDA AL INSTANTE DE TRANSFERENCIA

Al admitir esfuerzos de tracción en el concreto de magnitud f_{ti} (arriba) al instante de transferir las fuerzas en una viga donde no hay momentos externos aplicados, es posible bajar la línea de acción de C_i una distancia e_1 con respecto al núcleo de sección (Figura 15.17).

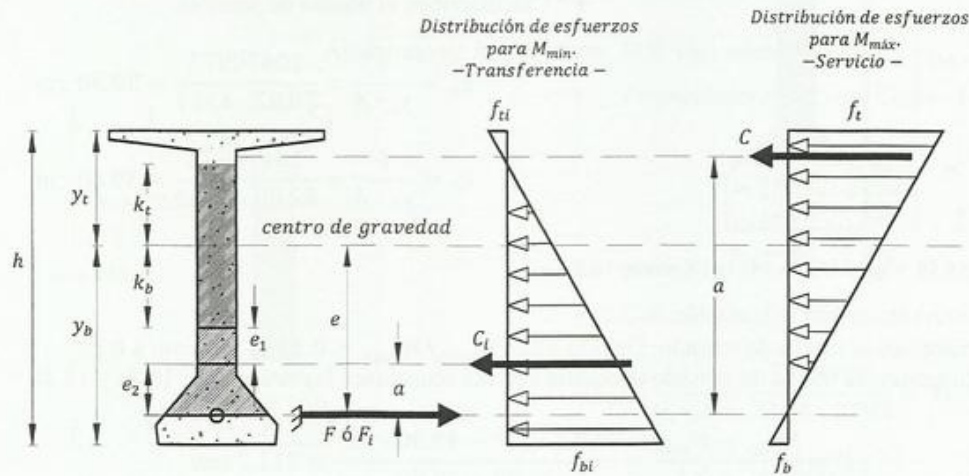


Fig. 15.17a Diseño de vigas admitiendo tracciones en el concreto

$$e_1 = \frac{f_{ti} \cdot I}{F_i \cdot y_t} = \frac{f_{ti} \cdot A \cdot k_b}{F_i} \quad [15.11]$$

Al aplicar momentos externos M_{min} , es posible bajar aún más la línea de acción de C_i una distancia e_2

$$e_2 = \frac{M_{min}}{F_i}$$

Por lo que es posible bajar la línea de acción de C_i una distancia total de,

$$e_1 + e_2 = \frac{M_{min} + f_{ti} \cdot A \cdot k_b}{F_i} \quad [15.12a] \rightarrow \quad e = (k_b + e_1 + e_2) \quad [15.9b] \rightarrow \quad \overbrace{\widehat{a_i} = e_2}^{\text{ver Fig.15.12}}$$

La magnitud de F_i puede estimarse con las ecuaciones 15.8a y 15.8b.

El máximo valor de las tracciones que se le permite resistir al concreto al instante de las transferencias, f_{ti} (arriba) y compresiones f_{bi} (abajo), está limitado por el código de diseño. El área de concreto requerida para no sobrepasar los esfuerzos de compresión al instante de transferencia de las fuerzas, siendo,

$$f_{bi} = \frac{F_i \cdot h}{A \cdot y_t} + f_{ti} \cdot \frac{y_b}{y_t} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F_i \cdot h}{\underbrace{f_{bi} \cdot y_t - f_{ti} \cdot y_b}_{\substack{\text{si la excentricidad asumida} \\ \text{es menor que } k_b + e_1 + e_2 \\ \text{se debe usar la Ec.15.10b}}}} \quad [15.10d]$$

b) ESTIMACIÓN PRELIMINAR DE LA FUERZA DE TENSADO Y AREA DE LA SECCIÓN REQUERIDA EN CONDICIONES DE SERVICIO

La distribución de esfuerzos del extremo derecho (bajo condiciones de servicio) de la Figura 15.17a puede reemplazarse por la que se indica en la Figura 15.17b,

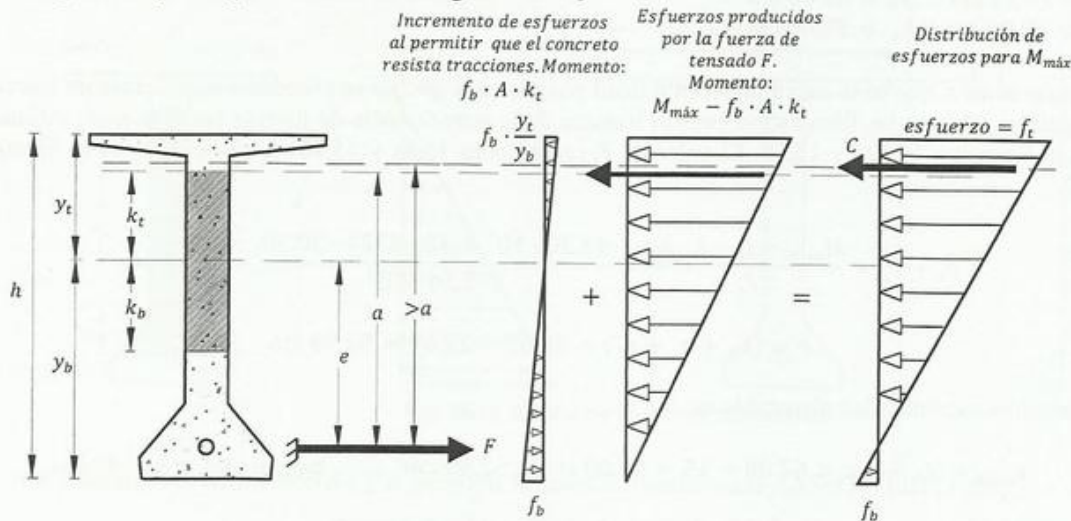


Fig. 15.17b Diseño de vigas admitiendo tracciones en el concreto

El momento resistido por la distribución de esfuerzos al permitir que el concreto resista tracciones vale,

$$\frac{f_b \cdot y_b}{I} \quad \text{ó} \quad f_b \cdot A \cdot k_t$$

Por equilibrio de fuerzas internas y externas, la fuerza de tensado debe resistir un momento de (Figura 15.17b),

$$M_{m\acute{a}x} - f_b \cdot A \cdot k_t$$

De la Figura 15.17b, sumando momentos alrededor del borde superior que delimita k_t nos viene,

$$F = \frac{M_{m\acute{a}x} - f_b \cdot A \cdot k_t}{e + k_t} \quad [15.8c]$$

El valor de f_b -tracción- es limitado por el código. El valor de f_t viene dado por,

$$f_t = \frac{F \cdot h}{A \cdot y_b} + f_b \cdot \frac{y_t}{y_b}$$

El área requerida para no sobrepasar los esfuerzos admisibles viene dada por,

$$A = \frac{F \cdot h}{f_t \cdot y_b - f_b \cdot y_t} \quad [15.10e]$$

EJEMPLO 15.3

Viga idéntica a la encontrada en el Ejemplo 17.2 excepto que se permitiendo tracciones en el concreto.

$M_{min} = 43.30 \text{ ton} \cdot \text{m}$ -para una viga Cagua 142-. $M_{m\acute{a}x} = 259.30 \text{ ton} \cdot \text{m}$. $\eta = 0.83$

$$\begin{aligned}
 f_{bi} &= 230 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \text{esfuerzo de compresión admisible al momento de transferir el tensado (abajo) } \downarrow \\
 f_{ti} &= 32 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \text{esfuerzo de tracción admisible al momento de transferir el tensado (arriba) } \uparrow \\
 f_b &= 18 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \text{esfuerzo de tracción admisible bajo cargas de servicio (abajo) } \downarrow \\
 f_t &= 170 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \text{esfuerzo de compresión admisible bajo cargas de servicio (arriba) } \uparrow \\
 A &= 4324 \text{ cm}^2 \dots I = 10470973 \text{ cm}^4 \\
 y_t &= 79.92 \text{ cm} \dots y_b = 62.08 \text{ cm} \\
 k_b &= 30.30 \text{ cm} \dots k_t = 39.00 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

- Calcularemos e que es la máxima excentricidad posible para que no se excedan los esfuerzos de tracción admisibles (f_{ti}) en las fibras superiores al instante de la transferencia de fuerzas basados en F_i estimado con la Ecuación 15.12a y 15.9b. El valor de F_i (ecuaciones 15.8a y 15.8b) fue calculado en el Ejemplo 15.2,

$$\begin{aligned}
 e_1 + e_2 &= \frac{M_{min} + f_{ti} \cdot A \cdot k_b}{F_i} = \frac{43.30 \cdot 10^5 + 32 \cdot 4324 \cdot 30.30}{375.54 \cdot 10^3} = 22.69 \text{ cm} \\
 e &= (k_b + e_1 + e_2) = 30.30 + 22.69 = 52.99 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

La máxima excentricidad disponible es,

$$e_{max} = y_b - rec = 62.08 - 15 = 47.08 \text{ cm} < 52.99 \text{ cm} \dots \dots \text{asumiremos } e = 47 \text{ cm}.$$

Nota: El recubrimiento está referido al centroide de los cables de tensado.

- Calcularemos F (Ecuación 15.8c),

$$F = \frac{M_{max} - f_b \cdot A \cdot k_t}{e + k_t} = \frac{259.3 \cdot 10^5 - 18 \cdot 4324 \cdot 39}{(47 + 39)} \cdot \frac{1}{1000} = 266.22 \text{ ton} \dots F_i = F/\eta = 320.74 \text{ ton}$$

- Verificaremos que no se excedan los esfuerzos admisibles de compresión en las fibras inferiores al instante de la transferencia con la Ecuación 15.10b pues $e = 47 \text{ cm} < (k_b + e_1 + e_2)$,

$$A = \frac{F_i}{f_{bi}} \cdot \left[1 + \frac{e - M_{min}/F_i}{k_t} \right] = \frac{320740}{230} \cdot \left[1 + \frac{47 - 43.30 \cdot 10^5/320740}{39} \right] = 2592 \text{ cm}^2 < 4325 \text{ cm}^2 \text{ O.K}$$

- Verificaremos que no se excedan los esfuerzos admisibles de compresión en las fibras superiores bajo condiciones de servicio (Ecuación 15.10e),

$$A = \frac{F \cdot h}{f_t \cdot y_b - f_b \cdot y_t} = \frac{(266.22 \cdot 10^3) \cdot 142}{170 \cdot 79.92 - 18 \cdot 62.08} = 3032 \text{ cm}^2 < 4325 \text{ cm}^2$$

Observaciones

Las tracciones que se producen en el concreto bajo cargas de servicio ayudan a resistir un momento de, $f_b \cdot A \cdot k_t = 18 \cdot 4324 \cdot 39 = 3035448 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 30.35 \text{ ton} \cdot \text{m}$ (aproximadamente un 12 % de M_{max}). En consecuencia la fuerza en el concreto F_i disminuyó de 395.3 ton (Ejemplo 15.2) a 320.74 ton (en un $\cong 20\%$), lo que implica una reducción del acero de tensado de igual magnitud y por ende una viga más económica. ■

15.6 SECCIONES COMPUESTAS

Se forman al combinar la sección prefabricada y tensada con concreto vaciado en sitio. El caso más común de vigas prefabricadas para puentes a las que se les vacía la losa de concreto en obra será discutido a

continuación. Asumiremos que son permitidos los esfuerzos de tensión en la parte inferior de la viga. Lin y Burns (1981) sugieren el siguiente procedimiento,

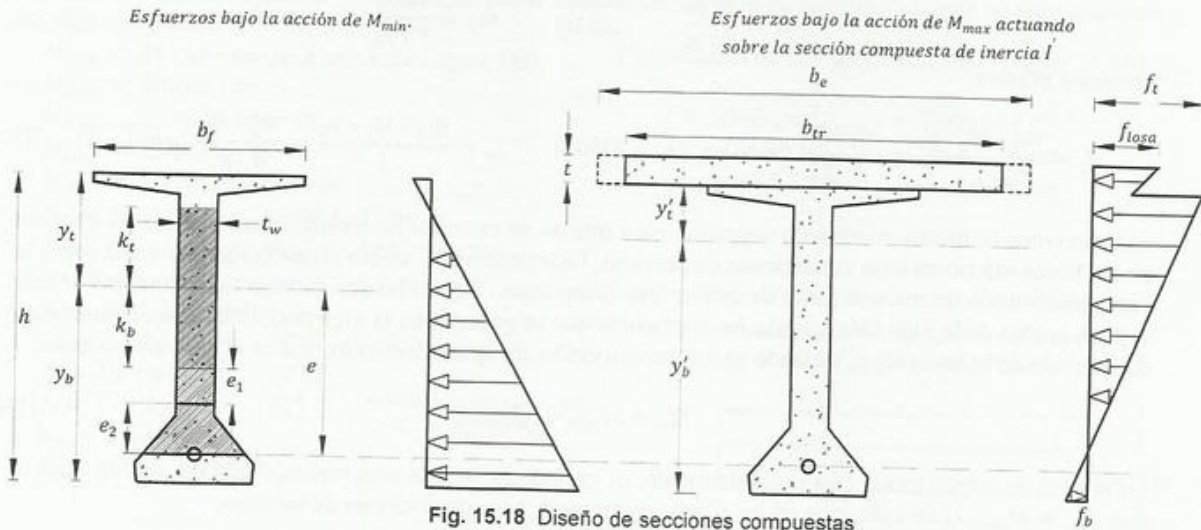


Fig. 15.18 Diseño de secciones compuestas

- Calcularemos el ancho efectivo y el ancho de la sección transformada AASHTO LRFD 2005,

$$b_e = \underbrace{\text{menor de } \left[\frac{L}{4}, t_w + 12 \cdot t, S \right]}_{\text{vigas internas}} \quad b_e = \underbrace{\text{menor de } \left[b_w + \frac{L}{12}, b_w + 6 \cdot t, \frac{S + b_w}{2} \right]}_{\text{vigas externas}} \quad [15.13a]$$

Donde L es la luz de la viga, y S es la separación transversal de las vigas medida de centro a centro.

- Generalmente se emplean concretos con diferentes resistencias para la viga y la losa. En vigas usaremos f'_c por el orden de $400 - 500 \text{ kg/cm}^2$ y en la losa bastará con usar concretos de 250 kg/cm^2 . Tendremos una sección compuesta con concretos que tienen módulos de elasticidad diferentes. Utilizaremos el concepto de sección transformada para encontrar el ancho de la losa en sección transformada,

$$b_{tr} = \frac{E_c(\text{losa})}{E_c(\text{viga})} \cdot b_e \quad [15.14]$$

- Asumiremos una fuerza de tensado. Puede utilizarse las fórmulas aproximadas 15.8a o 15.8b,

$$F = \frac{M_{max}}{e + k_t} \dots \dots \dots F = \frac{M_{max} - M_{min}}{k_b + k_t}$$

- Calcularemos e en la sección prefabricada para que no se excedan los esfuerzos de tracción en las fibras superiores de la sección al momento de transferir las fuerzas de tensado. Para ello usaremos la Ecuación 15.9b

$$e = (k_b + \overbrace{e_1 + e_2}^{Ec. 15.12a}) \quad [15.9b]$$

- Un momento externo de magnitud M_1 actuando sobre la *sección compuesta* producirá en la los bordes superiores e inferiores de la *sección prefabricada* los siguientes esfuerzos de compresión y tracción, respectivamente (Figura 15.18),

$$f_t = \frac{M_1 \cdot y'_t}{I'} \quad (\text{arriba } \uparrow) \quad f_b = \frac{M_1 \cdot y'_b}{I'} \quad (\text{abajo } \downarrow) \quad [15.15]$$

Definiremos las relaciones entre los módulos de sección de la sección compuesta y prefabricada ,

$$m_t = \frac{I/y_t}{I'/y'_t} \quad [15.16] \quad m_b = \frac{I/y_b}{I'/y'_b} \quad [15.17]$$

Podemos afirmar,

$$f_t = \frac{m_t \cdot M_1 \cdot y_t}{I} = \frac{m_t \cdot M_1}{A \cdot k_b} (\text{arriba } \uparrow) \quad [15.18] \quad f_b = \frac{m_b \cdot M_1 \cdot y_b}{I} = \frac{m_b \cdot M_1}{A \cdot k_t} (\text{abajo } \downarrow) \quad [15.19]$$

- Calcularemos la fuerza de tensado necesaria para que no se excedan los esfuerzos admisibles de tracción en las fibras inferiores bajo condiciones de servicio. Definiremos M_o como el momento que actúa sobre la viga prefabricada un instante antes de convertirse compuesta. Generalmente incluye los momentos debido al peso propio de la viga (M_{min}) más los momentos que se generan en la viga prefabricada en el momento del vaciado de la losa (M_{losa}) cuando se usa construcción sin apuntalamiento, que es el caso más común.

$$M_o = M_{min} + M_{losa} \quad [15.20]$$

En el caso de construcción con apuntalamiento, el vaciado de la losa será resistido por los puntales por lo que $M_o = M_{min}$. Los esfuerzos en las fibras inferiores f_b bajo condiciones de servicio,

$$f_b = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot e}{A \cdot k_t} + \frac{M_o}{A \cdot k_t} + \frac{m_b \cdot M_1}{A \cdot k_t} \Rightarrow F = \frac{M_o + m_b \cdot M_1 - f_b \cdot k_t \cdot A}{e + k_t} \quad [15.8d]$$

- El área necesaria para que no se sobrepasen los esfuerzos admisibles a compresión f_{bi} en las fibras inferiores al instante de la transferencia de fuerzas en la sección prefabricada,

$$f_{bi} = \frac{F_i}{A} + \frac{F_i \cdot e - M_{min}}{A \cdot k_t} \Rightarrow A = \frac{F_i}{f_{bi}} \cdot \left(1 + \frac{e - M_{min}/F_i}{k_t} \right) \quad [15.10f]$$

igual a la ecuación 15.10b

- El área de concreto de la sección prefabricada necesaria para que no se sobrepasen los esfuerzos admisibles de compresión f_t en las fibras superiores en condiciones de servicio es,

$$f_t = \frac{F}{A} - \frac{F \cdot e}{A \cdot k_b} + \frac{M_o}{A \cdot k_b} + \frac{m_t \cdot M_1}{A \cdot k_b} \Rightarrow A = \frac{F}{f_t} \cdot \left(1 + \frac{\frac{M_o + m_t \cdot M_1}{F} - e}{k_b} \right) \quad [15.10g]$$

- Calcularemos los esfuerzos en la parte superior de la losa y compararemos con los valores admisibles. Para ello utilizaremos los momentos sobre la sección compuesta luego de endurecida la losa (M_1), que incluyen generalmente, $M_{barandas}$, $M_{pavimento}$, $M_{carga-viva}$ para el caso de construcción sin apuntalamiento. Para el caso de construcción con apuntalamiento, debemos además incluir el peso de la losa.

$$f_{losa} = \frac{M_1 \cdot (y'_t + t)}{I'} \leq f_{losa} \quad [15.21]$$

Observaciones

La ecuaciones 15.10a, 15.10d y 15.10f son análogas a 15.10b. También los son las ecuaciones 15.10c y 15.10e a 15.10g.

EJEMPLO 15.4

Viga idéntica a la del Ejemplo 15.2, excepto por la adición de una losa de concreto vaciada en sitio que crea una viga compuesta.

$$M_{\min} = 34 \text{ ton} \cdot \text{m} \text{ -para una viga Cagua 140-}$$

$$M_{\text{losa}} = 50 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{\text{pavimento}} = 16 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{\text{viva}} = 150 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{\max} = \Sigma M = 250 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_o = M_{\min} + M_{\text{losa}} = 84 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_1 = M_{\text{pavimento}} + M_{\text{viva}} = 166 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$\eta = 0.83$$

$$f_{bi} = 230 \text{ kg/cm}^2 \text{ (C) } \downarrow$$

$$f_{ti} = 32 \text{ kg/cm}^2 \text{ (T) } \uparrow$$

$$f_b = 18 \text{ kg/cm}^2 \text{ (T) } \downarrow$$

$$f_t = 170 \text{ kg/cm}^2 \text{ (C) } \uparrow$$

$$b_{tr} = 1.50 \text{ m}$$

$$f_{\text{losa}} = 125 \text{ kg/cm}^2$$

Propiedades de la viga Cagua 140 (Figura 15.19)

$$A = 3395 \text{ cm}^2 \dots \dots I = 7809262 \text{ cm}^4$$

$$y_t = 72.86 \text{ cm} \dots \dots y_b = 67.14 \text{ cm}$$

$$k_b = 31.57 \text{ cm} \dots \dots k_t = 34.26 \text{ cm}$$

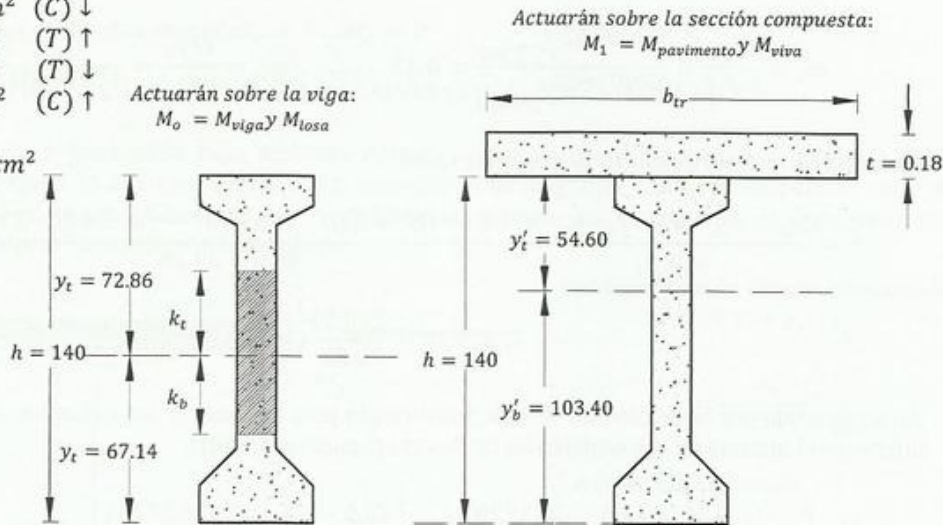


Fig. 15.19 Diseño de secciones compuestas (Ejemplo 15.4)

- Propiedades de la sección compuesta *viga + losa*

$$y'_b = \frac{67.14 \cdot 3395 + 149 \cdot (150 \cdot 18)}{3395 + 150 \cdot 18} = 103.40 \text{ cm}$$

$$y'_t = 158 - 103.40 = 54.60$$

$$I' = \underbrace{\left[7809262 + 3395 \cdot (103.40 - 67.14)^2 \right]}_{\text{viga}} + \underbrace{\left[\frac{150 \cdot 18^3}{12} + 150 \cdot 18 \cdot (103.40 - 149)^2 \right]}_{\text{losa}} = 17999605 \text{ cm}^4$$

- La relación $M_{\min}/M_{\max} = 0.14$ (baja). Calcularemos el valor preliminar de F (ecuaciones 15.8a),

$$F = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{k_b + k_t} = F = \frac{250 \cdot 10^5 - 34 \cdot 10^5}{31.57 + 34.26} = 328.11 \text{ ton} \dots \dots F_t = \frac{F}{\eta} = 395.31$$

- Calcularemos e . Ecuaciones 15.12a y 15.9b.

$$e_1 + e_2 = \frac{M_{\min} + f_{ti} \cdot A \cdot k_b}{F_t} = \frac{34 \cdot 10^5 + 32 \cdot 3395 \cdot 31.57}{395.31 \cdot 10^3} = 17.28 \text{ cm}$$

$$e = (k_b + e_1 + e_2) = 31.57 + 17.28 = 48.84 \text{ cm}$$

La máxima excentricidad disponible es,

$$e_{max} = y_b - rec = 67.14 - 15 = 52.14 \text{ cm} > 48.84 \text{ cm} \dots \text{asumiremos } e = 48.5 \text{ cm} \cong 48.84 \text{ cm}$$

- Los esfuerzos en los extremos superior e inferior de la viga prefabricada, debido a M_1 que actúa sobre la sección compuesta se calcularán con la Ecuación 15.15,

$$f_t = \frac{M_1 \cdot y'_t}{I'} = \frac{166 \cdot 10^5 \cdot 54.60}{17999605} = 50.35 \text{ kg/cm}^2 \dots \dots f_b = \frac{M_1 \cdot y'_b}{I'} = \frac{166 \cdot 10^5 \cdot 103.40}{17999605} = 95.36 \text{ kg/cm}^2$$

- Relaciones entre los módulos de sección de la sección compuesta y prefabricada (ecuaciones 15.16 y 15.17),

$$m_t = \frac{I/y_t}{I'/y'_t} = \frac{7809262/72.86}{17999605/54.60} = 0.33 \dots \dots m_b = \frac{I/y_b}{I'/y'_b} = \frac{7809262/67.14}{17999605/103.4} = 0.67$$

- La fuerza de tensado al aplicar la Ecuación 15.8d,

$$F = \frac{M_o + m_b \cdot M_1 - f_b \cdot k_t \cdot A}{e + k_t} = \frac{84 \cdot 10^5 + 0.67 \cdot 166 \cdot 10^5 - 18 \cdot 34.26 \cdot 3395}{48.5 + 34.26} = 210.59 \text{ ton}$$

$$F_i = F/\eta = \frac{210.59}{0.83} = 253.72 \text{ ton}$$

- Área requerida por la sección de la viga prefabricada para no exceder los esfuerzos de compresión en fibras inferiores al instante de la transferencia de fuerzas (Ecuación 15.10f),

$$A = \frac{F_i}{f_{bi}} \cdot \left(1 + \frac{e - M_{min}/F_i}{k_t} \right) = \frac{253720}{230} \cdot \left(1 + \frac{48.5 - 34 \cdot 10^5/253720}{34.26} \right) = 2233 \text{ cm}^2 < 3395 \text{ cm}^2 \text{ O.K}$$

- Bajo condiciones de servicio el área requerida en la sección transversal de viga prefabricada para no exceder los esfuerzos admisibles de compresión, se calcula con la Ecuación 15.10g,

$$A = \frac{F}{f_t} \cdot \left(1 + \frac{M_o + m_t \cdot M_1 - e}{F k_b} \right) = \frac{210590}{170} \cdot \left(1 + \frac{84 \cdot 10^5 + 0.33 \cdot 166 \cdot 10^5 - 48.50}{210590 \cdot 31.57} \right)$$

$$= 1922 \text{ cm}^2 < 3395 \text{ cm}^2 \text{ O.K}$$

- El esfuerzo en la losa para compararlo con los valores admisibles (Ecuación 15.21)

$$f_{losa} = \frac{M_1 \cdot (y'_t + t)}{I'} = \frac{166 \cdot 10^5 \cdot (54.60 + 18)}{17999605} = 66.95 \text{ kg/cm}^2 \leq f_{losa} = 125 \text{ kg/cm}^2$$

En muy raras ocasiones es el esfuerzo de compresión en la losa un factor que determina el diseño de la viga ■

15.7 MOMENTO DE AGRIETAMIENTO Y RESISTENCIA ÚLTIMA DE VIGAS PRE-ESFORZADAS

a) MOMENTO DE AGRIETAMIENTO

Sea: M_{agr} el momento de agrietamiento de la viga y ΔM_{agr} el incremento de momento que se le debe aplicar a la viga compuesta para que produzca una grieta, nos viene,

$$\Delta M_{agr} = \frac{1}{m_b} \cdot \left[F \cdot (e + k_t) - M_o \right] + \frac{f_{tr} \cdot I}{y_b} \quad [15.22]$$

El momento de agrietamiento viene dado por... $M_{agr} = M_o + \Delta M_{agr}$

Para construcción no compuesta asumir $m_b = 1$... $M_o = 0$

b) RESISTENCIA ÚLTIMA DE VIGAS PRE-ESFORZADAS CON CABLES ADHERIDOS

Una viga pretensada o postensada bajo acciones últimas se comporta de manera muy similar a una de concreto armado (Figura 15.20). Las fuerzas T y C aumentarán en magnitud y el brazo de palanca entre ellas permanecerá casi inalterado. Calcularemos la resistencia usando las ecuaciones de equilibrio y un procedimiento similar al descrito en el Capítulo 5.

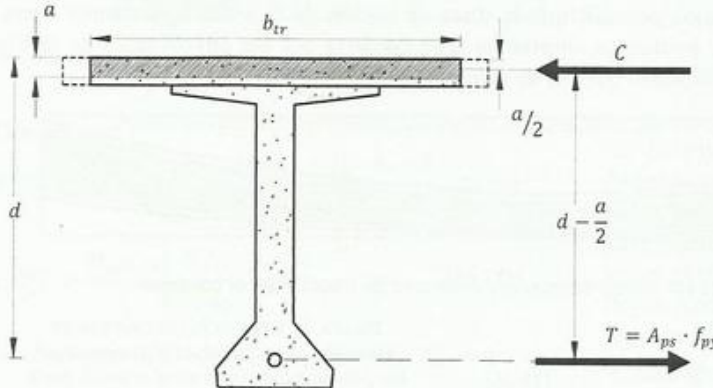


Fig. 15.20 Resistencia última de vigas tensadas

Por equilibrio de fuerzas horizontales,

$$C = T = A_{ps} \cdot f_{py}$$

$$a = \frac{A_{ps} \cdot f_{py}}{0.85 \cdot f'_c \cdot b_{tr}}$$

La capacidad a flexión,

$$\bar{M}_u = T \cdot \left[d - \frac{a}{2} \right] \quad [15.23]$$

Para garantizar un comportamiento dúctil de la viga, AASHTO LRFD requiere,

$$\frac{a/\beta_1}{\bar{c}} \leq 0.42$$

Es importante acotar que el diseño de vigas pretensadas generalmente es dominado por los requerimientos bajo cargas de servicio para evitar el agrietamiento del concreto. Sin embargo, debemos garantizar que bajo condiciones últimas,

$$\frac{\phi \cdot \bar{M}_u}{M_{cr}} \geq 1.20 \dots \dots \phi = 0.90$$

El valor de \bar{M}_u se obtiene de la Ecuación 15.23. Además tendremos que verificar que la resistencia última sea mayor que la demanda obtenida al mayorar las cargas de servicio (ver Ejemplo 15.6).

Los torones o cables de tendido deben estar anclados para alcanzar un esfuerzo cercano a f_{py} con una longitud de desarrollo $l_d \geq 150 \cdot d_t$ en las zonas cercanas a los apoyos y un longitud $l_d \geq 300 \cdot d_t$ en los demás casos, siendo d_t el diámetro del torón.

Procedimientos para calcular la resistencia última de vigas con cables no adheridos pueden encontrarse en Naaman (2004). Lin y Burns (1981) sugieren que en condiciones últimas este tipo de vigas son entre un 10% y 30% más débiles que las que poseen cables adheridos.

15.8 TRAYECTORIA DE LOS CABLES

Vigas sin permitir tensión en el concreto

La resultante de la fuerza de compresión debe actuar por encima de k_t lo que equivale a que el centroide de los cables diste (a_b) o menos del borde inferior que delimita a k_b (Figura 15.21).

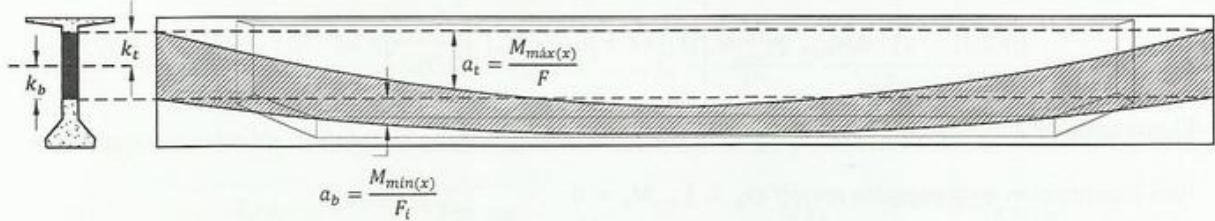


Fig. 15.21 Trayectoria de los cables sin permitir esfuerzos de tracción en el concreto

La línea de acción de la fuerza de compresión debe caer por debajo de k_t , por lo que el centroide de los cables debe distar a_t o más del borde que define k_t .

Vigas al permitir esfuerzos de tracción en el concreto

Al admitir esfuerzos de tracción podremos permitir que la línea de acción de C actué ligeramente fuera del núcleo de la sección. En consecuencia, podremos ampliar el área cubierta por las envolventes de la Figura 15.21 según se muestra en la Figura 15.22,

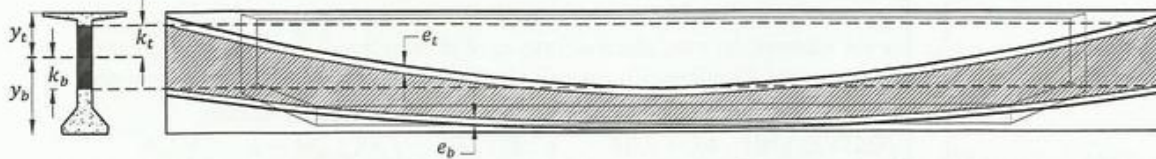


Fig. 15.22 Trayectoria de los cables admitiendo esfuerzos de tracción en el concreto

$$e_b = \frac{f_{ti} \cdot I}{F_i \cdot y_t} \quad [15.24]$$

$$e_t = \frac{f_b \cdot I}{F \cdot y_b} \quad [15.25]$$

Donde, f_{ti} y f_b son los esfuerzos de tracción permitidos en el concreto en las fibras superiores e inferiores para instante de transferencia y bajo condiciones de servicio respectivamente

Vigas compuestas

La envolvente inferior no varía con respecto a la descrita en la Figura 15.22 pues su trayectoria está delimitada por las cargas al instante de la transferencia de fuerzas cuando no existe la sección compuesta. El límite superior de la envolvente se calcula según se indica en la Figura 15.23,

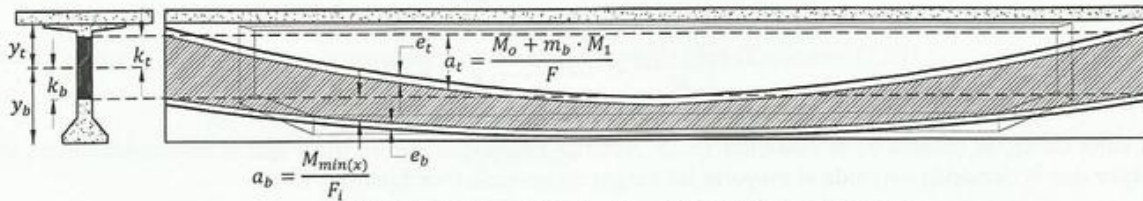


Fig. 15.23 Trayectoria de los cables en vigas compuestas

La gran mayoría de vigas pretensadas fabricadas en Venezuela son construidas con un proceso de tensado similar al que se muestra en la Figura 15.1. La excentricidad de los cables es constante a lo largo de toda la viga. En este caso será necesario variar la fuerza de tensado a lo largo del eje longitudinal de la viga para mantener la resultante de compresiones actuando dentro del núcleo de la sección, o ligeramente fuera de este si se permiten tracciones. La reducción gradual de la fuerza de tensado se logra envolviendo los extremos de algunos cables en mangueras que impiden que estos se adhieran al concreto lo que los hace inefectivos (Figura 15.24).

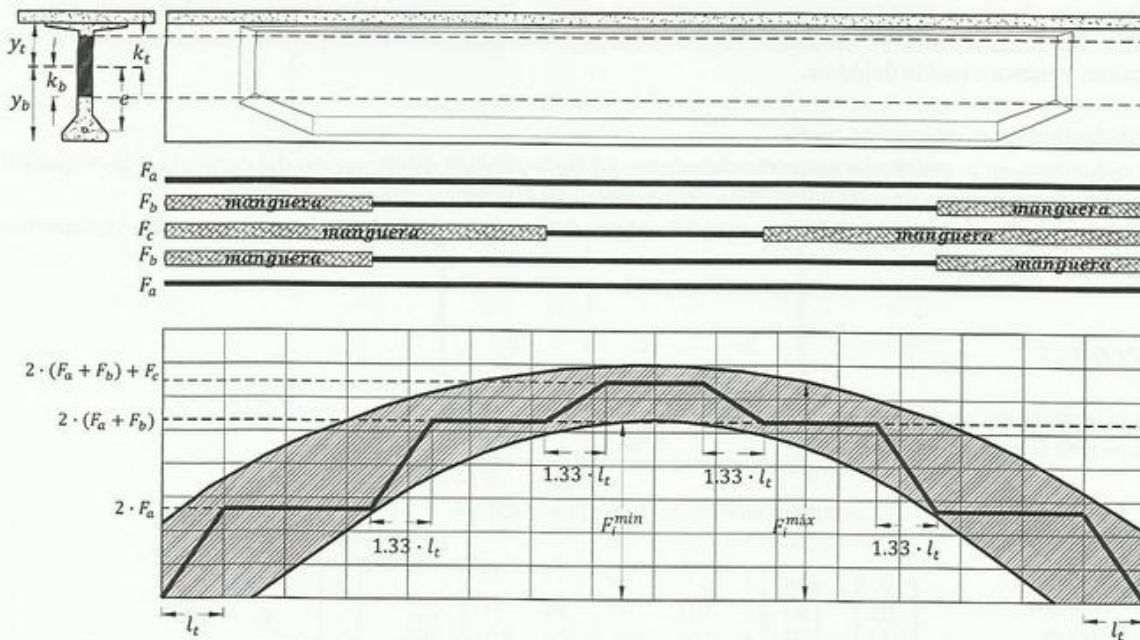


Fig. 15.24 Variación de la fuerza de tensado mediante el uso de mangueras

Donde,

$$F_i^{min} = \frac{M_o(x) + m_b \cdot M_1(x) - f_b \cdot k_t \cdot A}{(e + k_t) \cdot \eta} \quad [15.8e]$$

$$F_i^{max} = \frac{M_{min}(x) + f_{ti} \cdot k_b \cdot A}{e - k_b} \quad [15.12b]$$

Si no se permiten tracciones... $f_b = 0 \dots f_{ti} = 0$

Para secciones no compuestas ... $m = 1.0$

En la Figura, l_t es la longitud de transferencia definida como la necesaria para que la fuerza en el cable sea “cedida” al concreto por esfuerzos de adherencia. El valor de l_t comúnmente usado es 50 veces el diámetro del torón d_t para los torones que llegan hasta los extremos en los que la reacción del soporte induce compresión en la viga. En el tramo de la viga, es decir lejos de los apoyos, no se cuenta con el efecto beneficioso de la compresión inducida por el soporte, e incluso pudiesen existir esfuerzos de tracción bajo cargas de servicio por lo que recomendamos incrementar l_t en un 33%.

15.9 REFUERZO TRANSVERSAL PARA CONTROLAR EL AGRIETAMIENTO EN LOS EXTREMOS DE LA VIGA Y EN ZONAS DONDE EMPIEZAN/TERMINAN LAS MANGUERAS

Se recomienda colocar una cantidad de acero A_v en forma de estribos en los extremos de la viga y en zonas donde empiezan/terminan las mangueras, según la Ecuación 5.28 recomendada por AASHTO-LRFD (2005).

$$\widehat{A}_v = 0.04 \cdot \frac{F_i}{1.40} \quad [15.28]$$

Donde F_i es la fuerza en toneladas en los cables que entran en contacto con el concreto (en los extremos y en los punto donde terminan o empiezan las mangueras). Distribuiremos A_v en una distancia de $h/4$ en la dirección de l_t . (Ver Ejemplo 15.6).

El diseño de los extremos de las vigas postensadas en donde se anclan los aparatos de anclaje o “trompetas” requiere especial atención y detallado. Interesados en el diseño de la zona de anclaje pueden consultar a Sanders y Breen (1997), Lenschow y Sozen (1965), Guyon (1960) y Naaman (2004).

15.10 DEFLEXIONES EN VIGAS PRE-ESFORZADAS

Las deflexiones de vigas pretensadas pueden calcularse usando cualquiera de los procedimientos estudiados en resistencia de materiales. Sin embargo los resultados obtenidos deben ser considerados como valores referenciales y nunca exactos debido a,

- Incertidumbre en la estimación de E_c .
- Incertidumbres en la estimación correcta del efecto del flujo plástico, la retracción del concreto y la relajación del acero. Estos tres fenómenos interactúan de manera compleja y muy difícil de predecir.
- Desconocimiento de la edad del concreto al instante del vaciado de la losa, para el caso de construcción compuesta.

EJEMPLO 15.5

Flechas al instante de transferencias.

Viga de puente (Figura 15.25)

$$L = 40 \text{ m}$$

$$I = 45702727 \text{ cm}^4$$

$$y_t = 105 \text{ cm}$$

$$y_b = 115 \text{ cm}$$

$$h = 220 \text{ cm}$$

$$A = 7032 \text{ cm}^2 \dots w_{viga} = 1.75 \text{ ton/m}$$

$$F_i = 750000 \text{ kg}$$

$$E_{viga} = 350000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Peso propio de viga} = 1750 \text{ kg/m}$$

Ignorar las pérdidas por fricción

Calcular las deflexiones durante el proceso constructivo

Cargas adicionales: Losa y pavimento

$$b_{tr} = 1.60 \text{ m}$$

$$S = 1.90 \text{ m.}$$

$$\text{Espesor de la losa: } 0.20 \text{ m}$$

$$\text{Espesor del pavimento: } 0.05 \text{ m}$$

$$E_{losa} = 250000 \text{ kg/cm}^2$$

Carga viva: asumiremos que la viga resistirá una carga puntual de 20 ton

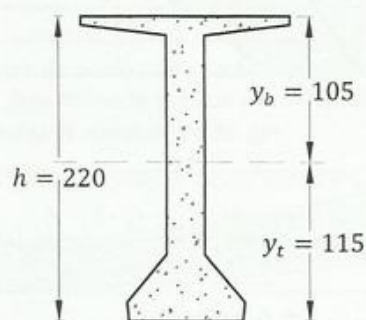


Fig. 15.25 Sección transversal de la viga del Ejemplo 15.5

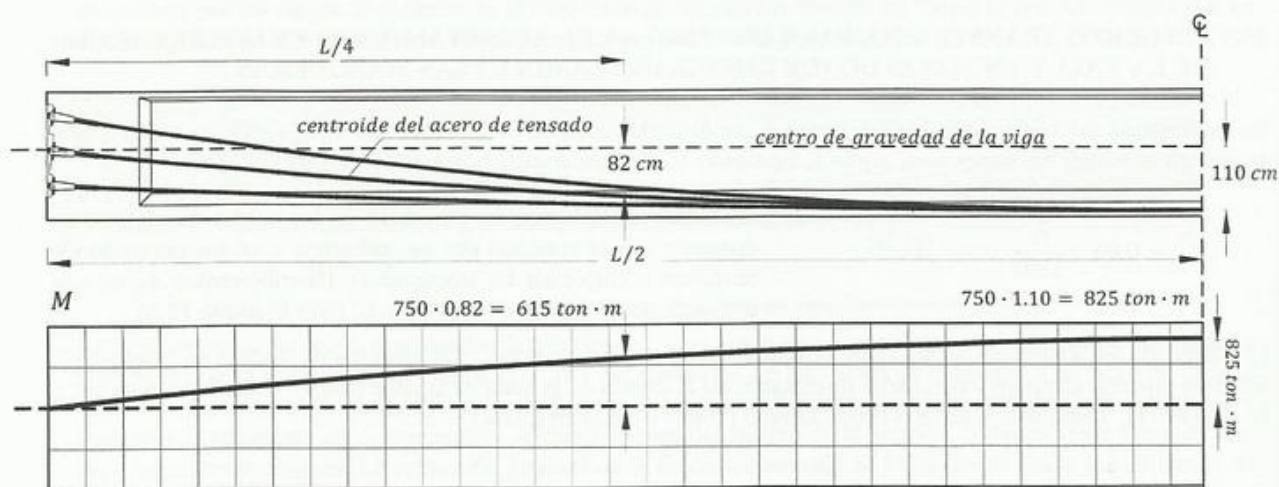


Fig. 15.26 Sección longitudinal de la viga del Ejemplo 15.5 y el diagrama de momento producido por la fuerza de tensado

- Calcularemos la deflexión al instante del tensado de la viga.

1) **Contra-flecha debido al tensado.**

Buscaremos una expresión polinómica que describa la trayectoria del cable de la forma,

$$e_{(x)} = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x^1 + f$$

Tabla 15.1 Coordenadas del centroide del cable obtenidas luego de completar el diseño (Ejemplo 15.5)

Ubicación	x (cm)	e (cm)
0	0	0
$\frac{1}{4} L$	1000	82
$\frac{1}{2} L$	2000	110
$\frac{3}{4} L$	3000	82
L	4000	0

Aplicando algebra lineal resolveremos,

$$\underbrace{\text{cms.}}_{10^2} \cdot \begin{bmatrix} 0^4 & 0^3 & 0^2 & 0^1 & 1 \\ 10^4 & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 1 \\ 20^4 & 20^3 & 20^2 & 20^1 & 1 \\ 30^4 & 30^3 & 30^2 & 30^1 & 1 \\ 40^4 & 40^3 & 40^2 & 40^1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 82 \\ 110 \\ 82 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 0^4 & 0^3 & 0^2 & 0^1 & 1 \\ 10^4 & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 1 \\ 20^4 & 20^3 & 20^2 & 20^1 & 1 \\ 30^4 & 30^3 & 30^2 & 30^1 & 1 \\ 40^4 & 40^3 & 40^2 & 40^1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 82 \\ 110 \\ 82 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.667 \cdot 10^{-13} \\ -1.333 \cdot 10^{-9} \\ -2.417 \cdot 10^{-5} \\ 1.073 \cdot 10^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_{(x)} = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + f$$

Las deflexiones causadas por el pos-tensado en la viga se calcularán asumiendo el diagrama de momentos producido en la viga al tensar los cables (Figura 15.26),

$$M_{(x)} = -F_t \cdot e_{(x)}$$

Usaremos el método de la doble integración,

$$\theta_x = \int_0^{4000} \frac{M_{(x)}}{E \cdot I} \cdot dx = \frac{-F_t}{E \cdot I} \cdot \left[a \cdot \frac{x^5}{5} + b \cdot \frac{x^4}{4} + c \cdot \frac{x^3}{3} + d \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \right]$$

$$\Delta_{\text{tensado}(x)} = \int_0^{4000} \theta_x \cdot dx = \frac{-F_t}{E \cdot I} \cdot \left[a \cdot \frac{x^6}{30} + b \cdot \frac{x^5}{20} + c \cdot \frac{x^4}{12} + d \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right]$$

Condiciones de borde,

Para $x = 0, y = 0$ tendremos $C_2 = 0$

Para $x = 40 \text{ m}, y = 0$ tendremos $C_2 = -145054.3$

Al resolver en la mitad del claro,

$$\Delta_{\text{tensado}} = 8.5 \text{ cm} \uparrow$$

2) **Flecha debido al peso propio de la viga**

La viga tendrá una contra-flecha menor a 8.5 cm al considerar el efecto del peso propio. La flecha máxima debido a una carga distribuida en una viga simplemente apoyada es,

$$\Delta_{\text{peso propio}} (x=2000 \text{ cm}) = \frac{5 \cdot w_{p.p} \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

$$\Delta_{\text{peso propio}=2000 \text{ cm}} = \frac{5 \cdot 17.5 \cdot 4000^4}{384 \cdot 350000 \cdot 45702727} = 3.6 \text{ cm} \downarrow$$

La flecha esperada inmediatamente después de hacer el tensado de la viga estará por el orden de,

$$\Delta_1 = 8.5 \text{ cm} - 3.6 \text{ cm} = 4.9 \text{ cm} \uparrow$$

3) **Deflexión en la viga inmediatamente luego de vaciar la losa**

Debido al efecto del flujo plástico la viga continuará deformándose hacia arriba. La magnitud del incremento en la contra-flecha antes de vaciar la losa dependerá entre otros factores de la edad de la viga para el vaciado. Para el caso común en que las vigas tienen una edad aproximada de 3 meses antes del vaciado de la losa, Naaman (2004) sugiere que la deflexión puede estar por el orden de $2.2 \cdot \Delta_1$.

En el instante del vaciado la viga se deflectará debido al peso del concreto fresco. La carga debido al vaciado la calcularemos así

$$w_{\text{vaciado}} = S \cdot t \cdot \gamma_c = 1.90 \cdot 0.20 \cdot 2500 = 950 \text{ kg/m}$$

El incremento de la flecha luego de realizado el vaciado es de,

$$\Delta_{\text{vaciado losa}} = \frac{5 \cdot w_{\text{vac}} \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{5 \cdot 9.5 \cdot 4000^4}{384 \cdot 350000 \cdot 45702727} \cong 2.0 \text{ cm} \downarrow$$

La flecha luego del vaciado de la losa es aproximadamente de,

$$\Delta_2 = 2.2 \cdot \Delta_1 - 2.0 = 2.2 \cdot 4.9 - 2.0 = 8.8 \text{ cm} \uparrow$$

4) **Calcularemos la deflexión de la viga luego de aplicar el pavimento, barandas y separadores si los hubiese (Δ_3)**

La losa habrá endurecido al colocar el pavimento, barandas, separadores, y la sección trabajará como compuesta. Para el ejemplo solo calcularemos el incremento de la deflexión debida a la carga del pavimento. Ignoraremos las deflexiones debidas a flujo plástica entre Δ_2 y Δ_3 .

$$w_{\text{pavimento}} = S \cdot t \cdot \gamma_{\text{pav}} = 1.90 \cdot 0.05 \cdot 2350 \cong 225 \text{ kg/m}$$

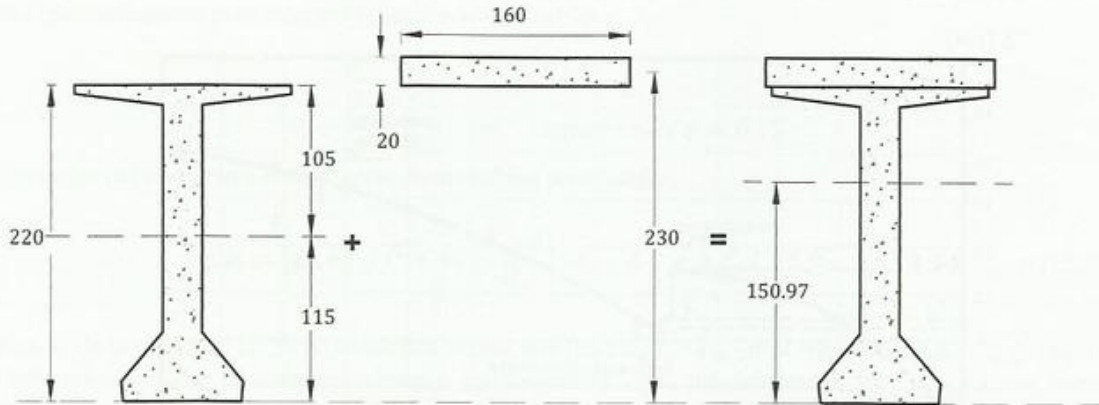


Fig. 15.27 Sección compuesta viga del Ejemplo 15.5

$$\bar{y} = \frac{7032 \cdot 115 + 20 \cdot 160 \cdot 230}{7032 + 20 \cdot 160} = 150.97 \text{ cm}$$

$$I_{tr} = \underbrace{45702727 + 7032 \cdot (150.97 - 115)^2}_{\text{viga}} + \underbrace{\frac{160 \cdot 20^3}{12} + 160 \cdot 20 \cdot (150.97 - 230)^2}_{\text{losa}}$$

$$I_{tr} = 74894054 \text{ cm}^4$$

El incremento de la flecha luego de colocado el pavimento,

$$\Delta_{\text{pavimento}} = \frac{5 \cdot w_{\text{pav}} \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_{tr}} = \frac{5 \cdot 2.25 \cdot 4000^4}{384 \cdot 350000 \cdot 74894054} \cong 0.29 \text{ cm} \downarrow$$

La flecha luego de la colocación del pavimento estará por el orden de:

$$\Delta_3 = \Delta_2 - 0.29 = 8.80 - 0.29 = 8.51 \text{ cm} \uparrow$$

5) Flechas a largo plazo

La viga continuará deformándose debido a los efectos del flujo plástico y relajación del acero a medida que el tiempo transcurre. La magnitud de estas deformaciones es muy difícil de estimar por lo que no se obtiene grandes beneficios al usar fórmulas complejas. Estimaremos estas deformaciones de acuerdo a,

$$\Delta_4 = 2.2 \cdot \Delta_3$$

$$\Delta_4 = 2.2 \cdot \Delta_3 = 2.2 \cdot (8.51) = 18.72 \text{ cm} \uparrow \sim L/215$$

6) Calcularemos la deflexión instantánea debido a la carga viva

$$\Delta_{C.V} = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_{tr}} = \frac{20000 \cdot 4000^3}{48 \cdot 350000 \cdot 74894054} = 1.02 \text{ cm} \downarrow$$

$$\sim L/3931 < L/800 \text{ (recomendación AASHTO - LRFD 2005) O.K}$$

La posible historia de deformaciones para la viga se muestra en la Figura 15.28. ■

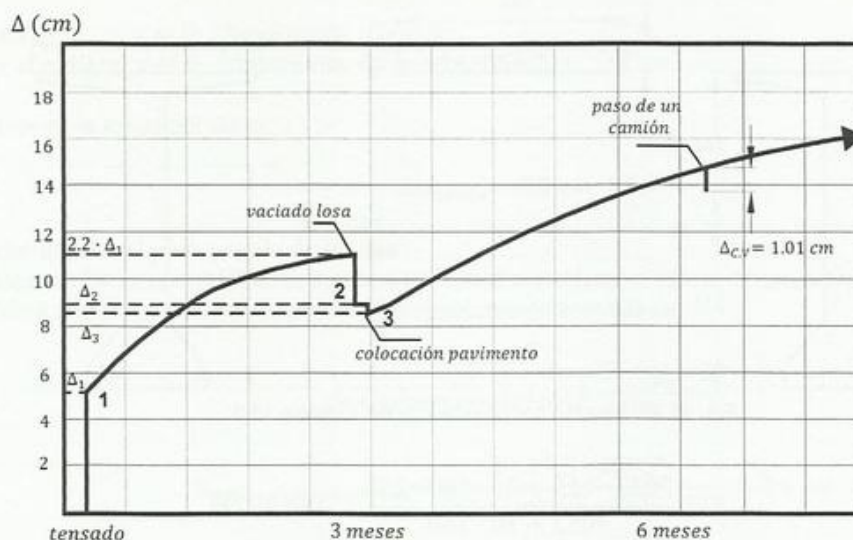


Fig. 15.28 Historia de deformaciones para la viga (Adaptado de Naaman, 2004)

15.11 DISEÑO DE VIGAS PRE-ESFORZADAS POR CORTE

Las principales diferencias que existen entre vigas de concreto armado o pretensado sujetas a cortante son,

- En vigas no agrietadas y con estribos el corte es resistido casi en su totalidad por el concreto.
- La fuerza de tensado reduce la magnitud de los esfuerzos principales de tracción y su inclinación, si se compara con una viga idéntica pero de concreto armado.
- La magnitud del corte efectivo resistido por la viga se reduce de \bar{V}_u a $\bar{V}_u - V_p$ si se usan cables con trayectorias inclinadas (ver Figura 15.29) -Aunque en casos muy particulares la componente vertical del cable puede aumentar el corte efectivo resistido por la viga-.

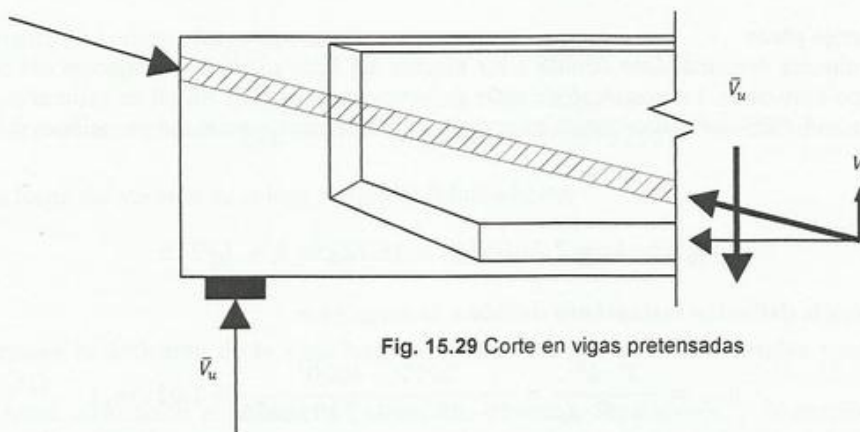


Fig. 15.29 Corte en vigas pretensadas

- Al aparecer las grietas los estribos empiezan a trabajar resistiendo parte del corte y las vigas pretensadas se comportan de manera similar a una de concreto armado -ver Capítulo 8-.
- En vigas de concreto armado la sección crítica se toma a una distancia d del apoyo mientras que en concreto pretensado se tomará a una distancia $h/2$.

Las vigas pre-esforzadas se pueden diseñar siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 8 con el tradicional procedimiento para calcular la separación de estribos:

$$V_s = \frac{\bar{V}_u}{\phi} - V_c \rightarrow \text{tomaremos } \phi = 0.75$$

La contribución del concreto a resistir corte en miembros pretensados,

$$V_c = \left[0.16 \cdot \sqrt{f'_c} + 49 \cdot \frac{\bar{V}_u \cdot d}{M_u} \right] \cdot b_w \cdot d \quad \text{--- A.C.I. 11.9 ---} \quad [15.29]$$

El término V_c de la ecuación 15.29 no se tomará menor que $0.53 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$ ni mayor que $1.33 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d$. Mayor información sobre el comportamiento y resistencia de vigas pre-esforzadas sujetas a fuerzas cortantes puede encontrarse en MacGregor, Sozen y Seiss (1966).

EJEMPLO 15.6

Diseñar la viga pretensada para puente sometida a las combinaciones de carga que se muestran en la Tabla 15.2. $L = 20$ m. La sección transversal de la viga es compuesta e idéntica a la del Ejemplo 15.4.

El esfuerzo máximo permitido en el cable en el momento de transferencias es de

$$f_{ps} = 0.70 \cdot f_{pu} - \text{valor usual} -$$

El área de cada cable o torón de 0.6" de diámetro es $1.40 \text{ cm}^2 \rightarrow d_t = 0.6"$

$$f'_c = 480 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \beta_1 = 0.71 \text{ (Ecuación 5.14)} \dots \dots f_{cr} = 45 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Agrietamiento)} \dots \eta = 0.83$$

Esfuerzos admisibles en el concreto

$$\begin{aligned} f_{bi} &= 230 \text{ kg/cm}^2 \quad (C) \downarrow \\ f_{ti} &= 32 \text{ kg/cm}^2 \quad (T) \uparrow \\ f_b &= 18 \text{ kg/cm}^2 \quad (T) \downarrow \\ f_t &= 170 \text{ kg/cm}^2 \quad (C) \uparrow \\ b_{tr} &= 1.50 \text{ m} \\ f_{losa} &= 125 \text{ kg/cm}^2 \\ k_b &= 31.57 \text{ cm} \\ k_t &= 34.26 \text{ cm} \\ f_{pu} &= 18900 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow f_{ps(i)} = 13230 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

- Propiedades de la viga Cagua 140 (Figura 15.15)
 - $A = 3395 \text{ cm}^2$
 - $I = 7809262 \text{ cm}^4$
 - $y_t = 72.86 \text{ cm}$
 - $y_b = 67.14 \text{ cm}$
 - $e = 58.00 \text{ cm} - \text{asumida} -$
 - $d = 58 + 72.86 = 130.86 \text{ cm}$
 - $b_w = 16.00 \text{ cm}$
- La sección compuesta (Ejemplo 15.4)
 - $y'_b = 103.40 \text{ cm}$
 - $y'_t = 54.60$
 - $I' = 17999605 \text{ cm}^3$
 - $m_t = 0.33$
 - $m_b = 0.67$

De la Tabla 15.2 se obtiene en el centro de la viga,

$$\begin{aligned} M_{min} &= M_{viga} = 40.7 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_{losa} &= 55 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_o &= M_{min} + M_{losa} = 95.7 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_{pavimento} &= 20.7 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_{baranda} &= 5.1 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_{separador} &= 9.9 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_{viva} &= 141.9 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_1 &= M_{pav} + M_{bar} + M_{sep} + M_{viva} = 177.5 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ M_{m\acute{a}x} &= M_o + M_o = 273.30 \text{ ton} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

- Verificaremos la altura de la viga con la Ecuación 15.7

$$h = k \cdot \sqrt{M_{max}} = 8 \cdot \sqrt{273.30} = 132 \text{ cm} < 140 \text{ O.K}$$

- Trataremos de colocar los cables lo más cercanos al borde inferior de la viga para que tengan un mayor rendimiento a flexión. La máxima excentricidad disponible se calculará asumiendo un recubrimiento de 8 cm medido desde el borde inferior hasta el centroide de los cables de tensado.

$$e_{max} = y_b - rec = 67.14 - 8 = 59.14 \text{ cm} \dots \text{asumiremos } e = 58 \text{ cm}$$

Seleccionada la fuerza de Tensado F (o F_t) se verificará que $e = 58 \text{ cm}$ no exceda el límite impuesto por la Ecuación 15.9b y así garantizar que no se superen los esfuerzos admisibles de tracción en las fibras superiores al instante de la transferencia de fuerzas.

- La fuerza de tensado requerida se obtiene al aplicar la Ecuación 15.8d,

$$F = \frac{M_o + m_b \cdot M_1 - f_b \cdot k_t \cdot A}{e + k_t} = \frac{95.70 \cdot 10^5 + 0.67 \cdot 177.50 \cdot 10^5 - 18 \cdot 34.26 \cdot 3395}{58 + 34.26} = 210.01 \text{ ton}$$

210.01 ton pueden interpretarse como la mínima necesaria para no exceder los esfuerzos admisibles de tracción (abajo) durante el servicio de la estructura. En función de F_t nos viene,

$$F_t = F/\eta = \frac{210.01}{0.83} = 252.94 \text{ ton}$$

A este último valor se hubiese llegado con la aplicación de 15.8e.

- Verificaremos que la excentricidad asumida ($e = 58 \text{ cm}$) no exceda el límite impuesto por la ecuaciones 15.12a y 15.9b

$$e_1 + e_2 = \frac{M_{min} + f_{ti} \cdot A \cdot k_b}{F_t} = \frac{40.70 \cdot 10^5 + 32 \cdot 3395 \cdot 31.57}{252.94 \cdot 10^3} = 29.65 \text{ cm}$$

$$e = (k_b + e_1 + e_2) = 31.57 + 29.65 = 61.22 \text{ cm} > 58 \dots \text{O.K} \quad \therefore \text{ en las fibras superiores al instante de transferencia de fuerzas)$$

(no se excederan lo esf. de tracción en las fibras superiores al instante de transferencia de fuerzas)

Las operaciones que se acaban de realizar se verán desde otra óptica. La Ecuación 15.12a puede escribirse en función de $e - k_b$ nos viene la ecuación 15.12b. Esta última se interpreta como la máxima fuerza de tensado admisible para una excentricidad dada ($e = 58 \text{ cm}$) sin que sean excedidos los esfuerzos admisibles de tracción en las fibras superiores al instante de transferencia de fuerzas.

$$F_t = \frac{M_{min} + f_{ti} \cdot A \cdot k_b}{e - k_b} = \frac{40.70 \cdot 10^5 + 32 \cdot 3395 \cdot 31.57}{58 - 31.57} \cdot \frac{1}{1000} = 283.76 \text{ ton}$$

- Podemos concluir que para una excentricidad de 58 cm,

$$252.94 \text{ ton} \leq F_t \leq 283.75 \text{ ton}$$

- Se requiere una fuerza igual un mayor a 252.94 ton para no exceder los esfuerzos de tracción admisibles en las fibras inferiores durante el servicio de la viga.
- Se requiere una fuerza igual o menor a 283.75 ton para no exceder los esfuerzos de tracción admisibles en las fibras superiores durante la transferencia de fuerzas.
- Asumiremos,
 $e = 58 \text{ cm} \dots F_t = 259.308 \text{ ton} \dots 14 \text{ torones de diametro} = 0.6'' \dots f_{ps} = 0.70 \cdot f_{pu}$

$$A_{ps} = \frac{259308}{0.70 \cdot 18900} = 19.60 \text{ cm}^2 \dots \dots \# \text{ torones} = \frac{19.60 \text{ cm}^2}{1.40 \text{ cm}^2} = 14 \text{ torones}$$

- El área requerida por la sección transversal de la viga para no exceder los esfuerzos admisibles de compresión en las fibras inferiores extremas durante la transferencia de fuerzas es (Ecuación 15.10f),

$$A = \frac{F_i}{f_{bi}} \cdot \left(1 + \frac{e - M_{min}/F_i}{k_t} \right) = \frac{259308}{230} \cdot \left(1 + \frac{58 - 40.7 \cdot 10^5/259308}{34.26} \right) = 2520 \text{ cm}^2 < 3395 \text{ cm}^2 \text{ O.K}$$

- El área necesaria para que no exceder los esfuerzos admisibles de compresión en la parte superior de la viga en condiciones de servicio de la viga (Ecuación 15.10g),

$$F = \eta \cdot F_i = 215.226 \text{ ton}$$

$$A = \frac{F}{f_t} \cdot \left(1 + \frac{\frac{M_o + m_t \cdot M_1}{F} - e}{k_b} \right) = \frac{215226}{170} \cdot \left(1 + \frac{\frac{95.70 \cdot 10^5 + 0.33 \cdot 177.50 \cdot 10^5}{215226} - 58}{31.57} \right)$$

$$= 1815 \text{ cm}^2 < 3395 \text{ cm}^2 \text{ O.K}$$

- El esfuerzo en la losa para compararlo con los valores admisibles (Ecuación 15.21)

$$f_{losa} = \frac{M_1 \cdot (y'_t + t)}{I'} = \frac{177.50 \cdot 10^5 \cdot (54.60 + 18)}{17999605} = 71.66 \text{ kg/cm}^2 \leq f_{losa} = 125 \text{ kg/cm}^2$$

- La sección asumida es adecuada. Como complemento se presenta el cálculo de los esfuerzos en la viga al instante de las transferencias y durante el servicio,

a) Arriba al instante de las transferencias tendríamos, [se asume: T +]

$$f_{t \uparrow} = -\frac{F_i}{A} \cdot \left(1 + \frac{\frac{M_{min}}{F_i} - e}{k_b} \right) = -\frac{76.38}{3395} \cdot \left(1 + \frac{\frac{40.7 \cdot 10^5}{259308} - 58}{31.57} \right) = 25.93 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

b) Abajo al instante de las transferencias tendríamos, [se asume: C +]

$$f_{b \downarrow} = \frac{F_i}{A} \cdot \left(1 + \frac{e - \frac{M_{min}}{F_i}}{k_t} \right) = 76.38 \cdot \left(1 + \frac{58 - 15.70}{34.26} \right) = 170.66 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

c) Arriba en condiciones de servicio, [se asume: C +]

$$f_{t \uparrow} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{\frac{M_o + m_t \cdot M_1}{F} - e}{k_b} \right) = \frac{63.40}{3395} \cdot \left(1 + \frac{\frac{(95.70 + 0.33 \cdot 177.50) \cdot 10^5}{215226} - 58}{31.57} \right) = 90.92 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

d) Abajo en condiciones de servicio, [se asume: T +]

$$f_{b \downarrow} = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{e - \frac{M_o + m_b \cdot M_1}{F}}{k_t} \right) = -63.40 \cdot \left(1 + \frac{58 - \frac{(95.70 + 0.67 \cdot 177.50) \cdot 10^5}{215226}}{34.26} \right) = 13.86 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Tabla 15.2 Momentos de diseño para la viga pretensada del Ejemplo 15.6

	Progresiva (m) →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Viga Cagua 140	M_{viga}	0.0	7.7	14.7	20.8	26.1	30.6	34.2	37.1	39.1	40.3	40.7
	M_{losa}	0.0	10.5	19.8	28.1	35.2	41.3	46.2	50.1	52.8	54.5	55.0
	M_o	0.0	18.2	34.5	48.8	61.3	71.8	80.4	87.1	91.9	94.8	95.7
	M_{pav}	0.0	3.9	7.4	10.5	13.2	15.5	17.4	18.8	19.9	20.5	20.7
Sección Compuesta	M_{bar}	0.0	1.0	1.8	2.6	3.3	3.8	4.3	4.6	4.9	5.0	5.1
	M_{sep}	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	5.9	6.9	7.9	8.9	9.9
	M_{vija}	0.0	30.0	55.8	77.7	96.0	111.0	122.8	131.6	137.7	141.1	141.9
	M_1	0.0	35.9	67.1	93.8	116.5	135.2	150.3	162.0	170.3	175.5	177.5
M_{max}	$M_o + M_1$	0.0	54.1	101.6	142.7	177.8	207.0	230.8	249.1	262.2	270.3	273.3
Envolvente Fuerzas	$F_{i min}$ [15.8e]	0.0	27832	76364	118532	154589	184755	209226	228165	241711	249972	252040
	$F_{i max}$ [15.12b]	12977 2	159060	185265	208386	228425	245381	259255	270045	277752	282376	283750
Acero Asumido	# torones asumido	8	8	8	8	12	12	14	14	14	14	14
	$A_{ps} = \# \text{ torones} \cdot 1.40 \text{ cm}^2$	11.20	11.20	11.20	11.20	16.80	16.80	19.60	19.60	19.60	19.60	19.60
Comprobación areas	$F_t = A_{ps} \cdot f_{ps}$	14817 6	148176	148176	148176	222264	222264	259308	259308	259308	259308	259308
	$A_c (min)$ [15.10f]	1218	1218	1218	1218	2085	2085	2519	2519	2519	2519	2520
	$A_c (min)$ [15.10g]	0	0	449	881	949	1261	1363	1559	1700	1785	1815
	$f_{t i \uparrow} (arriba) [T+]$	36.54	29.32	22.85	17.15	30.48	26.30	32.01	29.35	27.45	26.31	25.93
$f (transf.)$ M_{min}	$f_{b i \downarrow} (abajo) [C+]$	117.53	110.88	104.92	99.67	153.88	150.03	176.26	173.81	172.06	171.01	170.66
$f (servicio)$ M_{max}	$f_{t i \uparrow} (arriba) [C+]$	-30.33	-2.30	22.48	44.12	47.54	63.14	68.25	78.09	85.12	89.39	90.92
	$f_{b i \downarrow} (abajo) [T+]$	-97.55	-61.23	-29.28	-1.52	-26.55	-6.69	-14.97	-2.50	6.41	11.85	13.86

Unidades: Momentos $\text{ton} \cdot \text{m}$, Fuerzas kg , áreas de acero A_{ps} en cm^2 , esfuerzos f en kg/cm^2

- La resistencia última en el centro de la viga la podemos obtener mediante la Ecuación 5.23

$$\overbrace{0.85 \cdot f'_c \cdot b_{tr} \cdot a}^C = \overbrace{A_{ps} \cdot f_{py}}^T$$

$$a = \frac{A_{ps} \cdot f_{py}}{0.85 \cdot f'_c \cdot b_{tr}} = \frac{14 \cdot 1.60 \cdot \overbrace{0.90 \cdot f_{pu}}^{T=381024 \text{ kg}}}{0.85 \cdot 480 \cdot 150} = 6.23 \text{ cm} < 18 \text{ cm } O.K \text{ (sección rectangular)}$$

La capacidad a flexión

$$\text{La altura útil } d = y_b - e + y_t = 67.14 - 8 + 72.86 = 132$$

$$\bar{M}_u = T \cdot \left[d - \frac{a}{2} \right] = 381024 \cdot \left[\frac{132 + 18}{2} - \frac{6.23}{2} \right] \rightarrow \bar{M}_u = 559.67 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

Verificación del comportamiento dúctil de la viga, AASHTO LRFD requiere,

$$\frac{\frac{a/\beta_1}{\bar{c}}}{d} = \frac{6.23/0.71}{150} = 0.06 \leq 0.42 \rightarrow \phi = 0.90 \quad O.K$$

- El momento de agrietamiento de la sección compuesta en el centro de la viga con la Ecuación 15.22, Siendo $F = \eta \cdot F_i = 0.83 \cdot 259308 = 215226 \text{ kg}$

$$\begin{aligned} \Delta M_{cr} &= \frac{1}{m_b} \cdot \left[F \cdot (e + k_t) - M_o \right] + \frac{f_{cr} \cdot I}{y_b} \\ &= \frac{1}{0.67} \cdot \left[215226 \cdot (58 + 34.26) - 95.70 \cdot 10^5 \right] + \frac{45 \cdot 7809262}{67.14} \cdot \frac{1}{10^5} \\ &\quad \text{para llevar a ton-m de kg-cm} \end{aligned}$$

$$\Delta M_{cr} = 231.65 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

$$M_{cr} = M_o + \Delta M_{cr} = 95.70 + 231.65 = 327.35 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

- Verificaremos que la resistencia última exceda la resistencia al agrietamiento de la viga,

$$\frac{\phi \cdot \bar{M}_u}{M_{cr}} = \frac{0.90 \cdot 559.67}{327.35} = 1.54 > 1.20 \dots O.K$$

- Calcularemos los conectores de corte entre la viga Cagua 140 y la losa vaciada en sitio,

- La magnitud de la fuerza de compresión en la losa vaciada en sitio (el ala de la viga) en los apoyos ($L = 0$) es cero ($C = 0$) (El momento en los apoyos es cero).
- La magnitud de la fuerza de compresión del ala en centro de la viga ($L/2$) puede alcanzar $C_{m\acute{a}x} = T_{m\acute{a}x} = 381024 \text{ kg}$.

Por equilibrio de fuerzas horizontales en el plano de contacto entre la losa y la viga concluimos que los conectores de corte deben transferir una fuerza horizontal

$$H_u = 381024 - 0 = 381024 \text{ kg}.$$

Los conectores de corte los diseñaremos usando el principio de cortante por fricción (Capítulo 8 Sección 8.8).

La capacidad última de la superficie de contacto viene dada por la Ecuación 8.14 b

$$A_s \cdot F_y \cdot \mu > \bar{H}_u$$

Asumiremos $\mu = 1.0$ (superficie de contacto rugosa). Los conectores de corte son los mismos estribos que quedan sembrados en la viga por lo que,

$$A_s = \frac{\bar{H}_u}{4200} = \frac{381024/0.75}{4200} = 120.96 \text{ cm}^2$$

Si usamos estribos de 3/8" y dos ramas $A_{sv} = 2 \cdot 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$ nos viene que el número de estribos requerido debe ser igual o mayor a,

$$\frac{120.96}{1.42} = 85.18 \text{ estribos colocados entre } L_{M=0} \text{ y } L_{M=M_{\max}}$$

Es decir entre $L = 0$ y $L = 10 \text{ m}$ lo que arroja una separación promedio de,

$$\frac{10}{85.18} \cong 0.12 \text{ m}$$

Esta separación de estribos debe ser verificada por corte.

- Asumiendo estribos 3/8" @ 0.12 m calcularemos el máximo corte \bar{V}_u que resiste la viga. Conservadoramente asumiremos $V_c = 0.53 \cdot b_w \cdot d \cdot \sqrt{f'_c}$ que es límite inferior de V_c en 15.29

$$V_s = A_v \cdot F_y \cdot \frac{d}{s} \quad [8.9]$$

Tendríamos,

$$\bar{V}_u \leq V_c + V_s = \overbrace{0.53 \cdot 16 \cdot 150 \cdot \sqrt{480}}^{V_c=27868} + \overbrace{1.42 \cdot 4200 \cdot \frac{150}{12}}^{V_s=74550} = 102418 \text{ kg} < 5 \cdot V_c \quad O.K$$

Si el corte actuante en la viga $\bar{V}_u < 102418 \text{ kg}$ el diseño de estribos propuesto satisface los requerimientos de corte.

- Cálculo del refuerzo en las zonas donde comienzan/terminan las mangueras (Ecuación 15.28).

$$h/4 = \frac{140}{4} = 35 \text{ cm}$$

Analizando la mitad de la viga tendremos tres zonas para estudio: en $x = 9 \text{ m}$ (extremo de la viga), $x = 3 \text{ m}$, $x = 5 \text{ m}$, en donde entran en contacto con el concreto, 4 y 2 torones respectivamente. Los resultados de cálculo de A_v se resumen en la Tabla 15.3 (Figura 15.30). La magnitud de F_i se estimará asumiendo un esfuerzo en los torones $f_{ps(i)} = 0.70 \cdot f_{pu}$. El refuerzo calculado en la Tabla 15.3 será distribuido en una longitud de $h/4$ adicionalmente a los estribos de corte.

Tabla 15.3 Diseño del refuerzo transversal

$x \text{ (m)}$	# torones	$F_i \text{ (ton)}$	$A_v \text{ (cm}^2\text{)}$	Diseño
0 - 0.35	8	169.33	4.83	3/8" 2 Ramas @ 0.10 m (4)
3 - 3.35	4	84.67	2.42	3/8" 2 Ramas @ 0.20 m (2)
5 - 5.35	2	42.34	1.21	3/8" 2 Ramas @ 0.40 m (1)

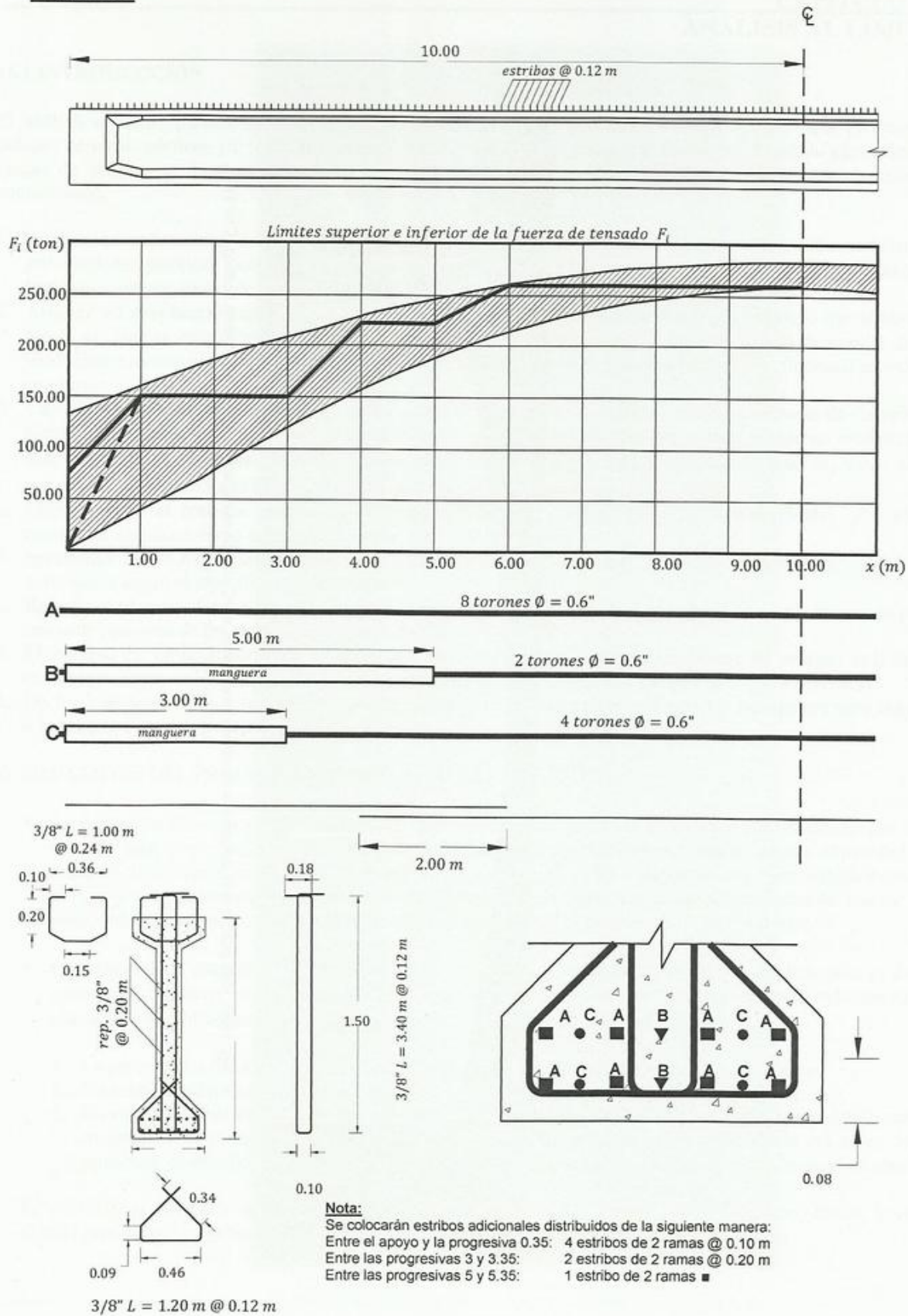
DESPIECE

Fig. 15.30 Despiece de la viga pre-tensada del Ejemplo 15.6

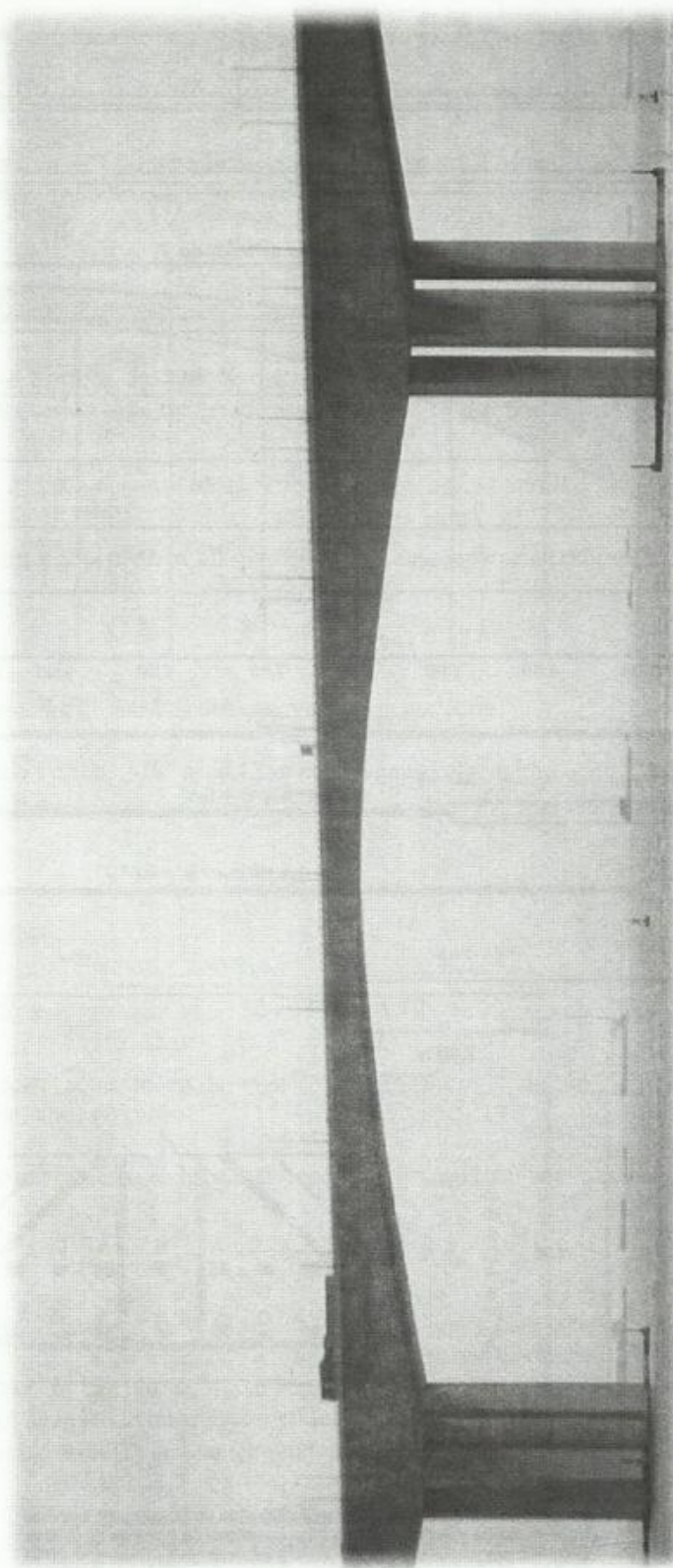


Fig. 15.31 Viga postensada construida en volados sucesivos del Canal de navegación menor del Puente Sutong (China)
Cortesía de Lutz B. Fargier G.

16.1 INTRODUCCIÓN

El análisis al límite permite calcular la carga concentrada P (ó uniformemente repartida w) que produce el colapso de vigas, pórticos y/o losas de concreto armado. El procedimiento descrito en este Capítulo para calcular cargas de colapso se basa en el teorema del límite superior de la teoría de la plasticidad y se describe a continuación,

1. **Asumir un mecanismo de colapso** para la viga/pórtico/losa en estudio. Para ello se colocaran suficientes articulaciones plásticas hasta convertir la estructura o alguno de sus miembros en inestable(s). En el caso de losas colocaremos líneas de fluencia en lugar de articulaciones. (ver Ejemplo 16.5).
2. **Asignar un desplazamiento virtual unitario** ($\Delta = 1$) al mecanismo de colapso seleccionado que simule la forma en que la estructura colapsará. Las deformaciones internas en la estructura para acomodar Δ se producirán únicamente debido a las rotaciones θ de las articulaciones plásticas (ó líneas de fluencia) asumidas en el paso 1.
3. **Calcularémos el trabajo interno (IW)** realizado por todas las articulaciones plásticas (ó líneas de fluencias). Siendo M_p el momento "plástico" de la articulación y θ su rotación plástica, el trabajo interno total será la suma de los trabajos internos de todas las articulaciones $IW = \Sigma [M_p \cdot \theta]$. En el caso de losas M_p viene dado por unidad de longitud a lo largo de la línea de fluencia, por ejemplo en $(\text{ton} \cdot \text{m})/\text{m}$.
4. **Calcularémos el trabajo externo (EW)** realizado por las carga(s) aplicadas desconocida(s) (P ó w) al recorrer el desplazamiento Δ correspondiente. $EW = \Sigma [P \cdot \Delta]$.
5. **Igualando $IW = EW$ conseguimos el valor de la carga P ó w** que hace que la estructura colapse al deformarse según el mecanismo establecido.
6. **Repetir el proceso del 1-6** para distintos mecanismos de colapso. Anotar el valor de P (ó w) requerido para producir cada uno de los mecanismos seleccionados en el paso 1.
7. El teorema del límite superior de la teoría de plasticidad establece que **el mecanismo de colapso real de la estructura entre todos los posibles, será aquel que requiere la mínima carga P ó w para activarse.**
8. De 1 y 7 se concluye que la carga P ó w calculada para un mecanismo de colapso cualquiera será mayor o igual a la carga de colapso real de la estructura.

a) LIMITANTES DEL PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS AL LÍMITE

- La estructura debe ser capaz de acomodar grandes deformaciones sin pérdida de resistencia. Es por ello que las secciones donde se producen las articulaciones plásticas deben poseer amplia capacidad de rotación. Esto ocurre en vigas con cuantías menores a $0.5 \cdot \rho_{bal}$ y en columnas con cargas axiales menores a P_{bal} y con abundantes estribos de confinamiento. Bajo estas condiciones es razonable asumir un diagrama de momento curvatura bilineal sobre el cual se basa el teorema del límite superior.
- El colapso de la estructura ocurre por el agotamiento de la resistencia a flexión de sus elementos, es decir cuando se alcanzan una resistencia $M_p = M_n$ ó \bar{M}_u en las secciones designadas como articulaciones plásticas. Por ello debemos garantizar que bajo el mecanismo de colapso real,
 1. La capacidad a flexión de los elementos no se excede en ninguna sección de la estructura.
 2. No exista posibilidad de fallas por corte.
 3. No existe posibilidad de fallas de adherencia. Debemos asegurarnos que las barras están debidamente ancladas en el concreto. Esta comprobación se puede hacer al comparar el detallado del acero de la estructura en estudio con el diagrama de momentos obtenido para las cargas que producen el colapso.

Se recomienda consultar la publicación clásica de Beedle (1958), Cohn (1965), Ferguson, Breen, y Jirsa (1988) para mayor información sobre el empleo del análisis al límite en casos prácticos.

EJEMPLO 16.1

Calcular la máxima carga P que se le puede aplicar a la viga de la Figura 16.1.

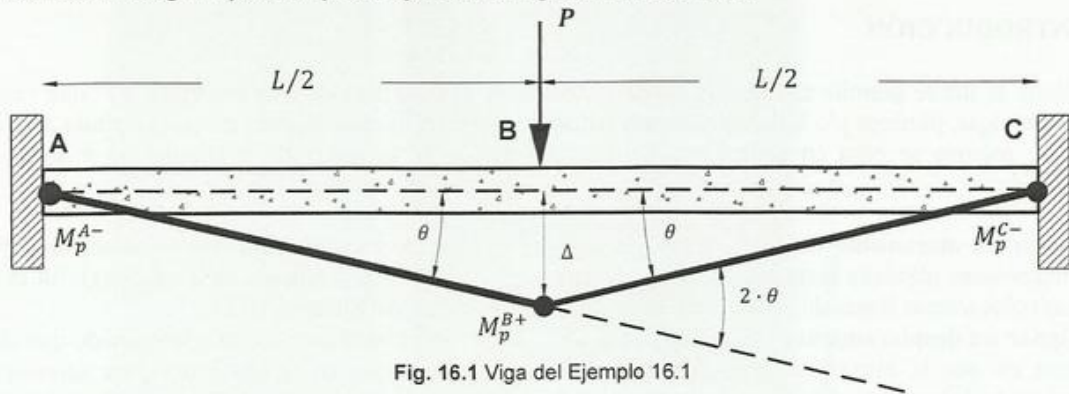


Fig. 16.1 Viga del Ejemplo 16.1

El trabajo interno realizado por las articulaciones plásticas

$$IW = M_p^{A-} \cdot (\theta) + M_p^{C-} \cdot (\theta) + M_p^{B+} \cdot (2 \cdot \theta)$$

El trabajo externo de la carga P recorriendo Δ

$$EW = P \cdot \Delta$$

Como el desplazamiento Δ es muy pequeño, igual lo será θ . Podemos entonces afirmar que

$$\tan(\theta) = \theta \rightarrow \Delta = \frac{L}{2} \cdot \tan(\theta) = \frac{L}{2} \cdot \theta \Rightarrow EW = P \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta$$

Igualando,

$$M_p^{A-} \cdot (\theta) + M_p^{C-} \cdot (\theta) + M_p^{B+} \cdot (2 \cdot \theta) = P \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta$$

Asumiendo,

$$M_p^{A-} = M_p^{C-} = M_p^{B+} = M_p \Rightarrow IW = 4 \cdot \theta \cdot M_p$$

Igualando $IW = EW$ nos viene,

$$P = \frac{8 \cdot M_p}{L} \blacksquare$$

EJEMPLO 16.2

Calcular la máxima carga w que se le puede aplicar a la viga de la Figura 16.2.

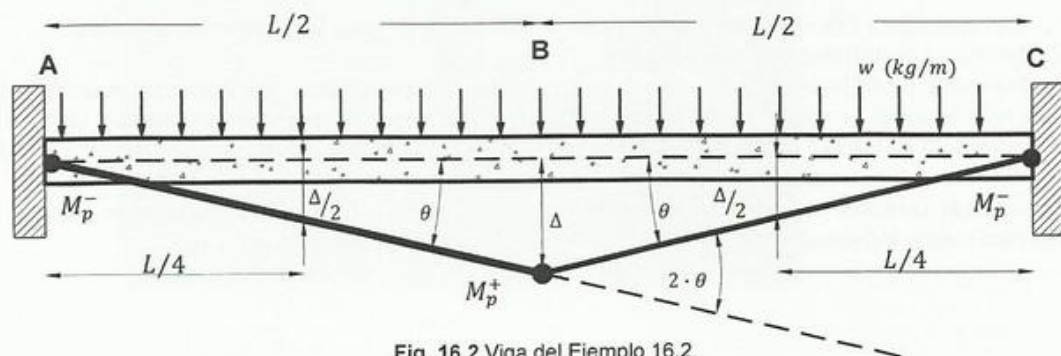


Fig. 16.2 Viga del Ejemplo 16.2

El trabajo interno realizado por las articulaciones asumiendo $M_p^- = M_p^+$ no varía con respecto al del Ejemplo 16.1

$$IW = 4 \cdot \theta \cdot M_p$$

El trabajo externo se calculará para el tramo AB y el tramo BC por separado,

$$EW = \overbrace{(w \cdot L/2) \cdot \frac{\Delta}{2}}^{EW \text{ A-B}} + \overbrace{(w \cdot L/2) \cdot \frac{\Delta}{2}}^{EW \text{ B-C}} = \frac{w \cdot L}{2} \cdot \Delta$$

Del Ejemplo 16.1 sabemos que,

$$\Delta = \frac{L}{2} \cdot \theta$$

Sustituyendo nos viene,

$$EW = \frac{w \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta = \frac{w \cdot L^2}{4} \cdot \theta$$

Igualando,

$$\overbrace{4 \cdot \theta \cdot M_p}^{IW} = \overbrace{\frac{w \cdot L^2}{4} \cdot \theta}^{EW}$$

De donde se obtiene,

$$w = \frac{16 \cdot M_p}{L^2} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 16.3

Calcular la máxima carga w que se le puede aplicar a la viga de la Figura 16.3.

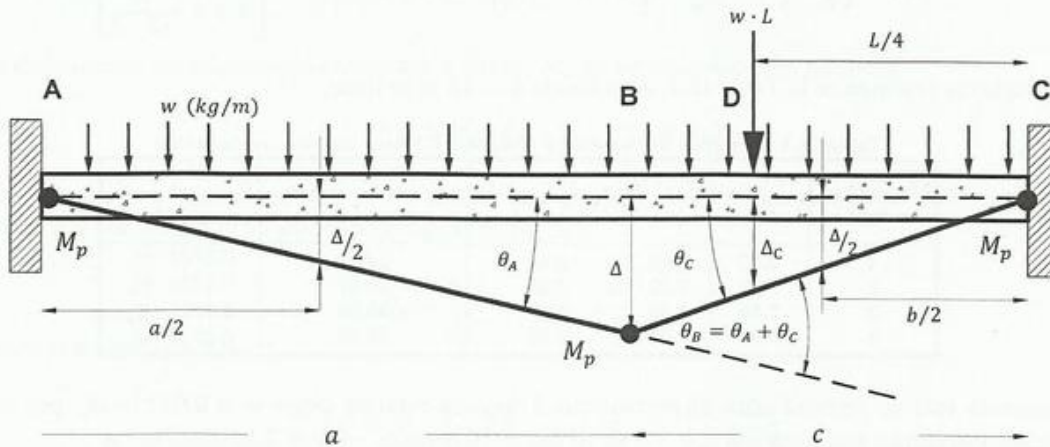


Fig. 16.3 Viga del Ejemplo 16.3

El trabajo interno realizado por las articulaciones plásticas

$$IW = M_p^{A-} \cdot (\theta_A) + M_p^{C-} \cdot (\theta_C) + M_p^{B+} \cdot (\theta_B)$$

Asumiendo una capacidad M_p a lo largo de toda la viga para momentos positivos y negativos,

$$IW = M_p \cdot (\theta_A + \theta_B + \theta_C)$$

Encontraremos la relación entre θ_i y Δ . Debido a que Δ es muy pequeño, podemos afirmar,

$$\theta_A = \frac{\Delta}{a} \quad \theta_C = \frac{\Delta}{c} \quad \theta_B = \theta_A + \theta_C = \frac{\Delta}{a} + \frac{\Delta}{c}$$

El trabajo interno quedará así,

$$IW = M_p \cdot \left[\frac{\theta_A}{a} + \frac{\theta_C}{c} + \frac{\theta_B}{a+c} \right] = M_p \cdot \Delta \cdot \left[\frac{2}{a} + \frac{2}{c} \right]$$

El trabajo externo de la carga P recorriendo Δ ,

$$EW = (w \cdot a) \cdot \frac{\Delta}{2} + (w \cdot c) \cdot \frac{\Delta}{2} + (w \cdot L) \cdot \Delta_c$$

Encontraremos la relación entre Δ_c y Δ ,

$$\frac{\Delta}{c} = \frac{\Delta_c}{L/4} \Rightarrow \Delta_c = \frac{\Delta}{c} \cdot \frac{L}{4}$$

Sustituyendo nos viene,

$$EW = (w \cdot a) \cdot \frac{\Delta}{2} + (w \cdot c) \cdot \frac{\Delta}{2} + (w \cdot L) \cdot \frac{\Delta}{c} \cdot \frac{L}{4} \Rightarrow EW = \frac{w \cdot \Delta}{2} \cdot \left[a + c + \frac{L^2}{2 \cdot c} \right]$$

Igualando,

$$M_p \cdot \Delta \cdot \left[\frac{2}{a} + \frac{2}{c} \right] = \frac{w \cdot \Delta}{2} \cdot \left[a + c + \frac{L^2}{2 \cdot c} \right] \Rightarrow w = 2 \cdot M_p \cdot \frac{\left[\frac{2}{a} + \frac{2}{c} \right]}{\left[a + c + \frac{L^2}{2 \cdot c} \right]}$$

Los resultados se resumen en la Tabla 16.1. Asumiendo $L = 10 \text{ m}$ se tiene,

Tabla 16.1. Resumen de resultados Ejemplo 16.3 para distintos mecanismos

Mecanismo No.	a (m)	c (m)	$\left[\frac{2}{a} + \frac{2}{c} \right]$	$\left[a + c + \frac{L^2}{2 \cdot c} \right]$	w
1	6.50	3.50	0.88	24.29	$0.0724 \cdot M_p$
2	7.00	3.00	0.95	26.67	$0.0714 \cdot M_p$
3	7.50	2.50	1.07	30.00	$0.0711 \cdot M_p$
4	8.00	2.00	1.25	35.00	$0.0714 \cdot M_p$

El mecanismo real se formará para el mecanismo 3 bajo la mínima carga $w = 0.0711 \cdot M_p$ por lo que la articulación aparecerá a una distancia $a = 7.5 \text{ m}$. Si $M_p = 10 \text{ ton} \cdot \text{m} \rightarrow w = 7.11 \text{ ton/m}^2$ ■

EJEMPLO 16.4

Calcular la máxima carga w que se le puede aplicar a la viga continua de la Figura 16.4, $L = 10 \text{ m}$.

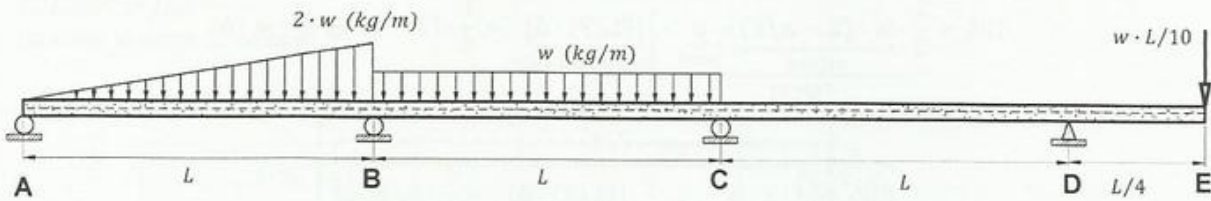


Fig. 16.4 Viga del Ejemplo 16.4

Estudiaremos los mecanismos para cada uno de los tramos.

• Tramo AB

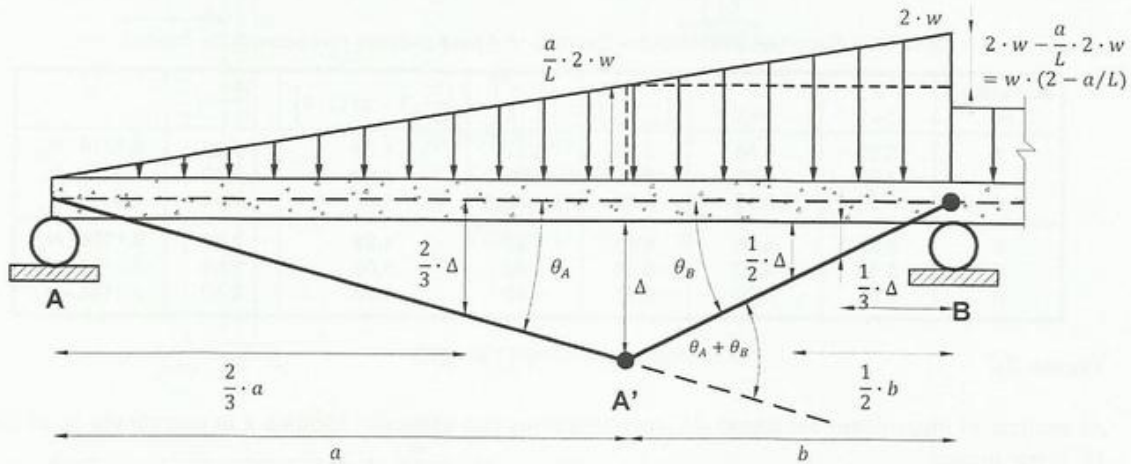


Fig. 16.5 Mecanismo en el tramo AB

El trabajo interno asumiendo una capacidad a flexión M_p de las articulaciones plásticas,

$$IW = M_p \cdot \theta_B + M_p \cdot (\theta_A + \theta_B)$$

En A tenemos una articulación real, por lo que no habrá trabajo interno. Encontraremos la relación entre θ_i y Δ . Debido a que Δ es muy pequeño, podemos afirmar,

$$\theta_A = \frac{\Delta}{a} \quad \theta_B = \frac{\Delta}{b}$$

El trabajo interno quedará así,

$$IW = M_p \cdot \left[\frac{\Delta}{a} + 2 \cdot \frac{\Delta}{b} \right] = M_p \cdot \Delta \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right]$$

El trabajo externo,

$$EW_1 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{L} \cdot 2 \cdot w}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{\frac{a}{3} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \Delta \right]}_{\text{desplazamiento}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{L} \cdot w \cdot \Delta$$

triángulo entre A y A'

$$EW_2 = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{w \cdot (2 - a/L)}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{b}_{\text{base}} \cdot \underbrace{[(1/3) \cdot \Delta]}_{\text{desplazamiento}} = \frac{1}{6} \cdot (2 - a/L) \cdot b \cdot w \cdot \Delta$$

$$EW_3 = \frac{a}{L} \cdot \underbrace{2 \cdot w}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{b}_{\text{base}} \cdot \underbrace{[(1/2) \cdot \Delta]}_{\text{desplazamiento}} = \frac{a}{L} \cdot b \cdot w \cdot \Delta$$

Igualando obtendremos,

$$w = \frac{M_p \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right]}{\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{L} \right] + \left[\frac{1}{6} \cdot (2 - a/L) \cdot b \right] + \left[\frac{a}{L} \cdot b \right]}$$

Tabla 16.2. Resumen de resultados Ejemplo 16.4 para distintos mecanismos de colapso

Mecanismo No.	a (m)	b (m)	$\left[\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right]$	$\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{L} \right]$	$\left[\frac{1}{6} \cdot (2 - a/L) \cdot b \right]$	$\left[\frac{a}{L} \cdot b \right]$	w
1	3.50	6.50	0.59	0.82	1.79	2.28	$0.1216 \cdot M_p$
2	4.00	6.00	0.58	1.07	1.60	2.40	$0.1151 \cdot M_p$
3	4.50	5.50	0.59	1.35	1.42	2.48	$0.1117 \cdot M_p$
4	5.00	5.00	0.60	1.67	1.25	2.50	$0.1108 \cdot M_p$
5	5.50	4.50	0.63	2.02	1.09	2.48	$0.1123 \cdot M_p$
6	6.00	4.00	0.67	2.40	0.93	2.40	$0.1163 \cdot M_p$

• Tramo BC

Al analizar el mecanismo del tramo BC encontraremos una situación idéntica a la encontrada en el Ejemplo 16.2, por lo que

$$w = \frac{16 \cdot M_p}{L^2} \quad \text{si } L = 10 \text{ m} \rightarrow w = 0.16 \cdot M_p$$

• Tramo CD

No hay cargas aplicadas.

• Tramo DE (volado)

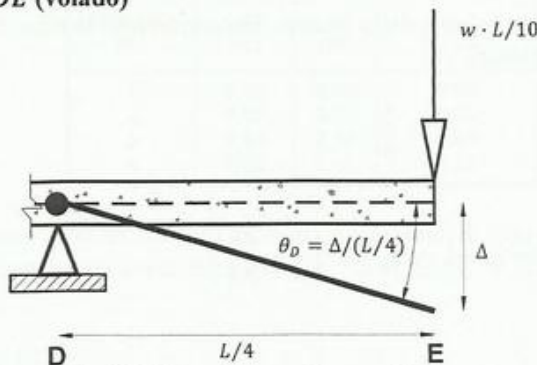


Fig. 16.6 Mecanismo en el tramo DE

Trabajo interno

$$IW = M_p \cdot \frac{(\Delta)}{L/4}$$

Trabajo externo

$$EW = w \cdot \frac{L}{10} \cdot (\Delta)$$

Igualando y si $L = 10 \text{ m}$

$$w = 0.40 \cdot M_p$$

• Conclusión

Tomaremos el menor valor de w que en este caso corresponde al encontrado en el tramo AB.

$$w = 0.1108 \cdot M_p \quad \blacksquare$$

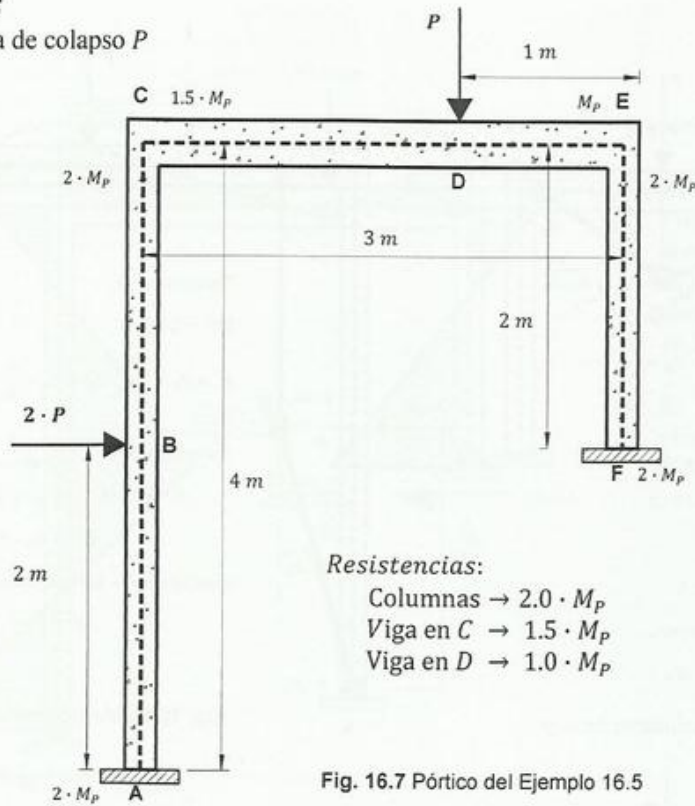
EJEMPLO 16.5Calcular la carga de colapso P 

Fig. 16.7 Pórtico del Ejemplo 16.5

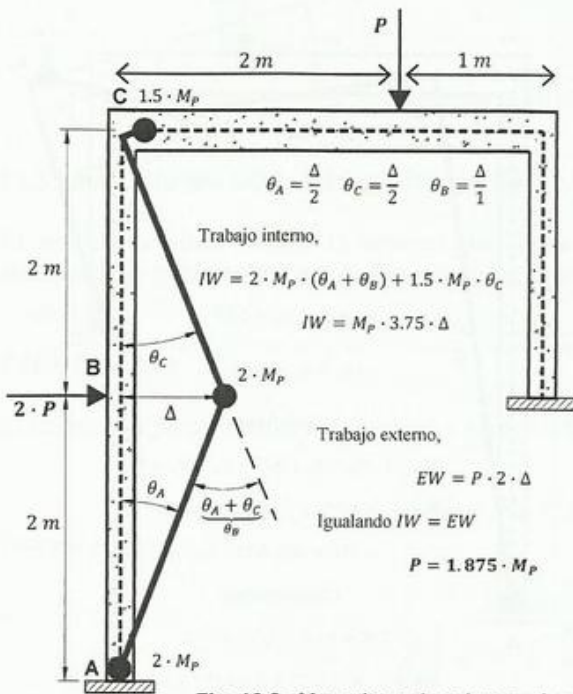


Fig. 16.8a Mecanismo de columna-viga

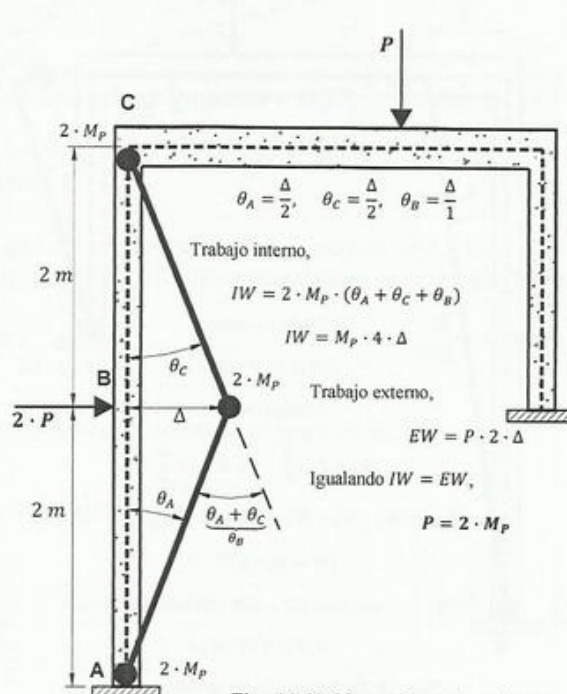
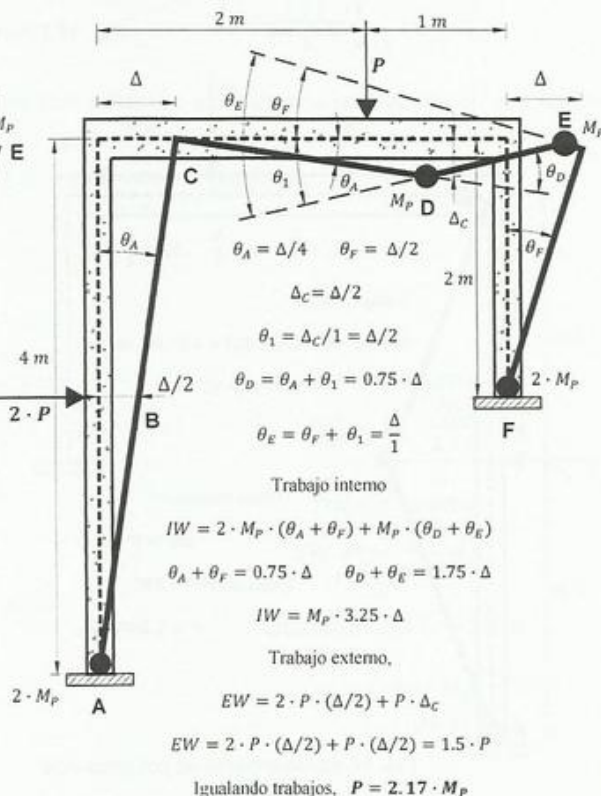
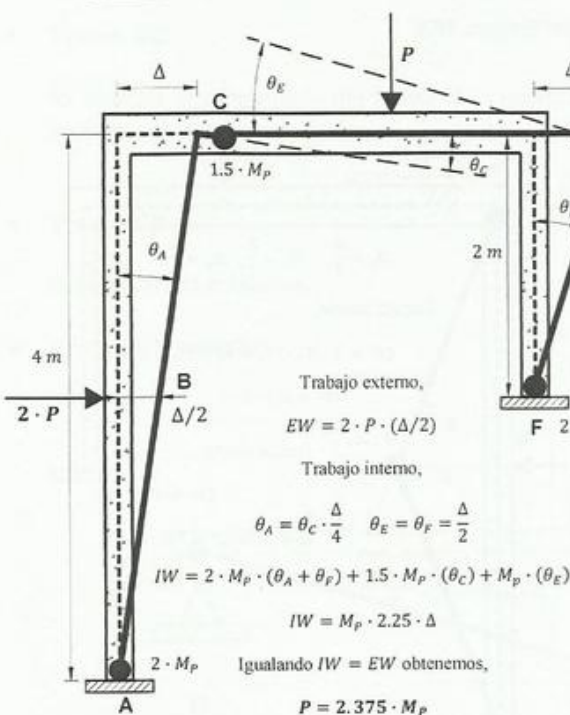
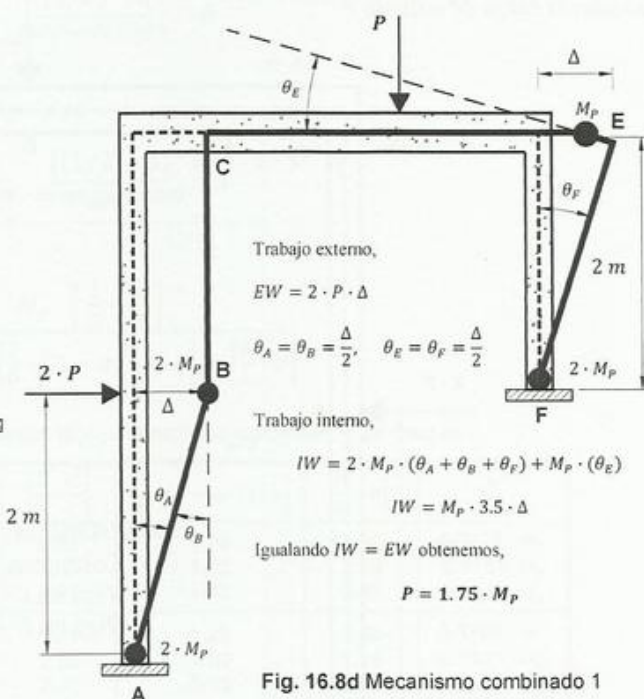
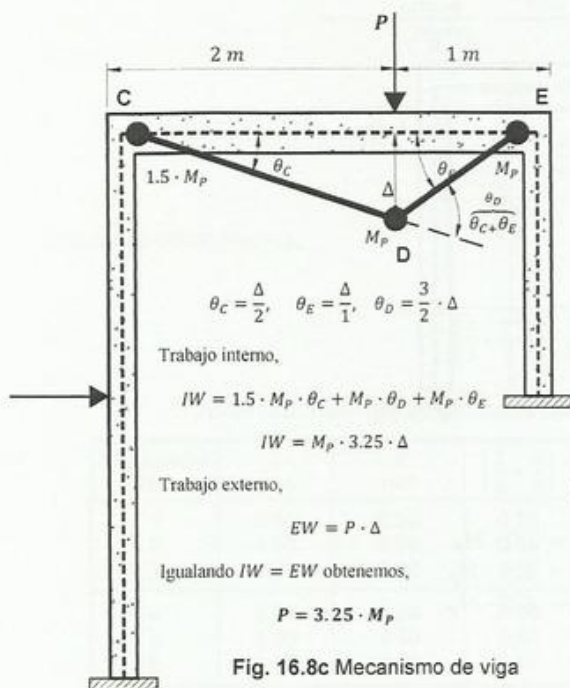


Fig. 16.8b Mecanismo de columna



El mecanismo correcto es el que sugiere el menor valor de P y se muestra en la Figura 16.8d. Asumiendo $M_p = 10 \text{ ton} \cdot \text{m} \rightarrow P = 17.5 \text{ ton}$. El diagrama de momentos obtenido por estática se muestra en la Figura 16.8g.

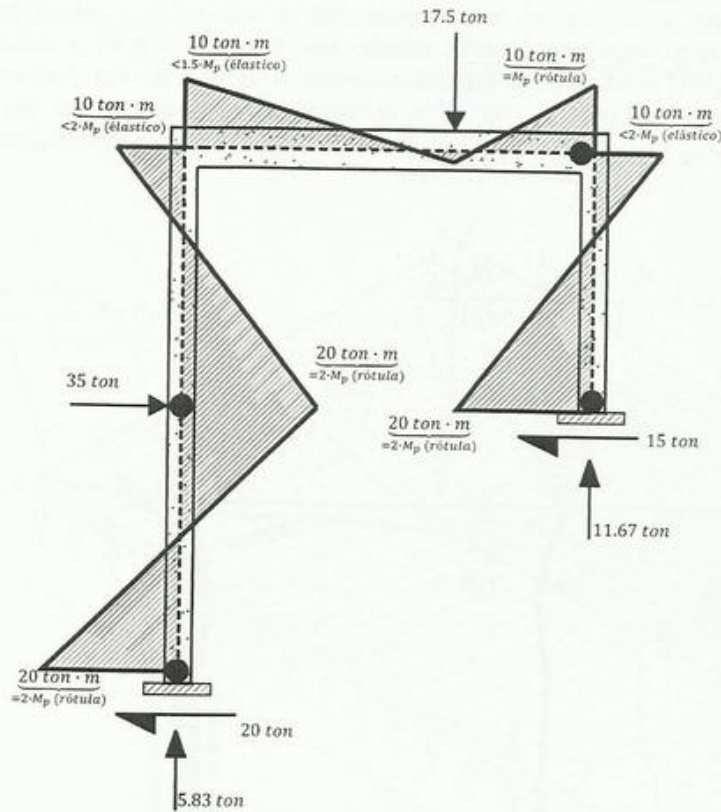


Fig. 16.8g Diagrama de momentos al instante del colapso –mecanismo combinado 1, Figura 16.8d– Ejemplo 16.5

Observaciones

- El diagrama de momentos de la Figura 16.8g y su inteligente comparación con el detallado de la estructura servirá para hacer los chequeos establecidos en la Sección 16.2.
- En este ejercicio se ha ignorado el efecto de la carga axial sobre la capacidad a flexión de las columnas.

16.2 ANÁLISIS DE LOSAS POR LÍNEAS DE FLUENCIA

El análisis de losas usando el teorema del límite superior se ilustra con el Ejemplo 16.6. Las rótulas o articulaciones plásticas son sustituidas por líneas de fluencia, con las mismas propiedades (ver Ejemplo 16.6).

EJEMPLO 16.6

El refuerzo es perpendicular a los apoyos y la capacidad de la losa se estima en (Figura 16.9),

$$M_p^+ = M_p^- = M_p = 1160 \frac{\text{ton} \cdot \text{m}}{\text{m}}$$

Trabajo externo,

$$EW = \overbrace{a \cdot L \cdot w \cdot \frac{\Delta}{2}}^{\text{segmento } ABCD} + \overbrace{b \cdot 3 \cdot w \cdot \frac{\Delta}{2}}^{\text{segmento } BDEF}$$

Trabajo interno,

$$IW = \overbrace{M_p \cdot L \cdot (\theta_A + \theta_B)}^{\text{línea } BD} + \overbrace{M_p \cdot L \cdot (\theta_B)}^{\text{línea } EF}$$

Como los ángulos son muy pequeños podemos aproximar $\tan(\theta) \cong \theta$, es decir,

$$\theta_A = \frac{\Delta}{a} \dots \dots \dots \theta_B = \frac{\Delta}{b}$$

$$\theta_A + \theta_B = \Delta \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$$

$$IW = M_p \cdot \Delta \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] + M_p \cdot \frac{\Delta}{b}$$

Igualando trabajos,

$$w = \frac{M_p \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] + M_p \cdot \frac{1}{b}}{(a/2) + (b/2)}$$

Los resultados se resumen en la Tabla 16.3

$$w \cong 0.866 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \quad \blacksquare$$

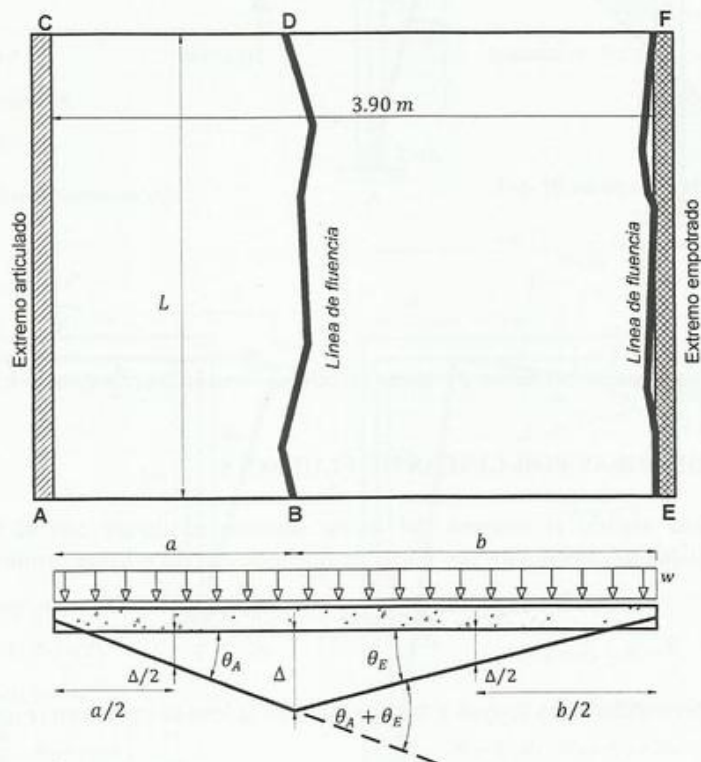


Fig. 16.9 Mecanismo de colapso para la losa -Vista en planta, Ejemplo 16.5-

Tabla 16.3 Resumen del Ejemplo 16.5

Mecanismo No.	a (m)	b (m)	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	$\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$	w $\left[\frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right]$
1	1.2	2.7	1.204	1.950	0.912
2	1.4	2.5	1.114	1.950	0.878
3	1.6	2.3	1.060	1.950	0.866
4	1.8	2.1	1.032	1.950	0.874

El Ejemplo 16.5 trata el caso de líneas de fluencia perpendiculares al refuerzo principal. En la práctica es común encontrar losas en las que las líneas atraviesan el refuerzo con un ángulo distinto a 90 grados, sobre todo en losas armadas en dos sentidos, como se muestra en la Figura 16.10. Ésta se encuentra simplemente apoyada en los cuatro bordes, y se muestra la deformada bajo el mecanismo de colapso producido por acción de una carga uniforme w . El procedimiento para calcular la carga de colapso de la losa de la Figura 16.10 difiere del de la Figura 16.9, solo en la forma en que calculamos el trabajo interno (IW) para las líneas diagonales AB , CB , FE , y GE que las atraviesan barras paralelas a los ejes x e y , que producen momentos plásticos M_{py} y M_{px} , respectivamente.

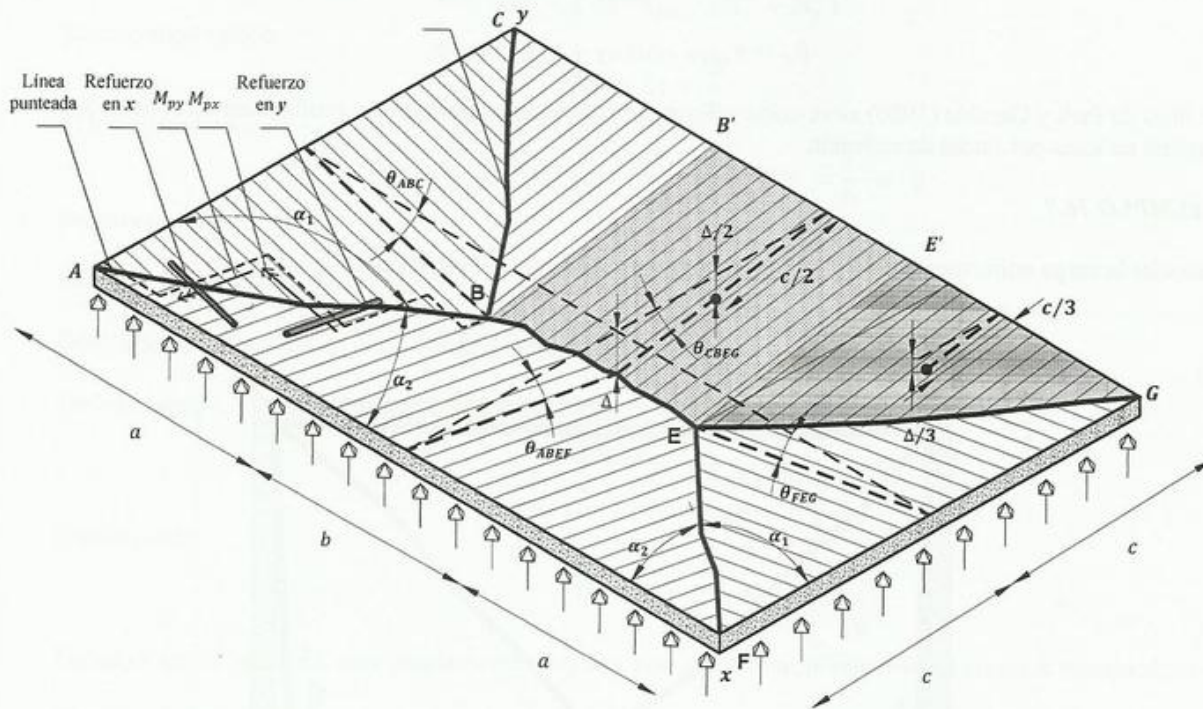


Fig. 16.10 Mecanismo de colapso de una losa con refuerzo en dos direcciones

Asumiremos que la línea de fluencia AB es remplazada por la línea punteada que se indica en la Figura. La línea es perpendicular a las barras en las dos direcciones principales. El trabajo interno producido por la línea de fluencia AB de longitud $d = \sqrt{a^2 + c^2}$, y capacidad a flexión M_{pd} al rotar un ángulo θ_d será igual al producido por las barras en que cruzan la diagonal es decir,

$$\frac{IW \text{ de } AB}{M_{pd} \cdot d \cdot \theta_d} = \frac{\text{Contribución de } ABEF \text{ al } IW \text{ de } AB}{M_{px} \cdot a \cdot \theta_{ABEF}} + \frac{\text{Contribución de } ABC \text{ al } IW \text{ de } AB}{M_{py} \cdot c \cdot \theta_{ABC}} \quad [16.1]$$

Los cálculos se simplifican si analizáramos la losa por segmentos. Por ejemplo, para la diagonal AB , la componente de trabajo $M_{px} \cdot a \cdot \theta_{ABEF}$ la calcularemos al analizar el segmento $ABEF$ y por otro lado, la componente $M_{py} \cdot c \cdot \theta_{ABC}$ se calculará cuando analicemos el segmento ABC . Por lo tanto no es necesario calcular el lado izquierdo de la Ecuación 16.1. Se cree conveniente estudiar la relación entre la rotación de los segmentos θ_{ABEF} , θ_{ABC} y θ_d .

Por geometría obtenemos,

$$\theta_d = \frac{\Delta}{d \cdot \tan(\alpha_2)} + \frac{\Delta}{d \cdot \tan(\alpha_1)}$$

Además sabemos que,

$$\theta_{ABEF} = \frac{\Delta}{\underbrace{d \cdot \sin \alpha_2}_c} \rightarrow d = \frac{\Delta}{\theta_{ABEF} \cdot \sin \alpha_2} \quad y \quad \theta_{ABC} = \frac{\Delta}{\underbrace{d \cdot \sin \alpha_1}_a} \rightarrow d = \frac{\Delta}{\theta_{ABC} \cdot \sin \alpha_1}$$

Podemos concluir,

$$\theta_d = \frac{\Delta}{\underbrace{\frac{\Delta}{\theta_{ABEF}} \cdot \frac{\tan \alpha_2}{\sin \alpha_2}}_{\cos \alpha_2}} + \frac{\Delta}{\underbrace{\frac{\Delta}{\theta_{ABC}} \cdot \frac{\tan \alpha_1}{\sin \alpha_1}}_{\cos \alpha_1}}$$

$$\theta_d = \theta_{ABEF} \cdot \cos \alpha_2 + \theta_{ABC} \cdot \cos \alpha_1$$

El libro de Park y Gamble (1980) sirve como referencia a los lectores que quieran profundizar en el tema del análisis de losas por líneas de cedencia.

EJEMPLO 16.7

Calcular la carga uniformemente repartida que produce el colapso de la losa de la Figura 16.11

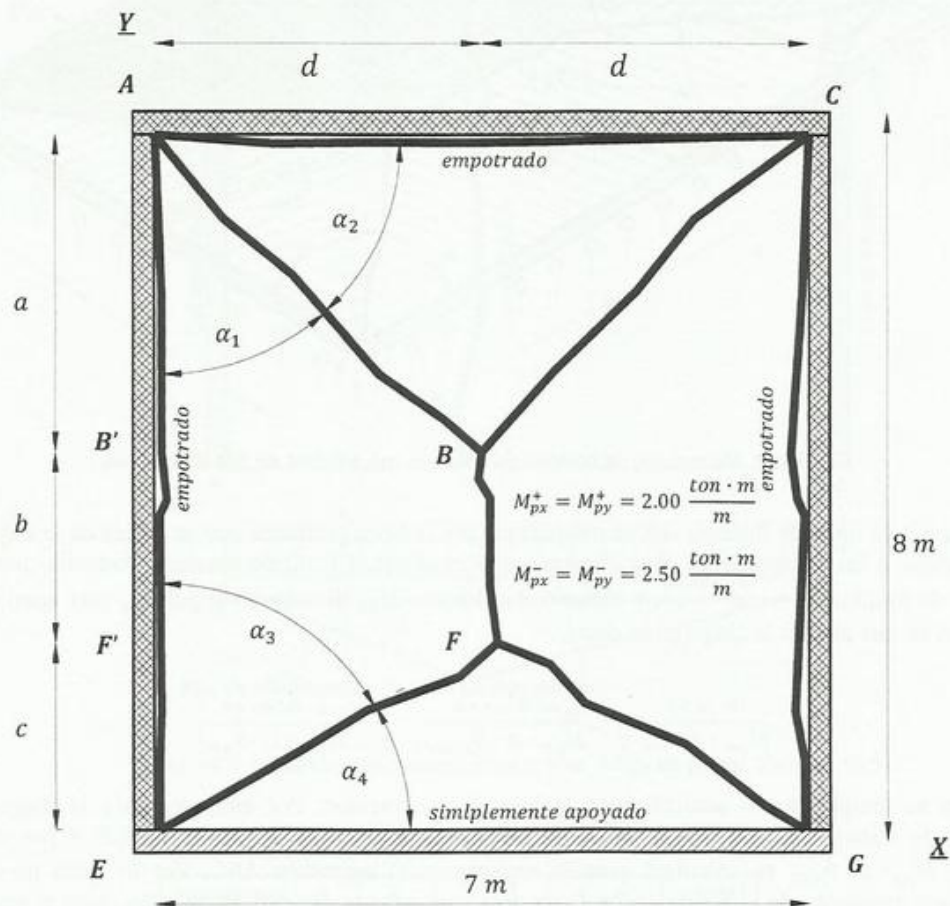


Fig. 16.11 Mecanismo de colapso posible de una losa con refuerzo en dos direcciones. Ejemplo 16.7

Asignaremos un desplazamiento Δ a la línea de fluencia BF .

- Segmento ABC

Rotación del segmento $\theta_{ABC} = \Delta/a$

Desplazamiento vertical en el centroide de segmento ABC es $\Delta/3$

Trabajo interno,

$$IW = \underbrace{M_p^- \cdot (2 \cdot d) \cdot \theta_{ABC}}_{IW \text{ de } AC} + \underbrace{M_p^+ \cdot (d + d) \cdot \theta_{ABC}}_{\substack{M_p^+ \cdot d \cdot \theta_{ABC} \rightarrow \text{contribución al } IW \text{ de } AB \\ M_p^+ \cdot d \cdot \theta_{ABC} \rightarrow \text{contribución al } IW \text{ de } BC}}$$

$$\Rightarrow IW = 2 \cdot d \cdot \theta_{ABC} \cdot (M_p^+ + M_p^-)$$

Sustituyendo valores

$$IW = 31.5 \cdot \frac{\Delta}{a}$$

El trabajo externo,

$$EW = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot d) \cdot (a) \cdot \left[\frac{\Delta}{3} \right] \Rightarrow EW = \frac{7}{6} \cdot a \cdot \Delta$$

- Segmento EFG

Rotación del segmento $\theta_{EFG} = \Delta/c$

Desplazamiento vertical en el centroide de segmento EFG es $\Delta/3$

Trabajo interno,

$$IW = \underbrace{M_p^+ \cdot (d + d) \cdot \theta_{EFG}}_{\substack{M_p^+ \cdot d \cdot \theta_{EFG} \rightarrow \text{contribución al } IW \text{ de } EF \\ M_p^+ \cdot d \cdot \theta_{EFG} \rightarrow \text{contribución al } IW \text{ de } FG}}$$

Sustituyendo,

$$IW = 14 \cdot \frac{\Delta}{c}$$

Debido a que el borde EG esta simplemente apoyado, este podrá rotar libremente sin producir trabajo alguno.

El trabajo externo, w

$$EW = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot d) \cdot (c) \cdot \left[\frac{\Delta}{3} \right]$$

Para el ejemplo en estudio nos viene,

$$EW = \frac{7}{6} \cdot c \cdot \Delta$$

- Segmento $ABFE = CBFG$

Rotación del segmento

$$\theta_{ABFE} = \frac{\Delta}{d}$$

El segmento $ABFE$ lo podemos separar en dos triángulos (ABB' y AFF') y un rectángulo $BB'FF'$. El desplazamiento vertical en el centroide de los triángulos es de $\Delta/3$ y en el centroide del rectángulo $\Delta/2$.

Trabajo interno,

$$IW = \underbrace{M_p^- \cdot (a + b + c) \cdot \theta_{ABFE}}_{IW \text{ de } AE} + \underbrace{M_p^+ \cdot (a + b + c) \cdot \theta_{ABFE}}_{\substack{M_p^+ \cdot a \cdot \theta_{ABFE} \rightarrow \text{contribución al } IW \text{ de } AB \\ M_p^+ \cdot b \cdot \theta_{ABFE} \rightarrow \text{contribución al } IW \text{ de } BF \\ M_p^+ \cdot c \cdot \theta_{ABFE} \rightarrow \text{contribución al } IW \text{ de } FE}}$$

$$\Rightarrow IW = (a + b + c) \cdot \theta_{ABFE} \cdot (M_p^- + M_p^+)$$

En nuestro caso,

$$IW = \frac{72}{7} \cdot \Delta$$

El trabajo externo,

$$EW = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (a \cdot d) \cdot \left[\frac{\Delta}{3}\right]}_{EW \text{ de } ABB'} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (c \cdot d) \cdot \left[\frac{\Delta}{3}\right]}_{EW \text{ de } AFF'} + \underbrace{(b \cdot d) \cdot \left[\frac{\Delta}{2}\right]}_{EW \text{ de } BB'FF'}$$

$$EW = \left[\frac{1}{3} \cdot (a + c) + b\right] \cdot \frac{3.5}{2} \cdot \Delta$$

Los resultados para el mecanismo de colapso de la Figura 16.11 se resumen en la Tabla 16.4

Tabla 16.4 Resumen de resultados del Ejemplo 16.7 para distintos mecanismos de colapso

Mecanismo No.	a (m)	b (m)	c (m)	ABC		EFG		ABFE=CBFG		Totales		w ton/m ²
				IW	EW	IW	EW	IW	EW	Σ IW	Σ EW	
1	1	1	6	31.5	1.2	2.3	7.0	10.3	5.8	54.4	19.8	2.74
2	1	2	5	31.5	1.2	2.8	5.8	10.3	7.0	54.9	21.0	2.61
3	1	3	4	31.5	1.2	3.5	4.7	10.3	8.2	55.6	22.2	2.51
4	1	4	3	31.5	1.2	4.7	3.5	10.3	9.3	56.7	23.3	2.43
5	1	5	2	31.5	1.2	7.0	2.3	10.3	10.5	59.1	24.5	2.41
6	1	6	1	31.5	1.2	14.0	1.2	10.3	11.7	66.1	25.7	2.57
7	1	7	0	31.5	1.2	280.0	0.1	10.3	12.8	332.1	26.8	12.40
8	2	1	5	15.8	2.3	2.8	5.8	10.3	5.8	39.1	19.8	1.97
9	2	2	4	15.8	2.3	3.5	4.7	10.3	7.0	39.8	21.0	1.90
10	2	3	3	15.8	2.3	4.7	3.5	10.3	8.2	41.0	22.2	1.85
11	2	4	2	15.8	2.3	7.0	2.3	10.3	9.3	43.3	23.3	1.86
12	2	5	1	15.8	2.3	14.0	1.2	10.3	10.5	50.3	24.5	2.05
13	2	6	0	15.8	2.3	280.0	0.1	10.3	11.6	316.3	25.6	12.35
14	3	1	4	10.5	3.5	3.5	4.7	10.3	5.8	34.6	19.8	1.74
15	3	2	3	10.5	3.5	4.7	3.5	10.3	7.0	35.7	21.0	1.70
16	3	3	2	10.5	3.5	7.0	2.3	10.3	8.2	38.1	22.2	1.72
17	3	4	1	10.5	3.5	14.0	1.2	10.3	9.3	45.1	23.3	1.93
18	3	5	0	10.5	3.5	280.0	0.1	10.3	10.4	311.1	24.4	12.73
19	4	1	3	7.9	4.7	4.7	3.5	10.3	5.8	33.1	19.8	1.67
20	4	2	2	7.9	4.7	7.0	2.3	10.3	7.0	35.4	21.0	1.69
21	4	3	1	7.9	4.7	14.0	1.2	10.3	8.2	42.4	22.2	1.91
22	4	4	0	7.9	4.7	280.0	0.1	10.3	9.3	308.4	23.3	13.25
23	5	1	2	6.3	5.8	7.0	2.3	10.3	5.8	33.9	19.8	1.71
24	5	2	1	6.3	5.8	14.0	1.2	10.3	7.0	40.9	21.0	1.95
25	5	3	0	6.3	5.8	280.0	0.1	10.3	8.1	306.9	22.1	13.88
26	6	1	1	5.3	7.0	14.0	1.2	10.3	5.8	39.8	19.8	2.01
27	6	2	0	5.3	7.0	280.0	0.1	10.3	6.9	305.8	20.9	14.60
28	7	1	0	4.5	8.2	280.0	0.1	10.3	5.8	305.1	19.8	15.43

Otro de los mecanismos posibles se muestra en la Figura 16.12. Los cálculos para este mecanismo se presentan a continuación.

• Segmento ABF = ECG

Rotación del segmento $\theta_{ABF} = \Delta/a$

Desplazamiento vertical en el centroide de segmento ABF es $\Delta/3$.

Trabajo interno,

$$IW = \underbrace{M_p^- \cdot (c + d) \cdot \theta_{ABF}}_{IW \text{ de } AC} + \underbrace{M_p^+ \cdot (c + d) \cdot \theta_{ABF}}_{\substack{M_p^+ \cdot c \cdot \theta_{ABF} \rightarrow \text{contribución al IW de } AB \\ M_p^+ \cdot d \cdot \theta_{ABF} \rightarrow \text{contribución al IW de } BF}}$$

$$\Rightarrow IW = (c + d) \cdot \theta_{ABC} \cdot (M_p^+ + M_p^-) \Rightarrow IW = 36 \cdot \frac{\Delta}{a}$$

El trabajo externo,

$$EW = \frac{1}{2} \cdot (c + d) \cdot (a) \cdot \left[\frac{\Delta}{3} \right] \Rightarrow EW = \frac{4}{3} \cdot a \cdot \Delta$$

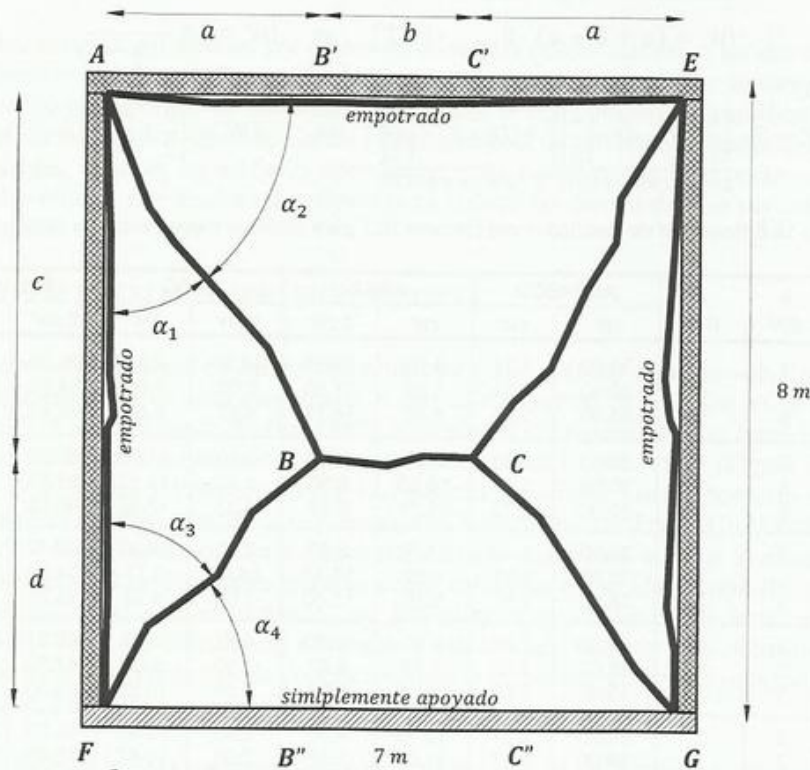


Fig. 16.12 Mecanismo de colapso posible de una losa con refuerzo en dos direcciones. Ejemplo 16.7

• Segmento ABCE

Rotación del segmento $\theta_{ABCE} = \Delta/c$

En el segmento ABCE tenemos: dos triángulos (ABB' y ECC') y el rectángulo BB'CC'. El desplazamiento vertical en el centroide de los triángulos es de $\Delta/3$ y en el centroide del rectángulo $\Delta/2$.

Trabajo interno,

$$IW = \underbrace{M_p^- \cdot (a + b + a) \cdot \theta_{ABCE}}_{IW \text{ de } AE} + \underbrace{M_p^+ \cdot (a + b + a) \cdot \theta_{ABCE}}_{\substack{M_p^+ \cdot a \cdot \theta_{ABCE} \rightarrow \text{contribución al IW de } AB \\ M_p^+ \cdot b \cdot \theta_{ABCE} \rightarrow \text{contribución al IW de } BC \\ M_p^+ \cdot a \cdot \theta_{ABCE} \rightarrow \text{contribución al IW de } CE}}$$

$$IW = (a + b + a) \cdot \theta_{ABCE} \cdot (M_p^- + M_p^+) \Rightarrow IW = \frac{63}{2} \cdot \frac{\Delta}{c}$$

El trabajo externo,

$$EW = 2 \cdot \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \cdot (a \cdot c) \cdot \left[\frac{\Delta}{3} \right] \right\}}_{EW \text{ de } ABB' \text{ y } ECC'} + \underbrace{(b \cdot c) \cdot \left[\frac{\Delta}{2} \right]}_{EW \text{ de } BB'CC'} \Rightarrow EW = \left[\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right] \cdot c \cdot \Delta$$

• Segmento *FBCG*

Rotación del segmento $\theta_{FBCG} = \Delta/d \Rightarrow \theta_{FBCG} = \Delta/(8-c)$

Trabajo interno, $IW = \underbrace{M_p^+ \cdot (a+b+a) \cdot \theta_{FBCG}}_{\substack{M_p^+ \cdot a \cdot \theta_{FBCG} \rightarrow \text{contribución al IW de FB} \\ M_p^+ \cdot b \cdot \theta_{FBCG} \rightarrow \text{contribución al IW de BC} \\ M_p^+ \cdot a \cdot \theta_{FBCG} \rightarrow \text{contribución al IW de CG}}}$

$$IW = (a+b+a) \cdot \theta_{FBCG} \cdot (M_p^+) \Rightarrow IW = 14 \cdot \frac{\Delta}{(8-c)}$$

El trabajo externo,

$$EW = 2 \cdot \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \cdot (a \cdot d) \cdot \left[\frac{\Delta}{3} \right] \right\}}_{EW \text{ de } FBB'' \text{ y } GCC''} + \underbrace{(b \cdot d) \cdot \left[\frac{\Delta}{2} \right]}_{EW \text{ de } BB''CC''} \Rightarrow EW = \left[\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right] \cdot (8-c) \cdot \Delta$$

Tabla 16.5 Resumen de resultados del Ejemplo 16.7 para distintos mecanismos de colapso

Mecanismo No.	a (m)	b (m)	c (m)	ABF=ECG		ABCE		FBCG		Totales		w ton/m ²
				IW	EW	IW	Σ IW	Σ IW	EW	Σ IW	Σ IW	
29	1.0	5	7	36.00	1.33	4.50	19.83	14.00	2.83	90.50	25.33	3.57
30	1.0	5	6	36.00	1.33	5.25	17.00	7.00	5.67	84.25	25.33	3.33
31	1.0	5	5	36.00	1.33	6.30	14.17	4.67	8.50	82.97	25.33	3.28
32	1.0	5	4	36.00	1.33	7.88	11.33	3.50	11.33	83.38	25.33	3.29
33	1.0	5	3	36.00	1.33	10.50	8.50	2.80	14.17	85.30	25.33	3.37
34	1.0	5	2	36.00	1.33	15.75	5.67	2.33	17.00	90.08	25.33	3.56
35	1.0	5	1	36.00	1.33	31.50	2.83	2.00	19.83	105.50	25.33	4.16
36	2.0	3	7	18.00	2.67	4.50	15.17	14.00	2.17	54.50	22.67	2.40
37	2.0	3	6	18.00	2.67	5.25	13.00	7.00	4.33	48.25	22.67	2.13
38	2.0	3	5	18.00	2.67	6.30	10.83	4.67	6.50	46.97	22.67	2.07
39	2.0	3	4	18.00	2.67	7.88	8.67	3.50	8.67	47.38	22.67	2.09
40	2.0	3	3	18.00	2.67	10.50	6.50	2.80	10.83	49.30	22.67	2.18
41	2.0	3	2	18.00	2.67	15.75	4.33	2.33	13.00	54.08	22.67	2.39
42	2.0	3	1	18.00	2.67	31.50	2.17	2.00	15.17	69.50	22.67	3.07
43	3.0	1	7	12.00	4.00	4.50	10.50	14.00	1.50	42.50	20.00	2.13
44	3.0	1	6	12.00	4.00	5.25	9.00	7.00	3.00	36.25	20.00	1.81
45	3.0	1	5	12.00	4.00	6.30	7.50	4.67	4.50	34.97	20.00	1.75
46	3.0	1	4	12.00	4.00	7.88	6.00	3.50	6.00	35.38	20.00	1.77
47	3.0	1	3	12.00	4.00	10.50	4.50	2.80	7.50	37.30	20.00	1.87
48	3.0	1	2	12.00	4.00	15.75	3.00	2.33	9.00	42.08	20.00	2.10
49	3.0	1	1	12.00	4.00	31.50	1.50	2.00	10.50	57.50	20.00	2.88
50	3.5	0	7	10.32	4.65	4.50	8.21	14.00	1.17	39.13	18.69	2.09
51	3.5	0	6	10.32	4.65	5.25	7.04	7.00	2.35	32.88	18.69	1.76
52	3.5	0	5	10.32	4.65	6.30	5.87	4.67	3.52	31.60	18.69	1.69
53	3.5	0	4	10.32	4.65	7.88	4.69	3.50	4.69	32.01	18.69	1.71
54	3.5	0	3	10.32	4.65	10.50	3.52	2.80	5.87	33.93	18.69	1.82
55	3.5	0	2	10.32	4.65	15.75	2.35	2.33	7.04	38.71	18.69	2.07
56	3.5	0	1	10.32	4.65	31.50	1.17	2.00	8.21	54.13	18.69	2.90

La carga mínima es $w = 1.67 \text{ ton/m}^2$ para el mecanismo 19 (Tabla 16.4). Es importante destacar que el mecanismo 52 de la Tabla 16.5 arroja $w = 1.69 \text{ ton/m}^2$ y posee una geometría muy similar a la del mecanismo 19. Recomendamos al lector dibujarlos a escala y compararlos. ■

MUROS DE CORTE EN EDIFICIOS SISMO-RESISTENTES

17.1 INTRODUCCIÓN

Pocos daños estructurales han sufrido los edificios con muros de corte (adecuadamente configurados) que han estado sometidos a fuertes sismos. Al incorporar suficientes muros de corte en una estructura,

- Prácticamente se elimina la posibilidad de los mecanismos de piso o planta baja libre.
- Se minimiza la posibilidad de falla de las columnas cortas (si las hubiese).

Preferiremos las estructuras formadas por muros de corte para resistir sismos, o las que combinan muros con pórticos (ver Bertero 1984), sobre las que basan su resistencia lateral en pórticos únicamente (más comunes a la fecha en nuestro país) porque las estructuras con muros se han comportado significativamente mejor que las aporticadas durante sismos pasados. García (1996) presenta un interesante trabajo donde se comparan las derivas bajo cargas sísmicas en edificios aporticados y en aquellos que incorporan muros de corte y se concluye que los últimos son mucho más eficientes en reducir las derivas de piso por debajo de 0.75% de la altura del entrepiso.

17.2 DISEÑO POR FLEXO-COMPRESIÓN Y CORTE

Durante un terremoto los muros de corte pueden trabajar como grandes vigas en voladizos (Figura 17.2b) (o columnas si la carga axial es alta) empotradas o con cierta libertad de rotación en su base (ver Priestley, Evison y Carr, 1978 y el trabajo de Wyllie, 1987), o acoplados por rígidos dinteles creando así un gran pórtico donde los muros tienden a actuar como columnas y los dinteles como vigas (Figura 17.2a, ver Paulay y Santhakumar, 1976, Paulay y Priestley, 1992). Los dinteles transfieren fuerzas cortantes muy altas y por ello su detallado requiere especial atención y se presentan en la Sección 21.9.7 del ACI-318-08. Si el corte es muy alto es necesario colocar barras en forma diagonal formando una X para reforzar el dintel, con sus extremos anclados en los muros. Las diagonales trabajan como columnas embebidas dentro del dintel y absorben el corte. En muchas ocasiones el refuerzo de las diagonales es tan abundante que conlleva a un congestionamiento del acero dificultando el vaciado y vibrado del concreto. Una alternativa para disminuir el refuerzo y minimizar los problemas de congestionamiento es utilizar concretos reforzados con fibras según sugieren Canbolat, Parra-Montesinos y Wight (2005).

Los muros se diseñaran a flexión-compresión como columnas y su resistencia a corte depende de su relación de aspecto -altura (h_w)/ profundidad (l_w)-, de la siguiente forma (ACI 318-08 21.9.4, Ecuación 21-7),

$$v_{c \text{ muro}} = (\alpha_c \cdot \sqrt{f'_c} + \rho_t \cdot F_y) \leq 4 \cdot \overbrace{(0.53)}^{v_c \text{ (Capítulo 8)}} \cdot \sqrt{f'_c} \quad [17.1]$$

ρ_t es la cuantía de refuerzo transversal u horizontal (área de acero entre área de concreto) y α_c depende de la relación de aspecto de muro,

$$\alpha_c = 0.80 \quad \text{si} \quad \frac{h_w}{l_w} \leq 1.5 \quad \alpha_c = 0.53 \quad \text{si} \quad \frac{h_w}{l_w} \geq 2.0$$

El valor α_c para relaciones de aspecto entre 1.5 y 2.0 se obtiene por interpolación lineal. La cuantía mínima del acero del refuerzo horizontal y transversal del alma es 0.0025, y la máxima separación de barras 45 cm (ACI 318-08, Sección 21.7.2.1). Resultados experimentales de la resistencia a corte de muros con relación de aspecto bajas son presentados y examinados por Woods (1990).

Los extremos del muro pueden estar sujetos a grandes deformaciones unitarias originadas por los efectos de flexión y carga axial, por lo que puede ser necesario reforzarlos con el acero de confinamiento recomendado para columnas (ecuaciones 7.7b y 7.8, ACI 29.6.4.1). En ocasiones el acero longitudinal a colocar en el borde del muro es tan abundante que es conveniente agrandar la sección hasta convertirla en una columna (Figura 17.1).

17.3 ELEMENTOS DE BORDE (ACI 318-08 21.9.6)

El elemento de borde por donde sube el acero principal y donde se coloca el acero de confinamiento puede estar contenido dentro del espesor del muro e como sucede en los edificios tipo "túnel" o puede colocarse en el ensanchamiento del extremo del muro como se muestra en la Figura 17.1. El código 318 de la A.C.I exige colocar acero de confinamiento según la ecuación 7.8b, si en base a un análisis de compatibilidad de deformaciones se determina que es probable que las deformaciones unitarias en el concreto superen el tres por mil (0.003). La máxima separación del acero transversal en los elementos de borde es (ACI-318, 21.9.6.4).

$s = \text{menor } [10 \text{ cm} \dots e/3 \dots 6 \cdot D_b] \dots D_b = \text{Diámetro de la barra longitudinal más pequeña.}$

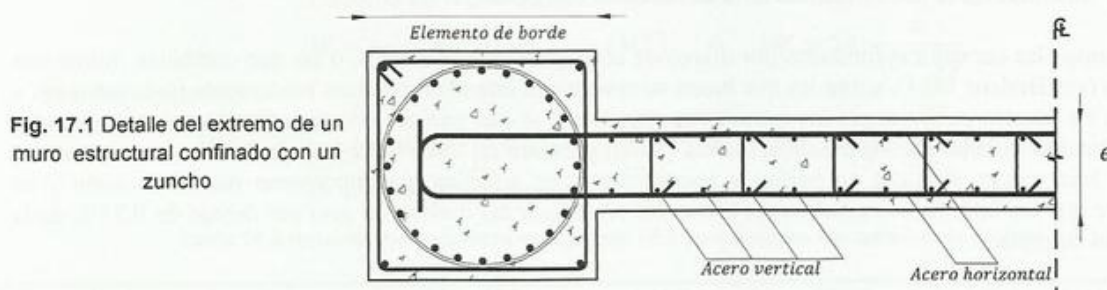


Fig. 17.1 Detalle del extremo de un muro estructural confinado con un zuncho

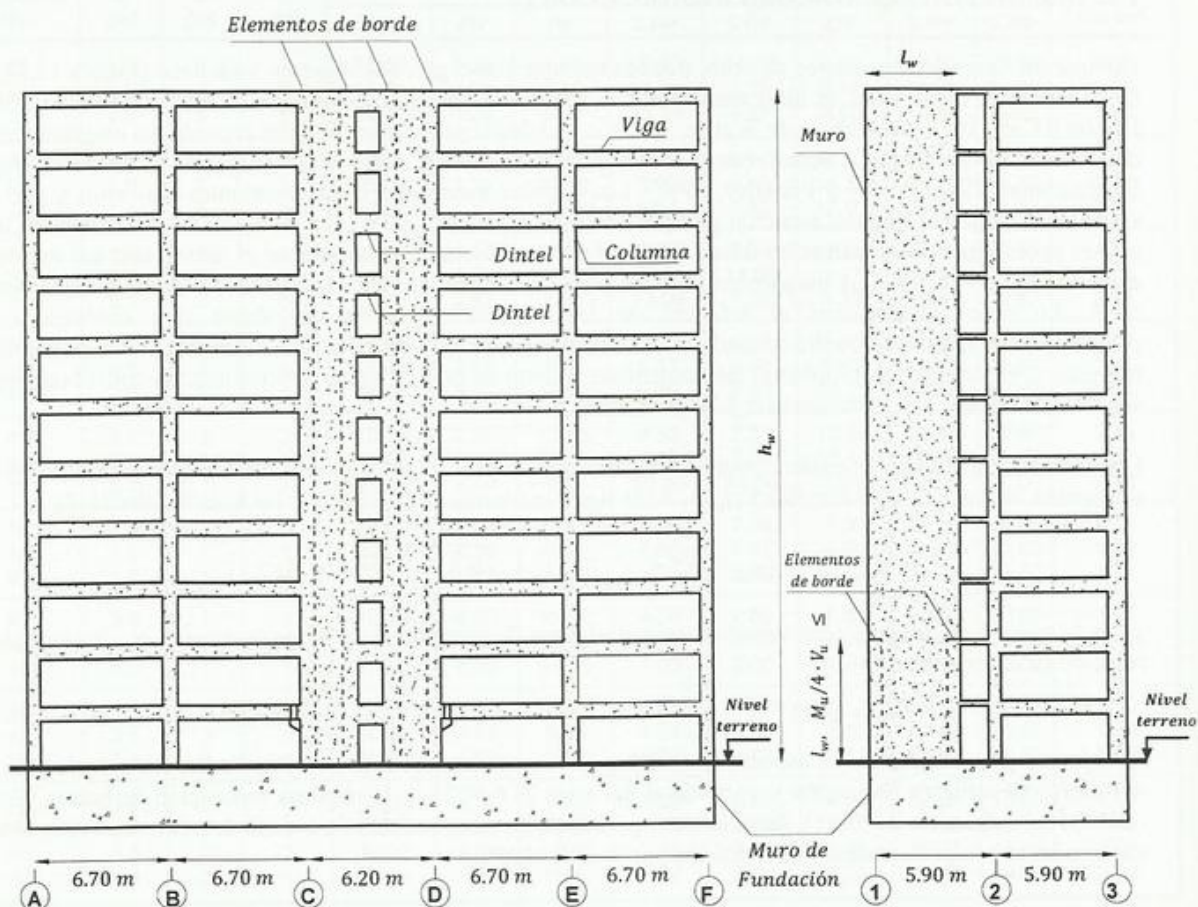


Fig. 17.2a Edificio con muros acoplados (Ejes C y D)

Fig. 17.2b Edificio con muros en voladizo (Ejes 1 y 2)

El código ACI-318 requiere que el elemento de borde se embeba dentro de la fundación con la longitud de desarrollo requerida para la barra principal de mayor diámetro pero no menor de 30 cm.

El desplazamiento de un muro producido por la rotación plástica de la articulación en su base es (Figura 17.3) $\delta_u = \theta \cdot h_w$. La rotación plástica θ es igual al producto de la curvatura ϕ por la longitud de la articulación L_p . Asumiendo una longitud de la articulación de $l_w/2$ en el instante en que la fibra más comprimida de concreto alcanza una deformación unitaria de 0.003, encontraremos,

$$\theta = \phi \cdot L_p = \left(\frac{0.003}{c'} \right) \cdot \frac{l_w}{2} \Rightarrow \theta = \frac{l_w}{667 \cdot c'}$$

$$c' \cong \frac{l_w}{600 \cdot \delta_u / h_w} \quad [17.2] \quad \text{ACI 318 - 08, Sección 21.8}$$

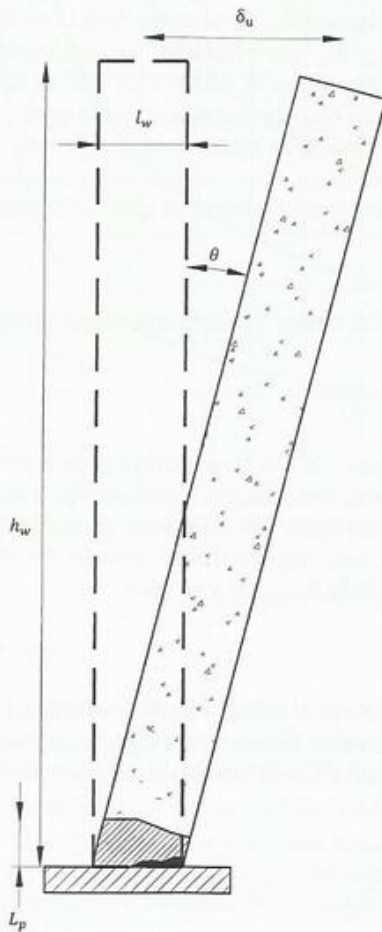


Fig. 17.3 Edificio con muros voladizo (ejes 1 y 2)

El desplazamiento en el tope del muro producido por la rotación plástica de la articulación en su base es (Figura 17.3),

$$\delta_u = \theta \cdot h_w$$

El mínimo valor que puede tomar el término δ_u/h_w en la Ecuación 17.2 es 0.007.

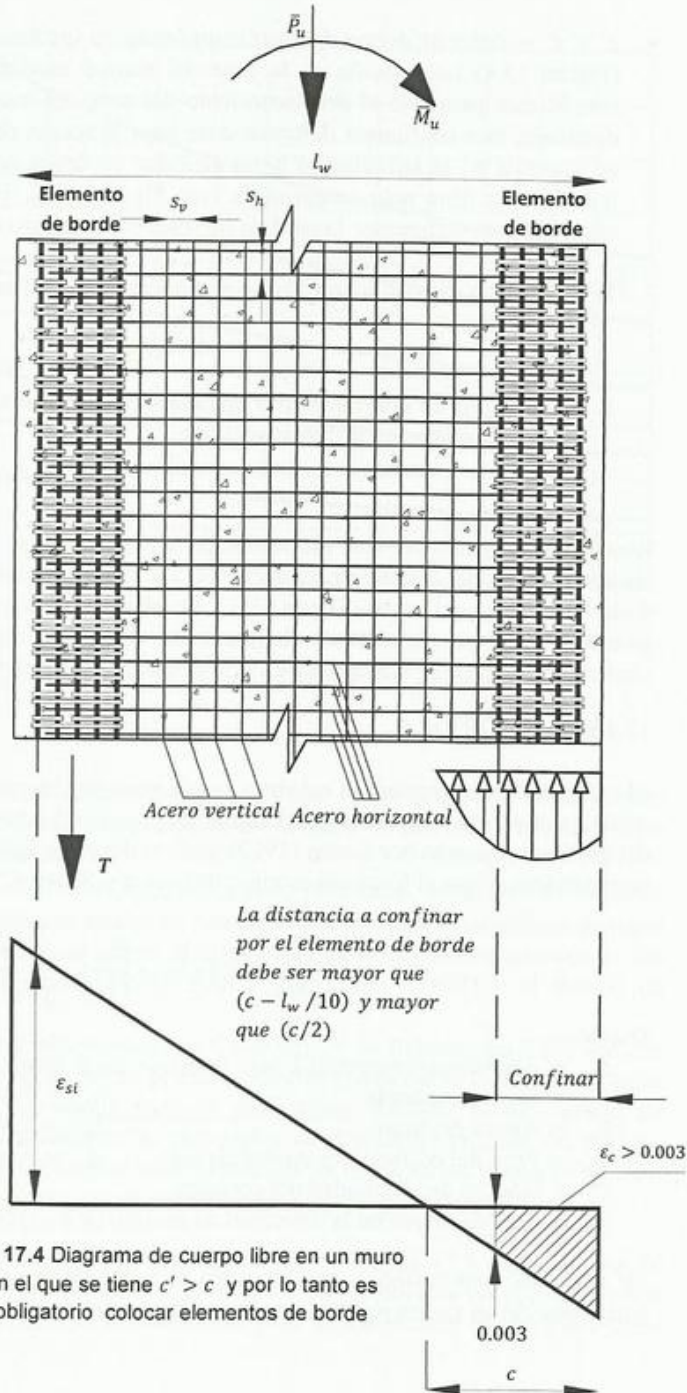


Fig. 17.4 Diagrama de cuerpo libre en un muro en el que se tiene $c' > c$ y por lo tanto es obligatorio colocar elementos de borde

En base al análisis de compatibilidad de deformaciones anteriormente expuesto se determinó que la profundidad del eje neutro c' debe ser la indicada por la Ecuación 17.2 para alcanzar un desplazamiento δ_u sin sobrepasar $\varepsilon_c = 0.003$. El valor de c' calculado con la Ecuación 17.2 lo vamos a comparar con el máximo valor de c obtenido al hacer equilibrio de fuerzas en el muro que se diseña para las diversas combinaciones de \bar{P}_{ui} y \bar{M}_{ui} . Dos escenarios son posibles,

- $c' \geq c \rightarrow$ no es necesario confinar los bordes del muro

La rotación en la base del muro θ le permite alcanzar un desplazamiento δ_u sin que la fibra más comprimida de la articulación sobrepase $\varepsilon_c = 0.003$.

- $c' < c \rightarrow$ colocar acero de confinamiento en los bordes de acuerdo a ec. 7.7b y 7.8

(Figura 17.4) La rotación en la base del muro θ medida en el instante en que se tiene $\varepsilon_c = 0.003$ es insuficiente para que el desplazamiento del tope del muro alcance δ_u . Si el muro está bien diseñado y detallado, este continuará deformándose bajo la acción de \bar{P}_u y \bar{M}_u por efecto de la rotación plástica que se acumula en la articulación hasta alcanzar un desplazamiento δ_u en el instante en que se tendrá $\varepsilon_c > 0.003$ en la fibra más comprimida (ver Figura 17.4). En este caso es necesario confinar las fibras de concreto para compensar la pérdida de resistencia debido a la pérdida de recubrimiento esperada.

1. El refuerzo de confinamiento se extenderá verticalmente una longitud mayor o igual a (Figura 17.2b),

$$[M_u/4 \cdot V_u = e/4 \dots y \dots l_w]$$

2. El refuerzo de confinamiento se extenderá horizontalmente desde la fibra más comprimida hacia el centro de muro una distancia mayor a,

$$[c - l_w/10 \dots y \dots c/2]$$

Recomendamos siempre usar elementos de borde aunque se tenga $c' \geq c$ y. Los elementos de borde mejoran las condiciones del concreto para anclar en los extremos el refuerzo horizontal o transversal ρ_t requerido por corte en el alma del muro (Figura 17.1). En el caso de muros acoplados los elementos de borde mejoran el mecanismo de transferencia de fuerzas entre el muro y dintel. Los requerimientos cuando no se emplean elementos de borde se encuentran en la sección 21.9.6.5 del ACI 318-08.

17.4 EL VALOR DE δ_u

El valor de δ_u corresponde al máximo desplazamiento lateral obtenido al incluir la combinación del sismo. En edificios donde los muros son predominantes y que se fundan en suelos firmes el valor de δ_u se puede obtener del gráfico propuesto por Sozen (1989) que resulta de la aplicación de la Ecuación 17.3. Como complemento recomendamos leer el Capítulo escrito por García y Sozen (2004).

$$\frac{\delta_u}{h_s} = 0.2 \cdot S_{D1} \cdot \left[\frac{h_w}{l_w} \right] \cdot \sqrt{\frac{w_d \cdot g}{E_c \cdot \rho_w \cdot h_s}} \quad [17.3]$$

Donde,

S_{D1} = Aceleración espectral 1 seg (elástica, para factor de reducción de respuesta, $R = 1.0$)

δ_u = Deriva esperada h_s = Altura de entrepiso

h_w = Altura del muro l_w = Longitud (profundidad) del muro

w_d = Peso del edificio por unidad de área g = Aceleración de la gravedad

E_c = Módulo de elasticidad del concreto

ρ_w = Área de muros en la dirección en estudio (x ó y)/(Área total) medida en planta (densidad de muros)

En edificios comerciales y residenciales el valor de w_d esta por el orden de 1 ton/m^2 . Como primera aproximación en suelos rígidos el valor de S_{D1} se puede tomar como $0.75 \cdot g$.

En el trabajo desarrollado por Lepage, Neuman y Dragovich (2006) se presenta una metodologí para evaluar la respuesta inelástica de muros de corte frente a eventos sísmicos que puede ser útil para estimar el valor de δ_u en estructuras duales que combinan pórticos con muros.

En el diseño de estructuras nuevas recomendamos limitar la deriva (relación h_w/l_w) a 1.2 %, aunque la normativa Covenin Mindur 1756-2001 permite valores cercanos a 2.0 % que a juicio del autor son excesivos.

La Figura 17.5 muestra la representación gráfca de la Ecuación 17.3 para los valores que se indican. El gráfico fue escalado a $S_{D1} = 1 \cdot g$ para que sea de fácil aplicación en los casos de distintos valores de S_{D1} .

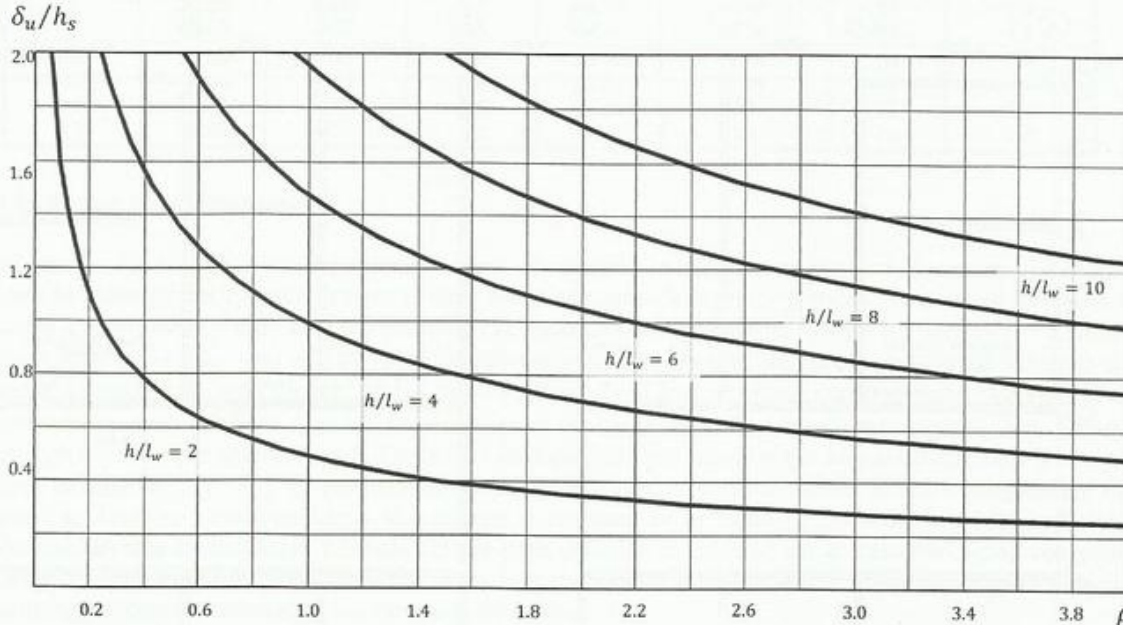


Fig. 17.5 Relación de entre δ_u y h_w/l_w para $S_{D1} = 1 \cdot g$, $w_d = 1 \text{ ton/m}^2$ y $h_s = 3.00 \text{ m}$

Observaciones

- En muros en forma de T o L el ancho efectivo del ala se puede tomar como el 25% de la altura total del muro. Los elementos de borde deben coser la interfaz de unión entre los dos muros que forman la T o L y anclarse dentro del alma al menos 30 cm.
- Se recomienda que la relación esbeltez del muro (h_{plso}/e_{muro}) no exceda 16, aunque en edificios de baja altura de hasta 6 niveles, con abundantes muros en planta, se puede llegar a esbelteces de hasta 20. A los lectores interesados en profundizar sobre el comportamiento de muros esbeltos se les recomienda consultar a Thomsen y Wallace (2004), Paulay y Priestley (1992) y el tratado de Englekirk (2003).
- Observaciones en campo del autor sobre el terremoto de Chile del 27 de Febrero del 2010 indican que el confinamiento con elementos de borde en los primeros niveles puede hacer la diferencia entre el comportamiento pobre y el muy bueno de toda la edificación. Debido al alto grado de incertidumbres que envuelven la estimación de las demandas de desplazamiento de un edificio frente a un futuro sismo, recomendamos siempre colocar elementos de borde en los primeros niveles. Su costo, relativo al de la toda edificación o a los dividendos que conlleva, es, insignificante.

Lepage (1997) desarrolló una espectro de desplazamientos análogo al de la Figura 17.5 para el caso de estructuras aporticadas de concreto armado que permite estimar la máxima deriva durante un evento sísmico en función del periodo de vibración de la estructura, la forma modal y de la aceleración efectiva del suelo esperada.

EJEMPLO 17.1

Se pide diseñar los muros que se indican (Ejes 3 y 4). Los cálculos se presentan para un solo muro.

Datos,

$$h_s = 2.60 \text{ m} \quad \# \text{ pisos} = 13 \quad A_{\text{planta}} = 353.46 \text{ m}^2 \quad f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2 \quad e_{\text{muro}} = 0.20 \text{ m} \quad S_{D1} = 0.70 \cdot g$$

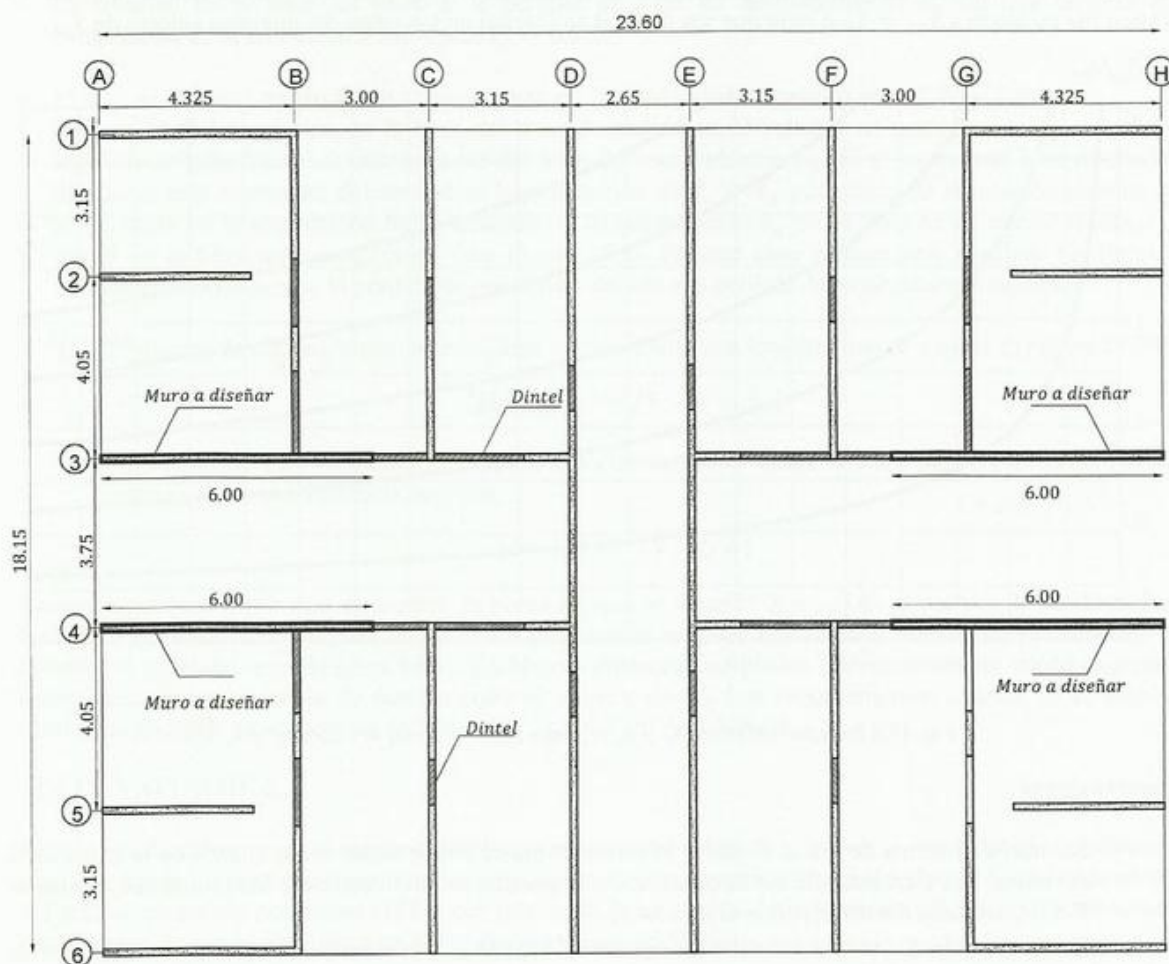


Fig. 17.6 Vista en planta del Edificio del Ejemplo

$$\text{Esbeltez del muro} \dots \dots \frac{h_s}{e} = \frac{260}{20} = 13 \dots < 16 . OK$$

Del análisis sísmico de la estructura se desprenden los siguientes resultados: $V_{B(\text{muro})} = 65.28 \text{ ton}$ y las cargas axiales P_u que se muestran en la Tabla 17.1 y que se calculan en base al área tributaria al muro. La intensidad de carga se estimó en 1 ton/m^2 . El área tributaria al muro es de aproximadamente 13.5 m^2 .

Las fuerzas sísmicas (F_i) y cortes sísmicos (V_i) se estiman de acuerdo a,

$$F_i = V_{B(\text{muro})} \cdot \frac{w_i \cdot h_i}{\sum w_i \cdot h_i} \quad V_i = V_{i+1} + F_i$$

Donde h_i es la altura desde el nivel en consideración hasta el suelo.

Los momentos que actúan sobre el muro, $M_i = M_{i+1} + V_i \cdot h_{si}$

Tabla 17.1 Fuerzas axiales y momentos en el muro

Nivel	h_i (m)	$\frac{w_i \cdot h_i}{\sum w_i \cdot h_i}$	F_i (ton)	V_i (ton)	M_{ui} (ton · m)	P_u (ton)	$e_i = \frac{M_i}{P_i}$ (m)
1	2.60	0.01	0.7	65.28	1528	177	8.6
2	5.20	0.02	1.4	64.56	1358	163	8.3
3	7.80	0.03	2.2	63.13	1190	150	8.0
4	10.40	0.04	2.9	60.98	1026	136	7.5
5	13.00	0.05	3.6	58.11	867	122	7.1
6	15.60	0.07	4.3	54.52	716	109	6.6
7	18.20	0.08	5.0	50.22	574	95	6.0
8	20.80	0.09	5.7	45.19	444	82	5.4
9	23.40	0.10	6.5	39.45	326	68	4.8
10	26.00	0.11	7.2	33.00	224	54	4.1
11	28.60	0.12	7.9	25.83	138	41	3.4
12	31.20	0.13	8.6	17.93	71	27	2.6
13	33.80	0.14	9.3	9.33	24	14	1.8

• Diseño por flexo-compresión

El cálculo del área de acero requerida por flexo-compresión lo haremos de la misma forma en que se hizo para la columna del Ejemplo 7.6 en el caso b) de excentricidades muy grandes. Se asumirá que todo el acero a compresión y todo el acero a tracción se concentra a 50 cm de los bordes (es decir: $d_2 = 5.50m$, $d_1 = 0.50m \rightarrow d_2 - d_1 = 5.00m$) e ignoraremos la contribución del acero vertical de refuerzo del alma. Usaremos $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. Una vez calculada el área de acero construiremos el diagrama de interacción para verificar que las combinaciones de carga axial-momento sean seguras. Las grandes excentricidades que aparecen en la Tabla 17.1 indican fallas por tracción por lo que asumiremos $\phi = 0.90$ para calcular \bar{M}_{ui} y \bar{P}_{ui} . El Procedimiento recomendado para predimensionar el acero longitudinal del muro se describe a continuación y los cálculos se resumen en la Tabla 17.2. Cárdenas y Magura (1973) desarrollan una metodología bastante simple para calcular el refuerzo en el caso de muros con acero principal uniformemente distribuido en la sección transversal (no aplicable a nuestro caso pues el acero principal lo concentraremos en los extremos del muro).

Asumiremos un valor de c y calcularemos el $\bar{P}_{ui \text{ calc}}$. El Valor de c correcto es aquel que arroja.

$$\underbrace{\bar{P}_{ui \text{ (calc)}}}_{\substack{\text{última columna} \\ \text{Tabla 17.2}}} = \bar{P}_{ui}$$

Después de varias iteraciones encontramos que para $c = 81.30 \text{ cm} \dots \dots \dots \bar{P}_{ui \text{ (calc)}} = \bar{P}_{ui} \sim 196 \text{ ton}$

Los cálculos se resumen a continuación.

$$\bar{M}_{ui} = \frac{1528 \text{ ton} \cdot \text{m}}{\underbrace{0.90}_{\phi}} \cong 1700 \text{ ton} \cdot \text{m} \qquad \bar{P}_{ui} = \frac{177 \text{ ton} \cdot \text{m}}{\underbrace{0.90}_{\phi}} = 196 \text{ ton}$$

$$K = 0.85 \cdot f'_c \cdot b = 0.85 \cdot 250 \cdot 20 = 4250 \text{ kg/cm} \qquad \frac{\bar{P}_{ui}}{K} = 46.2 \text{ cm}$$

$$a_{\min} = \beta_1 \cdot c_{\min} = 0.85 \cdot 3 \cdot \overset{50}{\widehat{d}} = 127.5 \text{ cm} \dots \dots \dots \bar{P}_{ui} / K = 46.2 \text{ cm} < c_{\text{bal}} = 330 \text{ cm}$$

El valor a está comprendido entre 46.2 cm y 330 cm que corresponde a valores de c 54.25 y 388.23 cm.

Acero en compresión. Siendo $a = 69.11 \text{ cm} < a_{\min}$ el acero en compresión no fluir.

$$\varepsilon'_s = \frac{0.003}{81.30} \cdot (81.30 - 50) = 0.00116 \dots f'_s = \varepsilon'_s \cdot E_s = 0.00116 \cdot 2.1 \cdot 10^6 = 2425 \text{ kg/cm}^2$$

Acero en tracción.

$$\varepsilon_s = \frac{0.003}{81.30} \cdot (96.5 - 550) = -0.01673$$

$$f_s = \varepsilon_s \cdot E_s = -0.01673 \cdot 2.1 \cdot 10^6 = -35142 \text{ kg/cm}^2 \therefore f_s = F_y = -4200 \text{ kg/cm}^2$$

Concreto..... $C_c = K \cdot a = 293696 \text{ kg} \dots x_c = (h - a)/2 = 265 \text{ cm}$

Sumando momentos alrededor del centroide del muro nos viene,

$$\bar{M}_u = \overbrace{K \cdot a}^{\text{Concreto}} \cdot x_c + \overbrace{f'_s \cdot A'_s \cdot x' + f_s \cdot A_s \cdot x}^{\text{Acero}}$$

Brazo de palanca del acero en compresión con respecto al centroide de la columna.

$$x' = \frac{h}{2} - d' = 250 \text{ cm}$$

Brazo de palanca del acero en tracción respecto al centroide de la columna.

$$x = \frac{h}{2} - d = -250 \text{ cm}$$

$$\bar{M}_u = 293696 \cdot 2.59 + 2425 \cdot A'_s \cdot 2.50 - 4200 \cdot A_s \cdot (-2.50) = \overbrace{1680000}^{\approx \text{dato} \dots 0.K} \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$A_s = A'_s = 55.40 \text{ m}^2$$

La carga axial calculada en base a las ecuaciones de equilibrio es.

$$\bar{P}_u = K \cdot a + f'_s \cdot A'_s + f_s \cdot A_s$$

$$\bar{P}_{u \text{ N-1 (calc)}} = 293696 + 2425 \cdot 55.40 - 4200 \cdot 55.40 = 195358 \text{ kg} \sim \bar{P}_{ui} = \overbrace{196}^{\text{dato}} \text{ ton} \dots OK$$

Tabla 17.2 Diseño del muro por flexo-compresión

\bar{M}_{ui} (ton · m)	\bar{P}_{ui} (ton)	$\frac{\bar{P}_{ui}}{K}$ (cm)	c (cm)	a (cm)	$\varepsilon_s(r)$	f_{sr} (kg/cm ²)	$\varepsilon_s(c)$	f_{sc} (kg/cm ²)	C_c (ton)	$\frac{h-a}{2}$ (cm)	A_s (cm ²)	$\bar{P}_{ui \text{ calc.}}$ (ton)
1700 (N-1)	196	46.2	81.3	69.1	-0.0173	-4200	0.0012	2425	293696	265	55.40	196
1508 (N-2)	181	42.7	77.0	65.5	-0.0184	-4200	0.0011	2209	278163	267	47.76	181
1322 (N-3)	166	39.1	71.8	61.0	-0.0199	-4200	0.0009	1913	259378	269	40.78	167
1139 (N-4)	151	35.6	66.5	56.5	-0.0218	-4200	0.0007	1563	240231	272	33.80	152
964 (N-5)	136	32.0	60.8	51.7	-0.0241	-4200	0.0005	1119	219640	274	27.18	135
638 (N-6)	121	28.4	54.7	46.5	-0.0272	-4200	0.0003	541	197604	277	21.00	120
493 (N-7)	106	24.9	48.2	41.0	-0.0312	-4200	-0.0001	-235*	174123	280	15.29	105
362 (N-8)	91	21.3	41.1	34.9	-0.0372	-4200	-0.0006	-1364*	148474	283	10.40	91
367 (N-9)	76	17.8	33.5	28.5	-0.0463	-4200	-0.0015	-3103*	121019	286	6.14	75

*Barras supuestas en compresión pero se encuentran en tracción (lo indica el signo menos adelante)
Desde el nivel N-9 hacia arriba se requerirán menos de 6.14 cm² lo que queda cubierto con cuatro barras de 5/8"

- Verificación de la necesidad de incorporar elementos de borde

El valor de c en la base del muro es de 81.30 cm. El valor de c' se calcula de acuerdo a la Ecuación 17.2. El término δ_u/h_w lo obtendremos de la Figura 17.5. Al entrar en el gráfico para estimar la deriva ignoraremos la contribución de los muros 1, 2, 5 y 6 (opción conservadora). La relación de aspecto de los muros de los ejes 3 y 4 es,

$$\frac{13 \cdot 2.60}{6} = 5.63. \text{ digamos } \cong 6 \quad \rho = \frac{\text{Área muros en } x}{\text{area total}} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 0.20}{353.46} = 1.36\%$$

Con ayuda de la Figura 17.5, y asumiendo $\delta_u/h_w = \delta_u/h_s$

$$\frac{\delta_u}{h_w} \cong 1.30\% \text{ para } S_{D1} = 1.00 \cdot g \Rightarrow \frac{\delta_u}{h_w} = 0.90\% \text{ para } S_{D1} = 0.70 \cdot g$$

$$c' = \frac{l_w}{600 \cdot \frac{\delta_u}{h_w}} = \frac{6}{600 \cdot 0.0090} = 1.01 \text{ m} \Rightarrow c' > c = 96.5 \text{ cm}$$

\therefore no hacen falta usar elementos de borde pero se colocaran

Proyección vertical de los elementos de borde

$$\text{máx} \left(\frac{e}{4} \dots l_w \right) = \left(\frac{8.74}{4} \dots 6 \right) \Rightarrow 6.00 \text{ m}$$

\Rightarrow extender los elementos de borde los tres primeros pisos $h = 2.60 \cdot 3 = 7.80 \text{ m}$.

Proyección horizontal de los elementos de borde

$$\text{máx} \left(c - \frac{l_w}{10} \dots \frac{c}{2} \right) = \text{máx} \left(0.813 - \frac{6}{10} \dots \frac{0.813}{2} \right) \Rightarrow 0.41 \text{ m} \dots 0.50 \text{ m}$$

- Distribución del acero longitudinal en los bordes del muro

Tabla 17.3 Áreas de acero a colocar en los bordes del muro

Nivel	h_i (m)	área req. (cm ²)	A_s (req) en Ø #5	A_s (colocado) Ø #5
1	2.60	55.40	27.7	30*
2	5.20	47.76	23.9	30*
3	7.80	40.78	20.4	28*
4	10.40	33.80	16.9	24
5	13.00	27.18	13.6	20
6	15.60	21.00	10.5	16
7	18.20	15.29	7.65	12
8	20.80	10.40	5.2	8
9	23.40	6.14	3.07	4
10	26.00	< 6.14	< 3.381	4
11	28.60	< 6.14	< 3.381	4
12	31.20	< 6.14	< 3.381	4
13	33.80	< 6.14	< 3.381	4

*Se colocaran elementos de borde para confinar el concreto de los extremos del muro

• Acero de confinamiento (ACI 318-08, Sección 21.4)

$$z = 0.09 \cdot \frac{f'_c}{F_{y \text{ est.}}} \Rightarrow z = 0.09 \cdot \frac{250}{2800} = 0.008$$

Siendo las barras longitudinales de 5/8" la máxima separación vertical s del refuerzo de confinamiento es de

$$s = \text{menor} [10 \text{ cm} \dots e/3 \dots 6 \cdot D_b] = [10 \dots 20/3 \dots 6 \cdot 1.59] \cong 6.67 \text{ cm}$$

$$\text{asumiremos } s = 7.00 \text{ cm} \dots A_{sh} \geq z \cdot s \cdot h_c \Rightarrow A_{sh} \geq 0.008 \cdot 7 \cdot 50 = 2.80 \text{ cm}^2$$

El acero de confinamiento consistirá en barras de (1/4") con un límite de fluencia de $F_y = 2800 \text{ kg/cm}^2$. El área de una barra de (1/4") es 0.32 cm^2 . Entonces nos viene,

$$\# \text{ ligaduras} = \frac{2.80}{0.32} = 8.75 \dots \text{digamos } 10 \text{ ligaduras de } 1/4" \text{ dispuestas en menos } 50 \text{ cm.}$$

Observaciones

La cantidad de acero colocada entre los niveles 2 y 13 (Tabla 17.3) sobrepasa a la requerida en esos niveles según la Tabla 17.2. Esto se hace intencionalmente para forzar la aparición de la articulación plástica en la base del muro (nivel 1) y mantenerlo elástico entre los niveles 2 y 13. El diagrama de interacción para el nivel 1 se presenta en la Figura 17.7.

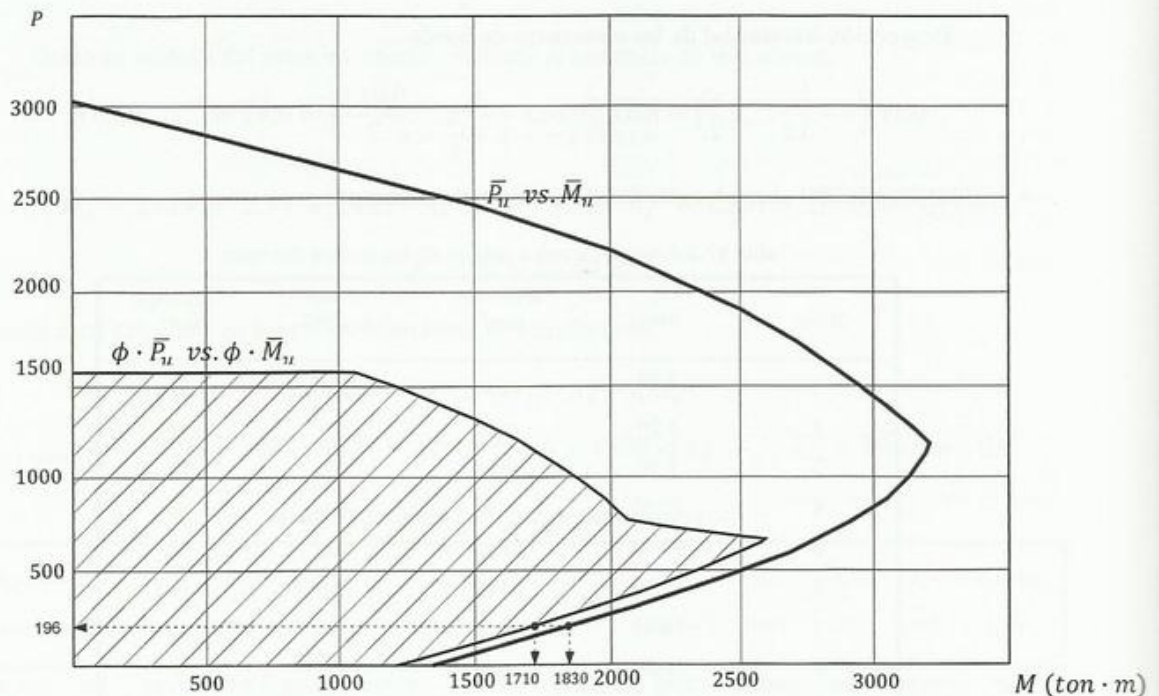


Fig.17.7 Diagrama de interacción para el muro en estudio (nivel 1), 30 # 5 en cada extremo

• Diseño por corte

Asumiremos cuantías de acero vertical $\rho_v = 0.0025$ y horizontal $\rho_h = 0.0025$ y calcularemos la resistencia a corte del muro para compararla con la demanda máxima (piso 1). La capacidad a corte del muro la calcularemos usando la Ecuación 17.1

$$v_{c \text{ muro}} = (\alpha_c \cdot \sqrt{f'_c} + \rho_t \cdot F_y) = 0.75 \cdot (0.53 \cdot \sqrt{250} + 0.0025 \cdot 4200) = 18.9 \text{ kg/cm}^2$$

La demanda a corte del muro \bar{v}_u la calcularemos en base a la posible demanda de corte que el muro experimentará bajo cargas sísmicas. Para calcular el cortante en el muro asumiremos que,

1. El muro alcanza su máxima resistencia a flexión para los rangos de P_u encontrados bajo los distintos casos de carga. (Para este ejemplo se muestra el procedimiento con un solo caso de carga). En este caso obtenemos de la Figura 17.7, $M \cong 1830 \text{ ton} \cdot \text{m}$ (En el diagrama sin afectar por ϕ)
2. La máxima resistencia a flexión encontrada la multiplicaremos por 1.25 para incluir el efecto de la sobre-resistencia ocasionada por el endurecimiento por deformación del acero.
3. El corte último de diseño \bar{V}_u lo obtendremos asumiendo un brazo de palanca de $2/3 \cdot h_w$ del nivel del suelo.

$$V_u = \frac{1830 \cdot 1.25}{2/3 \cdot (33.8)} = 101.56 \text{ ton} \Rightarrow \bar{V}_u = \frac{101.56}{0.75} = 135.36 \text{ ton}$$

$$\bar{v}_u = \frac{135.36 \cdot 10^3}{600 \cdot 20} = 11.28 \text{ kg/cm}^2 < v_{c \text{ muro}} \dots \dots \dots O.K$$

La cuantía del 0.0025 corresponde a barras de $3/8"$ espaciadas cada 37 cm en dos capas (una por cada cara). Este acero debe estar anclado en los elementos de borde. Para una barra de $3/8"$... $L_d \cong 50 \text{ cm}$

La cuantía mínima de refuerzo vertical es 0.0025 y la cubriremos con igual distribución de acero. **Conclusión:** Usaremos una malla de $3/8"$ espaciadas cada 35 cm en dirección vertical y horizontal (Figura 17.8). La separación del acero vertical y horizontal del refuerzo del alma no puede exceder 45 cm ni tres veces el espesor del muro (ACI 318-08, Sección 14.3.5). El despiece del muro se muestra en la Figura 17.9.

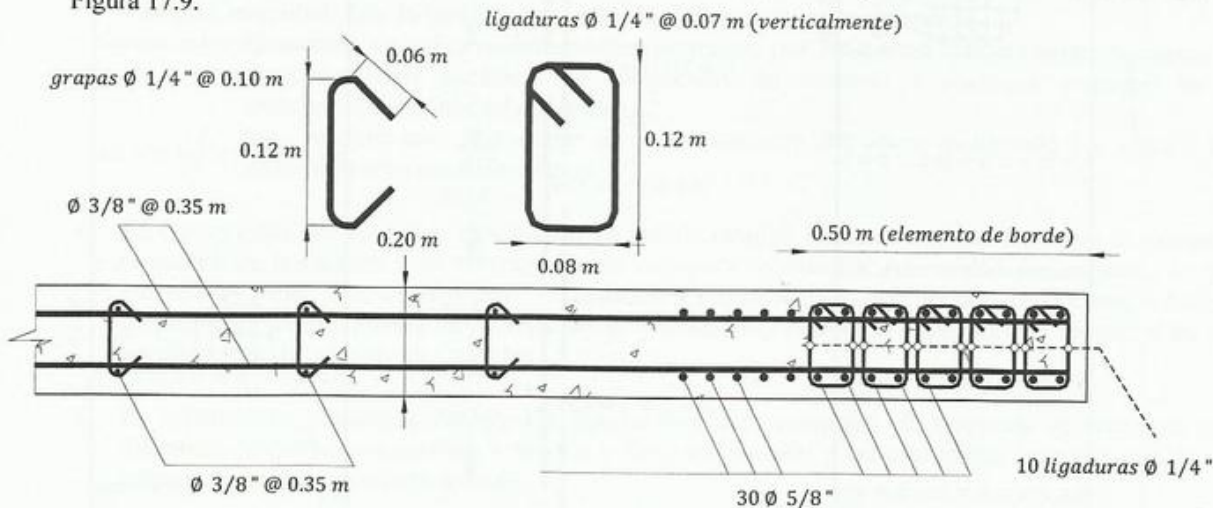


Fig. 17.8 Despiece del muro en el nivel 1

Observación: La capacidad a flexión del muro en la base es tan grande $\cong 1830 \text{ ton} \cdot \text{m}$ que resulta difícil transmitir la carga sísmica al suelo adyacente sin sobrepasar los esfuerzos admisibles. En este caso el edificio se encuentra sobre suelo aluvional firme y se optó por conectar los muros de los extremos mediante una viga de fundación profunda como se muestra en la Figura 17.9. En suelos blandos resulta más sencillo transferir las fuerzas al suelo pues se pueden sembrar pilotes para tal fin que posiblemente son también requeridos para transferir las cargas gravitacionales. Recomendamos consultar la investigación de Smith-Pardo (2008) acerca de muros con fundaciones vulnerables a los lectores que deseen profundizar en el tema en búsqueda de flexibilidad en sus diseños.

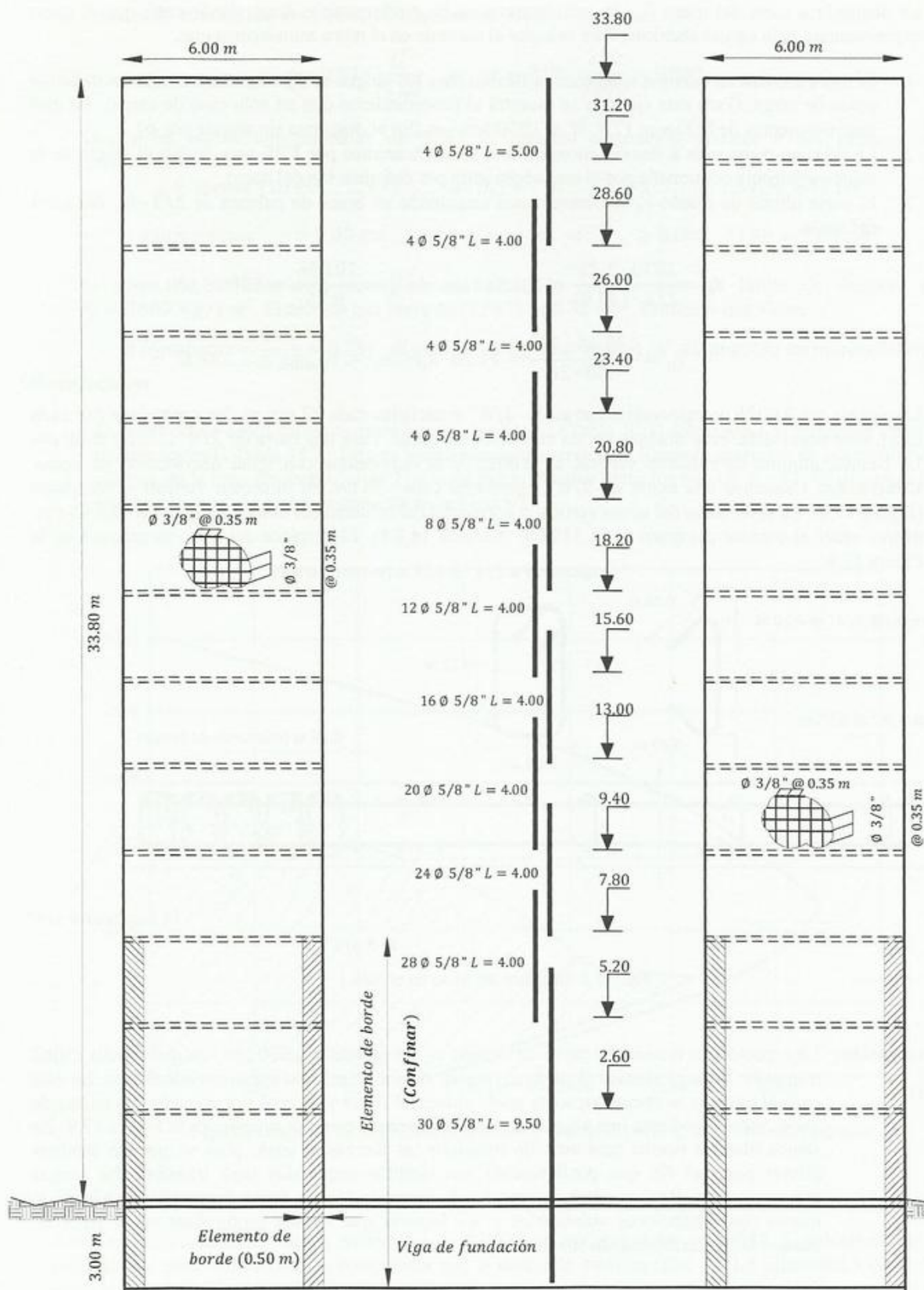


Fig. 17.9 Despiece del acero longitudinal de los muros

DIAGRAMAS DE MOMENTO-CURVATURA

18.1 INTRODUCCIÓN

- En el Capítulo 4 estudiamos el comportamiento de vigas en flexión usando el método de los esfuerzos admisibles (útil para el cálculo de flechas, agrietamiento, separación de barras). La curva de esfuerzo-deformación del concreto se aproximó a una línea recta (Figura 4.3) por lo que la aplicación del método se limita a esfuerzos máximos de compresión en el concreto por el orden de $0.45 \cdot f'_c$, que corresponde a una deformación unitaria por el orden del 0.5 por mil ($\epsilon = 0.0005$).
- En el Capítulo 5 y 7 se analizaron vigas y columnas en condiciones últimas (útil para el diseño del refuerzo), cuando la deformación del concreto es del 3 por mil ($\epsilon = 0.003$) y el diagrama de esfuerzo-deformación del concreto se curva considerablemente. Con el fin de simplificar los cálculos para el diseño de secciones se reemplazó el diagrama curvo por uno equivalente rectangular, con esfuerzo constante $0.85 \cdot f'_c$ (figuras 5.2 y 5.3).
- En este Capítulo se presenta una metodología para estudiar el comportamiento de miembros sujetos a flexión o flexo-compresión cuando las fibras de concreto se comprimen una deformación unitaria (ϵ) de cualquier magnitud. Esto lo haremos con la ayuda de dos modelos constitutivos,
 1. El modelo de esfuerzo-deformación propuesto por Hognestad (curvo) para representar el comportamiento no lineal en compresión del concreto a cualquier magnitud de la deformación máxima del concreto ϵ_{cm} .
 2. Un modelo para representar el comportamiento del acero incluyendo los efectos del endurecimiento por deformación.
- En base a estos dos modelos constitutivos es posible estudiar la relación que existe entre el momento resistente de la sección y su correspondiente curvatura -o rotación por unidad de longitud-, lo que llamaremos *Diagrama de Momento – Curvatura*. El concepto es familiar pues en el Ejemplo 5.23 se construyeron cuatro puntos de la relación de Momento-Curvatura (Figura 5.21f) apoyados en los conceptos presentados en los capítulos 4 y 5.
- La información presentada en este Capítulo servirá para comparar la respuesta de secciones con diferentes propiedades sometidas a flexión y flexo-compresión y así profundizar el conocimiento del comportamiento del concreto armado.

18.2 MODELO DE HOGNESTAD (1951, FIGURA 18.1)

$$f_c = f'_c \cdot \overbrace{\left[2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_o} \right)^2 \right]}^{\varepsilon_{cm} < \varepsilon_o} \quad [18.1a] \quad \dots \dots \dots f_c = f'_c \cdot \overbrace{\left[1 - \underbrace{\sum}_{pendiente} \cdot (\varepsilon_{cm} - \varepsilon_o) \right]}^{\varepsilon_{cm} \geq \varepsilon_o \text{ (descenso)}} \quad [18.1b]$$

ε_{cm} en la Ecuación 18.1 es la deformación unitaria de la fibra de concreto más comprimida. El valor de ε_o es aquel para el cual se tiene un esfuerzo en el concreto de f'_c y generalmente se asume en dos por mil (0.002). La Ecuación 18.1 se presenta gráficamente en la Figura 18.1.

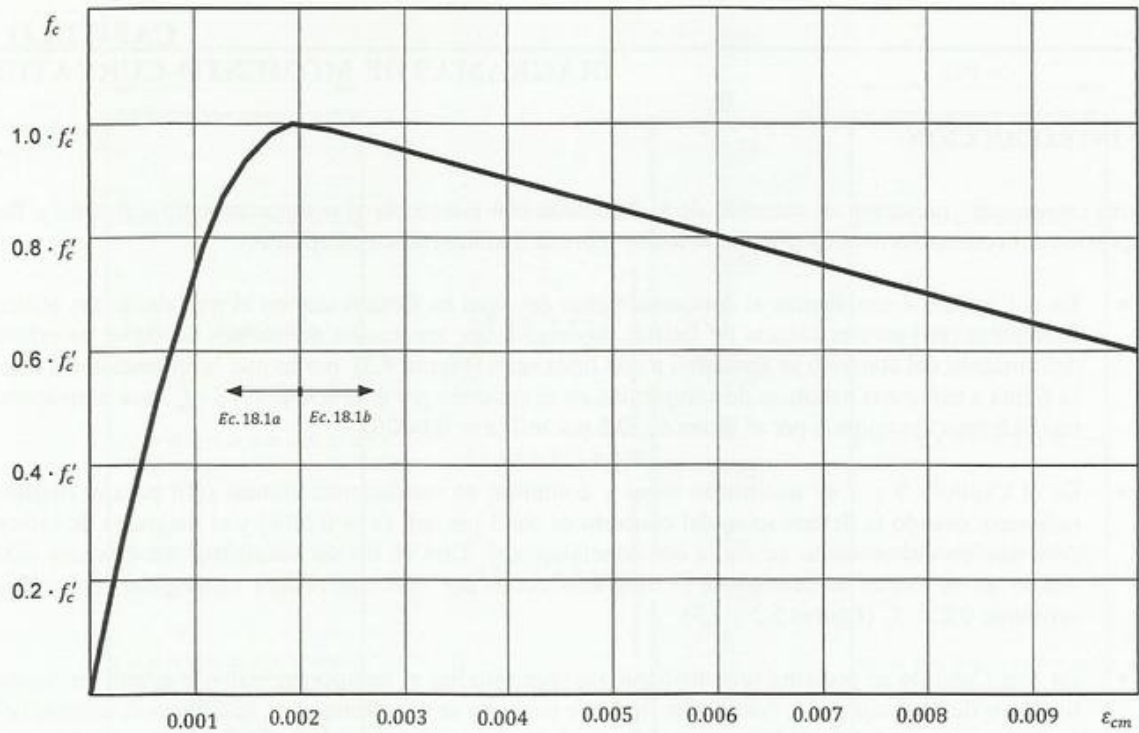


Fig. 18.1 Diagrama de Hognestad para $\varepsilon_o = 0.002$ (usual)

18.3 MODELO DEL ACERO DE REFUERZO (FIGURA 18.2)

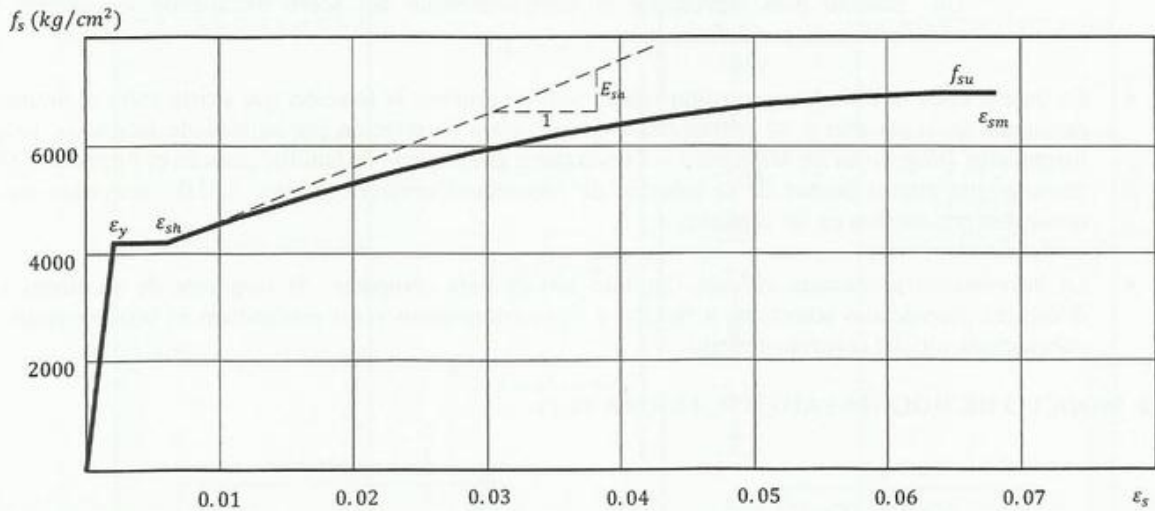


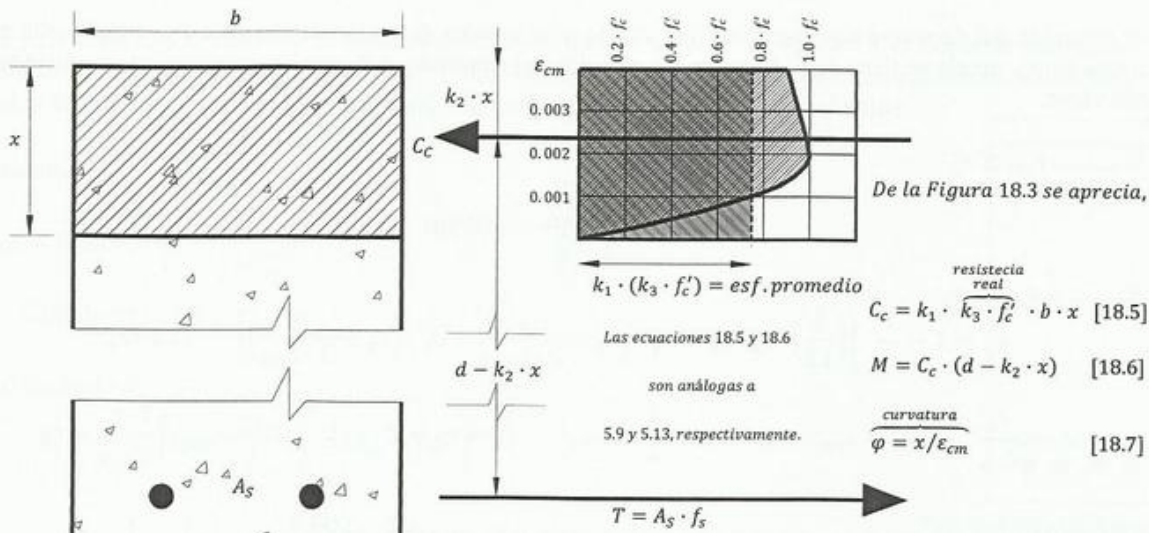
Fig. 18.2 Diagrama de esfuerzo-deformación del acero para $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$$\begin{aligned}
 f_s &= \overline{E_s \cdot \varepsilon_s} \quad [18.2a] & f_s &= \overline{F_y} \quad [18.2b] & f_s &= \overline{F_y + (f_{su} - F_y) \cdot 2 \cdot \xi - \xi^2} \quad [18.2c] & f_s &= \overline{f_{su}} \quad [18.2d] \\
 \varepsilon_{sm} &= \varepsilon_{sh} + 2 \cdot \frac{f_{su} - F_y}{E_{sh}} \quad [18.3] & \xi &= \left[\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}}{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sh}} \right] \quad [18.4]
 \end{aligned}$$

Valores recomendados para $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$$E_s = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \varepsilon_{sh} = 0.006 \quad \varepsilon_y = 0.002 \quad E_{sh} = 90000 \text{ kg/cm}^2 \quad f_{su} = 7000 \text{ kg/cm}^2$$

18.4 CONSTRUCCIÓN DE LA RELACIÓN DE MOMENTO CURVATURA


 Fig. 18.3 Modelo de Hognestad aplicado a una viga ($\epsilon_{cm} = 0.004$)

 a) EL FACTOR k_3

El factor k_3 relaciona la resistencia a compresión del concreto dentro de la viga o columna, con la obtenida al ensayar un cilindro.

$$\text{vigas} \dots \dots \dots k_3 = 1.00$$

$$\text{columnas} \dots \dots \dots k_3 = 0.85$$

La razón por lo que se recomienda un valor menor que la unidad en columnas es para reflejar la disminución de la resistencia del concreto por efecto de la segregación del agregado grueso y la pasta de cemento que se observa en la parte inferior de la columna al ser vaciado este desde el tope.

 b) EL FACTOR k_1

El diagrama rectangular de compresiones debe producir la misma resultante de compresión (C_c) que genera la distribución de presiones del diagrama curvo (Figura 18.3). k_1 se obtiene al igualar el área bajo la curva del diagrama de Hognestad con la de un rectángulo de presión constante con magnitud de $k_1 \cdot (k_3 \cdot f'_c)$. Al realizar esta operación se obtiene,

$$k_1 = \frac{\text{esf. promedio}}{f'_c} \dots \dots \dots \text{siendo } \eta = \frac{\epsilon_{cm}}{\epsilon_o}$$

Sustituyendo valores nos viene,

$$\text{Si } \epsilon_{cm} \leq \epsilon_o \dots \dots \dots k_1 = \eta - \frac{1}{3} \cdot \eta^2 \quad [18.8a]$$

$$\text{Si } \epsilon_{cm} > \epsilon_o \dots \dots \dots k_1 = \frac{1}{\epsilon_{cm}} \cdot \left[\epsilon_{cm} - \frac{\epsilon_o}{3} - \frac{Z}{2} \cdot (\epsilon_{cm} - \epsilon_o)^2 \right] \quad [18.8b]$$

$$Z = 150 \text{ (concreto no confinado)} \quad Z = 50 \text{ (concreto confinado)}$$

Z es la pendiente de la rama descendiente del Diagrama de Hognestad para $\epsilon_{cm} > \epsilon_o$ (Figura 18.1)

c) EL FACTOR k_2

El centroide del diagrama de Hognestad (por donde pasa la línea de acción de C_c) dista $k_2 \cdot x$ del borde más comprimido, donde se tiene ϵ_{cm} . Al hacer los cálculos del centroide si la sección comprimida es rectangular nos viene,

Si $\dots \dots \epsilon_{cm} \leq \epsilon_o$

$$k_2 = \frac{\frac{1}{3} - \frac{\eta}{12}}{1 - \frac{\eta}{3}} \quad [18.9a]$$

Si $\dots \dots \epsilon_{cm} > \epsilon_o$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{c_5} \cdot \left[\left(\frac{5}{12} \right) \cdot c_1 \cdot \epsilon_o + c_4 \cdot \left(c_1 + \frac{c_2}{2 \cdot \epsilon_{cm}} \right) + c_3 \cdot \left(c_1 + \frac{c_2}{3 \cdot \epsilon_{cm}} \right) \right] \quad [18.9b]$$

$$c_1 = \frac{\epsilon_o}{\epsilon_{cm}} \quad c_2 = \epsilon_{cm} - \epsilon_o \quad c_3 = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot c_2^2 \quad c_4 = c_2 - Z \cdot c_2^2 \quad c_5 = \epsilon_{cm} - \frac{1}{3} \cdot \epsilon_o - c_3$$

d) PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA UN PUNTO DEL DIAGRAMA

Establecer un valor de ϵ_{cm} , y luego,

- 1) Calcular los valores de k_1 y k_2 (ecuaciones 18.8 y 18.9).
- 2) Asumir un valor de x ,
 - 2.1) Calcular ϵ_s por relación de triángulos y luego f_s (Ecuación 18.2).
 - 2.2) Calcular C_c y T (Ecuación 18.5).
 - 2.3) Verificar que se cumpla el equilibrio $C_c = T$ para el valor de x seleccionado. En caso contrario volver al paso 2 y asumir un valor de x distinto. La ecuación de equilibrio queda: $C_s + C_c = T + P$ si existiese acero en el borde comprimido y/o carga axial en la sección. C_s y P son las fuerzas de compresión en el acero y la carga axial (ambos positivos).
- 3) Calcular M (Ecuación 18.6).
- 4) Calcular ϕ (Ecuación 18.7).
- 5) Volver al paso 1 incrementado el valor de ϵ_{cm} para encontrar otro punto del diagrama.

18.5 ANÁLISIS NO-LINEAL DE PÓRTICOS

Las relaciones de momento-curvatura se pueden incorporar en programas de computadora para simular el comportamiento no-lineal de los miembros de concreto armado. Numerosas opciones de programas comerciales hay disponibles para este tipo de análisis. En Venezuela los más populares son el **SAP 2000** y el **ETABS**, de Computers and Structures (<http://www.csiberkeley.com>). Otras alternativas para el análisis no-lineal de estructuras son el programa **LARZ**, desarrollado en la Universidad de Illinois (los lectores interesados se les recomienda consultar el trabajo de Takeda, Sozen y Nielsen, 1970), el programa **IDARC** desarrollado en la Universidad del Estado de Nueva York en Búfalo (ver Kunnath, Reinhorn y Park, 1990) entre otros o en la web (<http://civil.eng.buffalo.edu/idarc2d50>).

En el Departamento de Estructuras de la Universidad de los Andes el grupo de investigación liderado por Florez-López ha desarrollado un modelo basado en la mecánica de la fractura (Florez-Lopez, 1998) que ha demostrado gran versatilidad para incorporar el efecto del agrietamiento y la no-linealidad del material en el análisis sísmico de pórticos de concreto armado y que puede usarse de manera gratuita a través de internet (<http://portaldeporticos.ula.ve>).

EJEMPLO 18.1

Se pide construir la relación de momento-curvatura para la viga de la Figura 18.4. Concreto confinado. Usar valores usuales para $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ (Viga idéntica a la del Ejemplo 5.3). Los resultados se resumen en la Tabla 18.1 y los cálculos para $\epsilon_{cm} = 0.003$ se presentan a continuación. $\epsilon_{sh} = 0.006$

Solución

$$\epsilon_{cm} = 0.003 > \epsilon_o$$

- Cálculo de k_1 y k_2

Cálculo de k_1

$$k_1 = \frac{1}{\epsilon_{cm}} \cdot \left[\epsilon_{cm} - \frac{\epsilon_o}{3} - \frac{Z}{2} \cdot (\epsilon_{cm} - \epsilon_o)^2 \right]$$

$$k_1 = \frac{1}{0.003} \cdot \left[0.003 - \frac{0.002}{3} - \frac{50}{2} \cdot (0.003 - 0.002)^2 \right] = 0.769$$

Cálculo de k_2

$$c_1 = \epsilon_o / \epsilon_{cm} = 0.002 / 0.003 = 0.667$$

$$c_2 = \epsilon_{cm} - \epsilon_o = 0.003 - 0.002 = 1 \cdot 10^{-3}$$

$$c_3 = 1/2 \cdot Z \cdot c_2^2 = 1/2 \cdot 50 \cdot 0.001^2 = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

$$c_4 = c_2 - Z \cdot c_2^2 = 1.0 \cdot 10^{-3} - 50 \cdot (1.0 \cdot 10^{-3})^2 = 9.50 \cdot 10^{-4}$$

$$c_5 = \epsilon_{cm} - 1/3 \cdot \epsilon_o - c_3 = 0.003 - 1/3 \cdot 0.002 - 2.5 \cdot 10^{-5} = 2.31 \cdot 10^{-3}$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{c_5} \cdot \left[\left(\frac{5}{12} \right) \cdot c_1 \cdot \epsilon_o + c_4 \cdot \left(c_1 + \frac{c_2}{2 \cdot \epsilon_{cm}} \right) + c_3 \cdot \left(c_1 + \frac{c_2}{3 \cdot \epsilon_{cm}} \right) \right]$$

$$k_2 = 1 - \frac{1}{2.31 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\left(\frac{5}{12} \right) \cdot 0.67 \cdot 0.002 + 9.5 \cdot 10^{-4} \cdot \left(0.67 + \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0.003} \right) + 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot \left(0.67 + \frac{1 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 0.003} \right) \right]$$

$$k_2 = 0.408$$

- Asumiremos $x = 12.00 \text{ cm}$

1. Por relación de triángulos (ver capítulo 5, Figura 18.5))

$$\epsilon_s = \epsilon_{cm} \cdot \frac{d - x}{x} = 0.003 \cdot \frac{60 - 12}{12} = 0.012 \rightarrow \epsilon_s > \epsilon_{sh}$$

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{sh} + 2 \cdot \frac{f_{su} - F_y}{E_{sh}} = 0.006 + 2 \cdot \frac{7000 - 4200}{90000} = 0.0682 \rightarrow \epsilon_s < \epsilon_{sm}$$

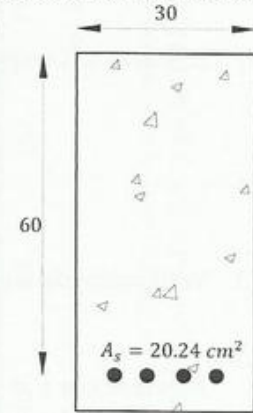


Fig. 18.4 Viga del Ejemplo 18.1

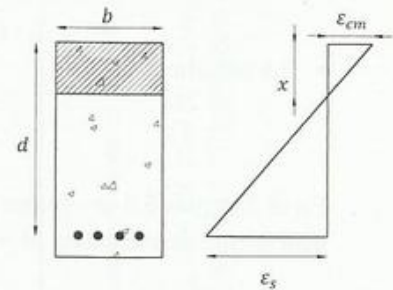


Fig. 18.5 Deformaciones unitarias

$$\xi = \left[\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}}{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sh}} \right] = \left[\frac{0.012 - 0.006}{0.0682 - 0.006} \right] = 0.096 \dots \dots f_s = F_y + (f_{su} - F_y) \cdot (2 \cdot \xi - \xi^2)$$

$$f_s = 4200 + (7000 - 4200) \cdot (2 \cdot 0.096 - 0.096^2) = 4714 \text{ kg/cm}^2$$

2. La fuerza de Compresión y Tracción,

$$C_c = k_1 \cdot k_3 \cdot f'_c \cdot \overbrace{b \cdot x}^{\text{area comp.}} = 0.769 \cdot 1 \cdot 250 \cdot 30 \cdot 12 = 69210 \text{ kg}$$

$$T = A_s \cdot f_s = 20.22 \cdot 4714 = 95318 \text{ kg}$$

3. Verificación del equilibrio,

$$C_c < T \rightarrow \text{no se cumple el equilibrio} \rightarrow \text{aumentar } x$$

Al probar con $x = 15.52 \text{ cm}$ obtendremos $\varepsilon_s = 0.0086$, $\xi = 0.04175$, $f_s \cong 4230 \text{ kg/cm}^2$. Al verificar la condición de equilibrio de fuerzas horizontales se obtiene,

$$C_c = T = 89559 \text{ kg } 0.K$$

• El momento viene dado por,

$$M = C_c \cdot (d - k_2 \cdot c) = 89553 \cdot (0.60 - 0.408 \cdot 0.1552) = 48061 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

• La curvatura,

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{cm}}{c} = \frac{0.003}{15.52} = 1.9329 \cdot 10^{-4}$$

En el Ejemplo 5.3 se obtiene para la condición de rotura $\varepsilon_{cm} = \varepsilon_u = 0.003$ y usando el diagrama rectangular equivalente de presiones, $M = 45270 \text{ kg} \cdot \text{m}$ (6 % menor) y $\varphi = 1.89 \cdot 10^{-4}$ (2% menor).

Tabla 18.1 Resumen de resultados del Ejemplo 18.1 para distintos valores de ε_{cm}

ε_{cm}	k_1	k_2	x (cm)	ε_s	f_s (kg/cm ²)	$T = C_c$ (ton)	M (ton · m)	$\varphi \cdot 10^{-4}$ (1/cm)
0.0005	0.229	0.341	21.70	0.00088	1853	37.472	19.711	0.2305
0.0010	0.417	0.350	22.50	0.00167	3500	70.840	36.925	0.4444
0.0015	0.563	0.361	20.20	0.00296	4200	85.008	44.803	0.7426
0.0020	0.667	0.375	18.00	0.00506	4200	85.008	45.270	1.1111
0.0025	0.731	0.392	15.80	0.00699	4289	86.803	46.705	1.5823
0.0030	0.769	0.408	15.52	0.00860	4429	89.559	48.109	1.9330
0.0035	0.793	0.421	15.45	0.01009	4556	92.126	49.276	2.2654
0.0040	0.808	0.433	15.60	0.01138	4663	94.299	50.210	2.5641
0.0045	0.817	0.443	15.80	0.01259	4762	96.279	50.030	2.8481
0.0050	0.822	0.452	16.00	0.01375	4854	98.149	51.799	3.1250
0.0055	0.822	0.459	16.20	0.01487	4941	99.916	52.516	3.3951
0.0060	0.822	0.466	16.50	0.01582	5014	101.381	53.030	3.6364
0.0065	0.820	0.473	16.70	0.01685	5092	102.952	53.645	3.8922
0.0070	0.815	0.479	17.00	0.01771	5154	104.223	54.053	4.1177
0.0075	0.810	0.484	17.40	0.01836	5202	105.186	54.248	4.3104
0.0080	0.804	0.490	17.70	0.01912	5256	106.281	54.511	4.5198
0.0085	0.797	0.495	18.00	0.01983	5307	107.300	54.823	4.7222
0.0090	0.790	0.500	18.30	0.02051	5353	108.248	55.048	4.9180
0.0100	0.773	0.510	19.00	0.02158	5426	109.725	55.214	5.2632
0.0150	0.674	0.557	22.50	0.02500	5649	114.221	55.206	6.6667
0.0200	0.562	0.616	27.00	0.02444	5614	113.514	49.228	7.4074

Los cálculos para diversos valores de ε_{cm} se presentan en la Tabla 18.1 y la Figura 18.6 junto con la relaciones de momento-curvatura para las vigas de los ejemplos 5.3 al 5.8.

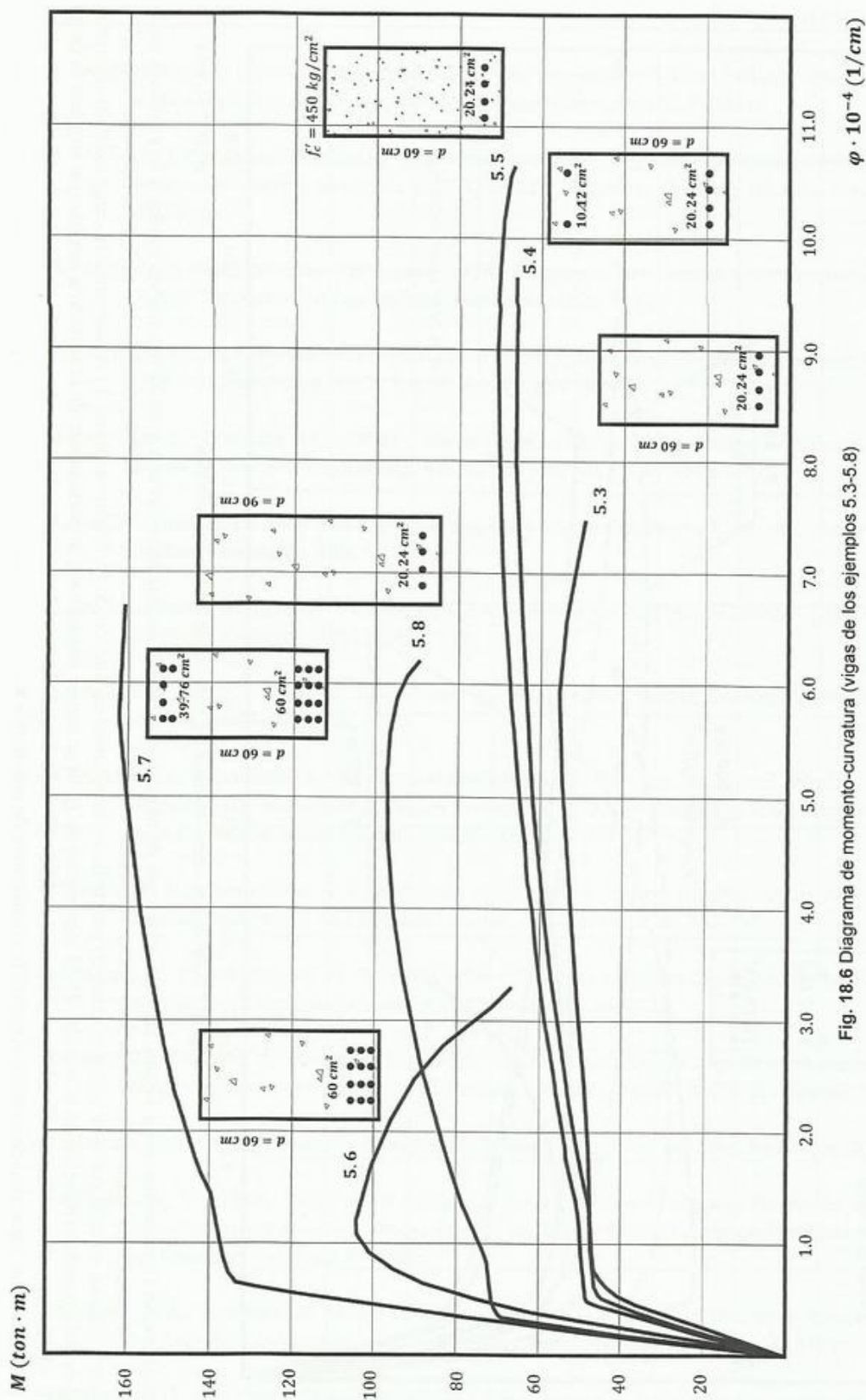
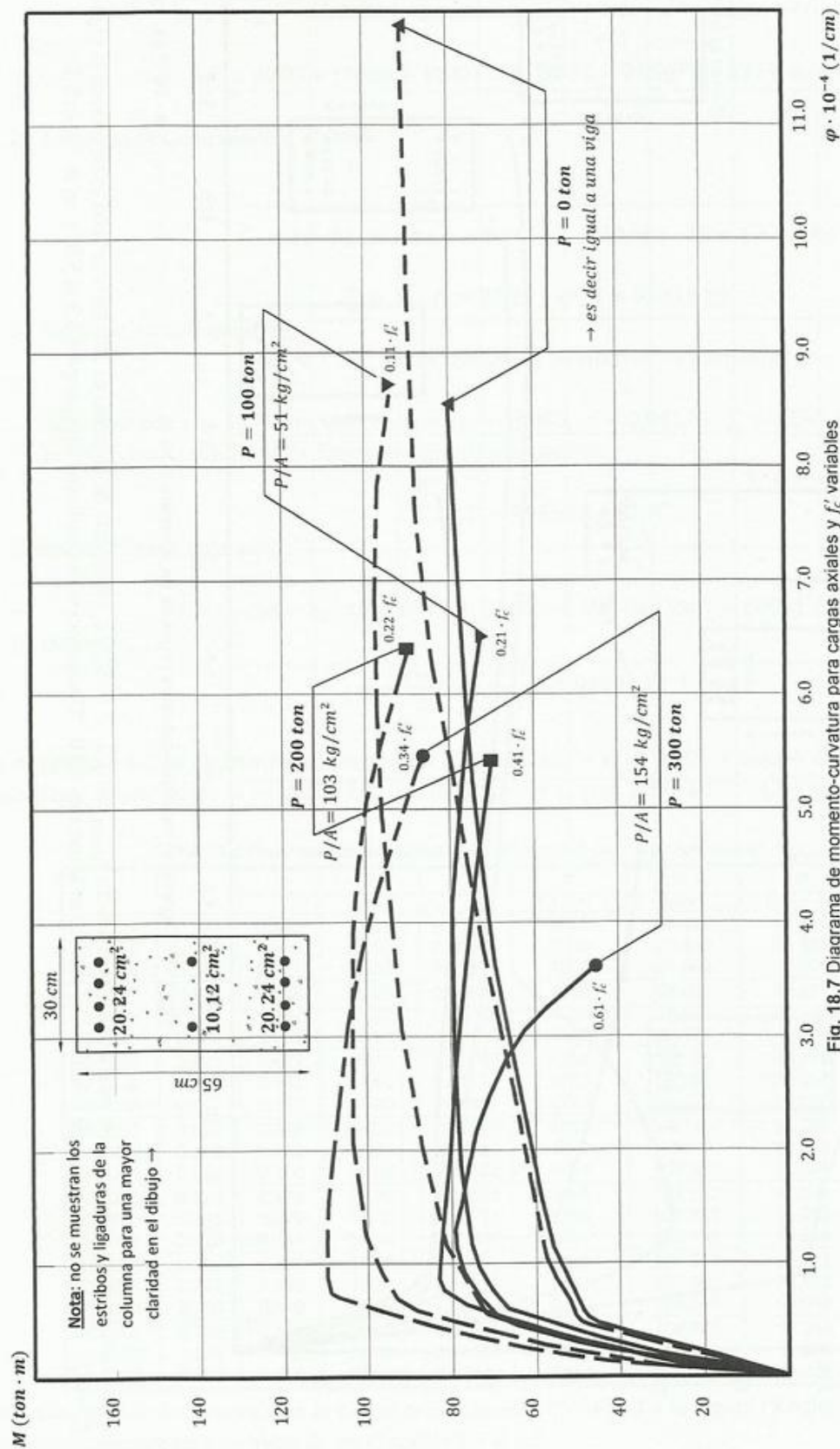


Fig. 18.6 Diagrama de momento-curvatura (vigas de los ejemplos 5.3-5.8)

La máxima deformación en el concreto para todas las gráficas es $\epsilon_{c \text{ máx}} = 0.02$. $Z = 50$. La resistencia de concreto es 250 kg/cm^2 con excepción de la viga 5.5 con $f'_c = 450 \text{ kg/cm}^2$. El análisis de resultados se resume en la sección 5.10 "Comparación de resultados del ejemplos 5.3 al 5.8" y en la Tabla 5.7.

Fig. 18.7 Diagrama de momento-curvatura para cargas axiales y f'_c variables

Como complemento se presentan en la Figura 18.7 las relaciones de momento-curvatura de una columna con sección transversal similar a la estudiada en la Figura 18.6. La cuantía de acero ρ es 2.6%. Las líneas punteadas corresponden a columnas con $f'_c = 450 \text{ kg/cm}^2$ y las sólidas a columnas con $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$. Al final de cada curva se indica el esfuerzo promedio en la columna en función de f'_c . **Observaciones:** 1) Al aumentar la carga axial disminuye la capacidad de deformación o rotación de la sección. 2) El incremento de f'_c tiene mayor impacto el comportamiento de la sección a medida que aumenta la carga axial (P). 3) Recomendamos limitar el esfuerzo promedio a $0.25 \cdot f'_c$ bajo cargas de servicio en columnas de estructuras aporricadas localizadas en zonas sísmicas para garantizar capacidad de rotación sin pérdida significativa de resistencia ■.

REFERENCIAS

1. AASHTO LRFD (2005), "*Bridge Specification and Commentary*", Third Edition, American Association of State Highways and Transportation Officials, Washington DC, 1436 pp.
2. ACI-ASCE Committee 352 (2002), "*Recommendations for Design of Beam-Column Joints in Monolithic Reinforced Concrete Structures (ACI 352R-02)*", American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 18 pp.
3. ACI-ASCE Joint Committee 426 Report, (1978), "*Suggested Revisions to Shear Provisions for Building Codes*", American Concrete Institute, Farmington Hills, 88 p.
4. ACI-ASCE Joint Committee 426 Report (1973), "*Shear Strength of Reinforced Concrete Members (ACI 426R-74)*", Proceedings, ASCE, Vol. 99, No. ST6, pp. 1148-1157.
5. ACI-ASCE Committee 445 (1998), "*Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete*", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 124, No. 12, pp. 1375-1417.
6. ACI Committee 318-63, "*Building Code Requirements for Reinforced Concrete*", American Concrete Institute, Farmington Hills.
7. ACI Committee 318, (2008) "*Building Code Requirements for Reinforced Concrete*", American Concrete Institute, Farmington Hills, 2008, 479 pp.
8. ACI-IPSI (2002), "*Essential Requirements for Reinforced Concrete Buildings*", American Concrete Institute, Farmington Hills, 247 p.
9. Aguilar G., Matamoros A. B., Parra-Montesinos, G. J., Ramirez J. A. and Wight, J. K., (2002), "*Experimental Evaluation of Design Procedures for Shear Strength of Deep Reinforced Concrete Beams*", ACI Structural Journal, Vol. 99, No. 4 pp. 539-548
10. Bass, R. A., Carrasquillo, R. L. and Jirsa, J. O., (1989), "*Shear Transfer Across New and Existing Concrete Interfaces*", ACI Structural Journal, Vol. 86, No. 4 pp. 383-393.
11. Bazant, Z. P. and Kazemi, M. T., (1991), "*Size Effect on Diagonal Shear Failure of Beams Without Stirrups*", ACI Structural Journal, Vol. 88, No. 3, pp. 268-276.
12. Bett, B., Klingner, R. and Jirsa, J. (1988), "*Lateral Load Response of Strengthened and Repaired Reinforced Concrete Columns*", ACI Structural Journal, Vol. 85, No. 5, pp. 499-508.
13. Beedle, L. S., (1958) "*Plastic Design of Steel Frames*", John Wiley and Sons, New York, 406 p.
14. Bertero, V. V., (1984), "*State of Art Practice in Seismic Resistant Design of Reinforced Concrete Wall-Frame Structural Systems*", Proceedings of the 8th World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, Vol. 5, pp. 613-620.
15. Blume, J. A., Newmark, N. M. and Corning, L. H., (1961), "*Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*", Portland Cement Association, Skokie, Ill, 318 p.
16. Branson, D. E., (1965), "*Instantaneous and Time-Dependent Deflections on Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams*", HPR Report No. 7, Part 1, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, pp. 1-78.

17. Bresler, B., (1960), "*Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending*", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 57, No. 5, pp. 481-490.
18. Brown M., and Bayrak O., (2008) "*Design of Deep Beams Using Strut-and-Tie Models. Part II Design Recommendations*" ACI Structural Journal, Vol. 105, No. 4, pp. 405-413.
19. Canbolat, B. and Wight J. K., (2008), "*Experimental Investigation on Seismic Behavior of Eccentric Reinforced Concrete Beam-Column-Slab Connections*", ACI Structural Journal, Vol. 105, No. 2, pp. 154-162.
20. Canbolat, A. B., Parra-Montesinos, G. J. and Wight J. K., (2005), "*Experimental Study on Seismic Behavior of High-Performance Fiber-Reinforced Cement Composite Coupling Beams*", ACI Structural Journal, Vol. 101, No. 1, pp. 159-166.
21. Cárdenas, A. and Magura, D. D., (1973), "*Strength of High Rise Shear Walls -Rectangular Cross Section*", Response of Multistory Concrete Structure to Lateral Forces, SP-36, American Concrete Institute, Detroit, MI, pp. 119-150.
22. Choi K. K., Park, H. G. and Wight, J. K. (1999), "*Unified Shear Strength Model for Reinforced Concrete Beams—Part I: Development*", ACI Structural Journal, Vol. 104, No. 2, pp.142-152.
23. Cohn, M. Z., (1965), "*Rotational Compatibility in the Limit Design of Reinforced Concrete Continuous Beams*", Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, SP-12, American Concrete Institute/American Society of Civil Engineers, Farmington Hills, MI, 1965, pp. 359-382.
24. Collins, M. P. and Mitchell, D., (1991), "*Prestressed Concrete Structures*", Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, NJ, 766 p.
25. Collins M. P., Walsh P. F., Archer F.E., and Hall., A. S., (1968), "*Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Bending*", Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 379-402.
26. Corley, W. G. and Sozen, M. A., (1966), "*Time-Dependent Deflections Reinforced Concrete Beams*" Journal of the American Concrete Institute, Vol. 63, No. 3, pp. 373-386.
27. Coulomb C.A., (1776), "*Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs a l'architecture*", Memoires de l'Academie Royale pres Divers Savants, Vol. 7.
28. COVENIN Mindur 1756-2001-1, (2001), "*Edificaciones Sismo-Resistentes*" 1era. Revisión.
29. COVENIN Mindur 2002-88, (1998), "*Criterios y Acciones Mínimas para el Proyecto de Edificaciones*".
30. Cross, H., (1952), "*Engineers and Ivory Towers*", McGraw-Hill Book Company inc. 141 p.
31. Cross, H., and Morgan, N.D., (1932), "*Continuous Frames of Reinforced Concrete*", J. Wiley & Sons, inc. London, Chapman & Hall. 343 p.
32. Durrani, A. J. and Wight, J. K., (1982), "*Experimental and Analytical Study of Internal Beam to Column Connections Subjected to Reversed Cyclic Loading*", Report No. UMEE 82R3, Department of Civil Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, 275 pp.

33. Ehsani, M.R. and Wight, J. K., (1985), "*Effect of Transverse Beams and Slab on Behavior of Reinforced Concrete Beam to Column Connections*", ACI Structural Journal, Vol. 82, No.2, pp. 188-195.
34. Englekirk, R., (2004), "*Seismic Design of Reinforced and Precast Concrete Buildings*", J Wiley & Sons, INC., New Jersey, 825 p.
35. Ersoy U., (2000), "*Reinforced Concrete*", Department of Civil Engineering, Middle East Technical University, Ankara, 437 p.
36. Ersoy, U. and Ferguson, P., M., (1968), "*Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Shear - Experimental Trends*", Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 1968, pp. 441-460.
37. Furlong, R. W., (1971), "*Column Slenderness and Charts for Design*", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 68, No. 1, pp. 9-18.
38. Fanella, D., Rabbat, B., editors (2002), "*Notes on ACI 318-02 Building Code Requirements for Structural Concrete with Design Applications*", Portland Cement Association, Skokie, Ill. pp.
39. Febres, E. (1992), "*Fundaciones Superficiales*", Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Mérida, 114 p.
40. Ferguson, P. M., Breen, J. E., and Jirsa, J. O., (1988), "*Reinforced Concrete Fundamentals*", John Wiley and Sons, New York. 746 p.
41. Florez-Lopez J., (1998), "*Frame Analysis and Continuum Damage Mechanics*". European Journal of Mechanics, Vol. 17, No 2.
42. Frosch, R. J., (1999), "*Another Look at Cracking and Crack Control in Reinforced Concrete*", ACI Structural Journal, Vol. 96, No. 3, pp. 437-442.
43. Frosch, R. J., (2002) "*Modeling and Control of Side Face Beam Cracking*", ACI Structural Journal, V. 99, No. 3, pp. 376-385.
44. García, L. E., (1996), "*Economic Considerations of Displacement Based Design of Structural Concrete Buildings*" Structural Engineering International, International Association of Bridge and Structural Engineering, IABSE, Zurich, Switzerland.
45. García, L. E. and Sozen, M. A., (2004), "*Earthquake Resistant Design of Reinforced Concrete Buildings*", Earthquake Engineering From Seismology to Performance-Based Design, Edited by Bozorgnia Y., and Bertero, V., V., CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 14.1-14.85
46. Gergely, P. and Lutz, L. A., (1968), "*Maximum Crack Width in Reinforced Concrete Flexural Members*", Causes, Mechanism, and Control of Cracking in Concrete, SP-20, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 87-117.
47. Ghannoum, W., Shin, Y., and, Moehle, J. (2005), "*Collapse Tests of Lightly Confined Reinforced Concrete Columns and Frames*", Proceedings, First NEES/E-DEFENSE Workshop on Collapse Simulation of Reinforced Concrete Building Structures, Berkeley, California, 6-8 July, 2005

48. Goto Y., (1971), "*Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tensions Bars*", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 68, No. 4, p. 244-251.
49. Gouwens, A., (1975), "*Biaxial Bending Simplified*", SP-50, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 233-263.
50. Guyon, Y., (1960), "*Prestress Concrete*", John Wiley & Sons Inc., New York.
51. Hillerborg, A., (1975), "*Strip Method of Design*", E. & F. N. Spot, London, 268 p.
52. Hillerborg, A., (1982), "*The Advanced Strip Method-A Simple Design Tool*", Magazine of Concrete Research, Vol. 34, No. 121, pp. 175-181.
53. Hognestad, E., (1951), "*A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members*" Bulletin 399, University of Illinois Engineering Experimental Station, Urbana, Ill., 128 pp.
54. Hsu, T.T.C., (1968), "*Torsion of Structural Concrete-Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members*", Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 291-306.
55. Hsu, T.T.C., (1993), "*Unified Theory of Reinforced Concrete*", CRC Press, Inc., Boca Raton FL.
56. Jiménez-Montoya, P., García-Meseguer, A. y Morán-Cabré, F. (2000), "*Hormigón Armado*", Décimo Cuarta Edición, Editorial Gustavo Gili, Barcelona 844 p.
57. Jirsa, J. O., (1981), "*Beam-Column Joints: Irrational Solutions to a Rational Problem*", SP-72, American Concrete Institute, Detroit, MI, pp. 128-.
58. Kunnath, S.K., Reinhorn, A. M. and Park, Y.J. (1990), "*Analytical Modeling of Inelastic Seismic Response of R/C Structures*", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.116, No.4, pp. 996-1017.
59. Lenschow, R. J. and Sozen, M. A., (1965), "*Practical Analysis of the Anchorage Zone Problem in Prestressed Beams*" Journal of the American Concrete Institute, Vol. 62, No. 12, pp. 1503-1517.
60. Lepage, A., Neuman, S. and Dragovich, J., (2006). "*Practical Modeling for Nonlinear Seismic Response of RC Wall Structures*", Eighth National Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, California, 10 pages.
61. Lin, T. Y. and Burns. N., (1981), "*Design of Prestress Concrete Structures*", Third edition. John Wiley & Sons, New York, 641 p.
62. Lobo-Quintero W., (1967), "*Determinación de la Presión de Contacto en Fundaciones Aisladas Superficiales*", Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Mérida, 36 p.
63. Lobo-Quintero W., (1969), "*Diseño Rápido de Fundaciones Aisladas Rectangulares*", Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Mérida, 15 p.
64. MacGregor J. G., (2002), "*Derivation of Strut-and-Tie Models for the 2002 ACI Code*", Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-Tie Models, SP-208, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 7-40.

65. MacGregor J. G., Breen, J. E. and Pfrang, E. O., (1970), "*Design of Slender Columns*", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 67, No. 1, pp. 6-28.
66. MacGregor, J.G., Sozen M. A., and Seiss. C. P., (1965), "*Strength of Prestressed Concrete Beams With Web Reinforcement*", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 62, No. 12, pp. 1503-1517.
67. Maillart, R., (1938), "*Aktuelle Fragen Des Eisenbetonbaues*", Schweizerische Bauzeitung, 66 p.
68. Marin, J., (1980), "*Computing Unidimensional Normal Stress Resultants*" Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. 1, pp. 233-245
69. Mast, R. F., (1992), "*Unified Design Provision for Reinforced and Prestressed Concrete Flexural and Compression Members*," ACI Structural Journal, Vol. 89, No. 2, pp. 185-199.
70. Matamoros, A. B., (1999), "*A Study of Drift Limits for High Strength Concrete Columns*", PhD Thesis, Civil Engineering, University of Illinois, Urbana-Champaign.
71. Mattock, A., H., (1965), "*Rotation Capacity of Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams*", Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, SP-12, American Concrete Institute/American Society of Civil Engineers, Farmington Hills, MI, pp. 143-187.
72. Mattock, A. G., Kriz, L. B. and Hognestad, E., (1961), "*Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design*" Journal of the American Concrete Institute, Vol. 573, No. 8, pp. 875-926.
73. Meek, J. L., (1963), "*Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads*", ", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 60, No. 8, pp 1053-1064.
74. Meinheit, D. F., and Jirsa, J. O., (1981), "*A Study of Shear Behavior of Beam-Column Connections*", Journal of Structural Engineering, ASCE, ST. 11, pp. 2227-.
75. Mitchell, D. and Collins, M. P., (1976). "*Detailing for Torsion*", ACI Structural Journal, Vol. 73, No. 9, pp. 506-511.
76. Moehle, J P., Wallace, J. W. and Hwang, J. D., (1991), "*Anchorage Lengths for Straight Bars in Tension*", ACI Structural Journal, Vol. 88, No. 5, pp. 531-537.
77. Mononobe, N. and Matsuo, H. (1929). "*On the Determination of Earth Pressures During Earthquakes*," Proceedings, World Engineering Congress, 9, p.176.
78. Naaman, A. E., (2004), "*Prestress Concrete Analysis and Design*". Second Edición. Techno Press 3000. Ann Arbor MI, 1072 p.
79. Nervi, P. L., (1956), "*Structures*", F. W. Dodge Corporation. 118 p.
80. Nowak A. S., and Collins K., (2000), "*Reliability of Structures*", McGraw-Hill, New York, 2000, p. 338.
81. Nowak, A. S., and Szerszen, M. M., (2001), "*Reliability-Based Calibration for Structural Concrete*", Report UMCEE 01-04, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI.
82. Okabe, S. (1926), "*General Theory of Earth Pressures*," Journal of the Japan Society of Civil Engineering, Vol. 12, No. 1.

83. Ospina, C. E., and Alexander, S. D. B., (1998), "*Transmission of Interior Concrete Column Loads through Floors*," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 124, No. 6, pp. 602-610.
84. Park, R. and Gamble, W., (1980), "*Reinforced Concrete Slabs*", John Willey & Sons, New York, 618 p.
85. Park, R. and Paulay, T., (1975), "*Reinforced Concrete Structures*", John Willey & Sons, New York, 769 p.
86. Parme, A. L., Nieves, J. M., and Gouwens, A., (1966), "*Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending*" Journal of the American Concrete Institute, Vol. 63, No. 9, pp. 911-923.
87. Parra-Montesinos, G. J., (2006), "*Shear Strength of Beams with Deformed Steel Fibers*", Concrete International, Vol. 28, No. 11, pp. 57-66.
88. Parra-Montesinos, G. J., (2008), "*Strut-and-Tie Models for Deep Beam Design*", Concrete International, Vol. 30, No. 12, pp. 40-46.
89. Paulay, T. and Priestley, M. J. N., (1992), "*Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*", John Willey & Sons, Inc., 744 p.
90. Paulay, T. and Santhakumar, A. R., (1976), "*Ductile Behavior of Couple Shear Walls*", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 102, No. ST1, pp. 93-108.
91. Pauw, A., (1960), "*Static Modulus of Elasticity of Concrete as Affected by Density*", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 57, No. 6, pp. 679-687.
92. Popov, E. P., Bertero V. V., and Krawinkler, H., (1972), "*Cyclic Behavior of Three R/C Flexural Members with High Shear*", EERC Report 72-5, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
93. Poston, R. H., Gilliam, T. E., Yamamoto, Y. and Breen, J. E. (1985), "*Hollow Concrete Bridge Pier Behavior*", ACI Structural Journal, Vol. 82, No. 6, pp 779-787.
94. Prandtl, L., (1903), "*Zur Torsion Von Prismatischen Stäben*", Phys. Zeitschr., 4, pp. 758-770
95. Priestley, M. J. N., Evison, R. J. and Carr, A. J., (1978), "*Seismic Response of Structures Free to Rock on Their Foundations*" Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering, Vol. 11, No. 3, pp. 141-150
96. Pujol, S., Sozen, M. A., and Ramírez, J. A., (2000), "*Transverse Reinforcement for Columns of RC Frames to Resist Earthquakes*", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, (4), pp. 461-466.
97. Quintero-Febres, C., G. and Wight, J. K., (2001), "*Wide Beam to Column Connections*" ACI Structural Journal, Vol. 98, No. 4, pp. 572-582.
98. Ramirez, J., and Breen, J. E., (1991), "*Evaluation of a Modified Truss-Model Approach for Beams in Shear*", ACI Structural Journal, Vol. 88, No. 5, pp. 562-571
99. Rankine, W., (1857), "*On the Stability of Loose Earth*", Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 147.

REFERENCIAS

100. Richart, F. E., Brandtzaeg, A. and Brown, R. L., (1928), "A study of the failure of Concrete under Combined Compressive Stresses", Bulletin No. 190, University of Illinois Engineering Experimental Station, Urbana, Ill.
101. Richart, F. E., Brandtzaeg, A. and Brown, R. L., (1929), "A study of the failure of Concrete under Combined Compressive Stresses", Bulletin No. 185, University of Illinois Engineering Experimental Station, Urbana, Ill.
102. Ritter, W., (1899), "Die Bauweise Hennebique" Scheizerische Bauzeitung. No. 7, Zurich, 60 p.
103. Roy, H. E. and Sozen, M. A., (1965), "Ductility of Concrete", Flexural Mechanics of Reinforced concrete, SP-12, American Concrete Institute/American Society of Civil Engineers, Farmington Hills, MI, pp. 213-235.
104. Saqan, E. I. and Frosch, R. J., (2009), "Influence of Flexural Reinforcement on Shear Strength of Prestressed Concrete Beams", ACI Structural Journal, Vol. 106, No. 1, pp. 60-68.
105. Seed, H. B. and Whitman, R. V., (1970), "Design of Earth Retaining Structures for Dynamic Loads" in Proceedings, ASCE Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth-Retaining Structures, Ithaca, New York, pp. 103-147.
106. Smith-Pardo, J. P., (2008), "Reinforced Concrete Walls with Vulnerable Foundations" Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, Vol. 134, No. 2, pp. 257-261.
107. Sanders, D. H. and Breen, J. E., (1997), "Post-Tensioned Anchorage Zones with Single Straight Concentric Anchorages", ACI Structural Journal, Vol. 94, No. 2, pp. 146-158.
108. Sozen, M. A., (2004), "Seismic Behavior of Reinforced Concrete Buildings", Earthquake Engineering From Seismology to Performance-Based Design, Edited by Bozorgnia Y., and Bertero, V., V., CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 13.1-13.41
109. Sozen, M. A., (1989), "Earthquake Response of Buildings with Robust Walls", Proceedings 5th Chilean Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile, August, 14 pp.
110. Sozen, M. A. and Seiss, C. P., (1963), "Investigation of Multiple Panel Reinforced Concrete Floor Slabs, Design Method - Their Evolution and Comparison", ACI Structural Journal, Vol. 60, No. 8, pp. 999-1027.
111. Sozen, M. A., Swoyer E. M. and Siess, C. P., (1959), "Strength in Shear of Beams Without Web Reinforcement", Engineering Experiment Station Bulletin No. 452, University of Illinois, Urbana.
112. Sturman, G., Sha S. and Winter, G., (1965), "Microcracking and Inelastic Behavior of Concrete", Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, SP-12, American Concrete Institute/American Society of Civil Engineers, Farmington Hills, MI, pp. 473-499.
113. Takeda, T., Sozen, M. A., and Nielsen, N. N. (1970), "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST12, pp. 2557-2573
114. Thomsen, J. H., and Wallace, J. W., (2004) "Displacement Design of Slender Reinforced Concrete Structural Walls-Experimental Verification", Journal of Structural Engineering, ASCE, V. 130, No. 4, 2004, pp. 618-630.

115. Tureyen, K. A. and Frosch, R. J., (2003), "*Concrete Shear Strength: Another Perspective*" ACI Structural Journal, Vol. 100, No. 5, pp. 609-615
116. Untrauer R.E. and Warren, G. E., (1977), "*Stress Development of Tension Steel in Beams*", Journal of the American Concrete Institute, Vol. 74, No. 8, pp. 368-
117. Vecchio, F. J. and Collins M. P. (1986), "*Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*", ACI Structural Journal, Vol. 83, No. 2, pp. 219-231.
118. Wang C. K. and Salmon, C. G., (1985), "*Reinforced Concrete Design*", Fourth Edition, Harper and Row Publishers.
119. Wight J. K., and MacGregor, J., (2008), "*Reinforced Concrete Mechanics and Design*", Fifth Edition, Prentice Hall, New Jersey.
120. Wight, J. K. and Sozen M. A., (1975), "*Shear Strength Decay of RC Columns under Shear Reversals*", Proceedings, ASCE, Vol. 101, ST5, pp. 1053-1065.
121. Winter G., Urquhart L. C., O'Rourke, C. E., and Nilson, A., H., (1964), "*Design of Concrete Structures*", Seventh Edition, McGraw-Hill, 660 p.
122. Wood, S. L., (1989), "*Minimum Tensile Reinforcement Requirements in Walls*", ACI Structural Journal, Vol. 87, No. 1, pp. 582-591.
123. Wood, S. L., (1990), "*Shear Strength of Low-Rise Reinforced Concrete Walls*", ACI Structural Journal, Vol. 87, No. 1, pp. 99-107.
124. Wyllie, L. A., Jr., (1987), "*Structural Walls and Diaphragms — How They Function*", Building Structural Design Handbook, R. N. White, and C. G. Salmon, eds., John Wiley & Sons, 1987, pp. 188-215.
125. Yura, J., (1971), "*The Effective Length of Columns in Unbraced Frames*", AISC Engineering Journal, Vol. 8, No. 2, pp. 37-42.
126. Zia, P. and Cárdenas, R., (1968), "*Combined Bending and Torsion of Reinforced Plaster Model Beams*", Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 441-460.
127. Zia, P. and Cárdenas, R., (1968), "*Combined Bending and Torsion of Reinforced Plaster Model Beams*", Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 441-460.
128. Zia, P., Preston, H. K., Scott, N. L. and Workman, E. B., (1979), "*Estimating Prestress Losses*", Concrete International: Design & Construction, Vol. 1, No. 6, pp. 32-38.

APÉNDICE A
TABLAS PARA EL DISEÑO DE VIGAS

Tabla A.1 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 20$ cm

d f'_c	20 (cm) 250 (kg/cm ²)									
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$	
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
2	2019	2.53	2423	3.04	2826	3.54	3230	4.05		
3	2948	3.79	3538	4.55	4128	5.31	4718	6.07		
4	3825	5.06	4590	6.07	5355	7.08	6120	8.10		
5	4648	6.32	5578	7.59	6508	8.85	7438	10.12		
6	5419	7.59	6503	9.11	7586	10.63	8670	12.14		
$A_{s\min}$ (cm ²)	1.67		2.00		2.33		2.67			
V_c (kg)	4190		5028		5866		6704			
W (kg/m)	156		188		219		250			

Tabla A.2 Valores de a (cm), M (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 25$ cm

d	25 (cm)								
f'_c	250 (kg/cm ²)								
a	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
(cm)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	
2	2550	2.53	3060	3.04	3570	3.54	4080	4.05	
3	2948	3.79	4494	4.55	5243	5.31	5993	6.07	
4	3825	5.06	5865	6.07	6843	7.08	7820	8.10	
5	4648	6.32	7172	7.59	8367	8.85	9563	10.12	
6	5419	7.59	8415	9.11	9818	10.63	11220	12.14	
7	6136	8.85	9594	10.63	11193	12.40	12793	14.17	
$A_{s\min}$ (cm ²)	2.08		2.50		2.92		3.33		
V_c (kg)	5238		6285		7333		8380		
W (kg/m)	188		225		263		300		

Tabla A.3 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 30$ cm

d f'_c		30 (cm) 250 (kg/cm ²)								$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)			
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
2	3081	2.53	3698	3.04	4314	3.54	4930	4.05	24.39	
3	4542	3.79	5451	4.55	6359	5.31	7268	6.07	15.57	
4	5950	5.06	7140	6.07	8330	7.08	9520	8.10	11.16	
5	7305	6.32	8766	7.59	10227	8.85	11688	10.12	8.51	
6	8606	7.59	10328	9.11	12049	10.63	13770	12.14	6.75	
7	9855	8.85	11826	10.63	13797	12.40	15768	14.17	5.49	
8	11050	10.12	13260	12.14	15470	14.17	17680	16.19	4.54	
9	12192	11.38	14631	13.66	17069	15.94	19508	18.21	3.81	
$A_{s\min}$ (cm ²)	2.50		3.00		3.50		4.00			
V_c (kg)	6285		7542		8799		10056			
W (kg/m)	219		263		306		350			

Tabla A.4 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 35$ cm

d	35 (cm)								$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
f'_c	250 (kg/cm ²)								
a	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		
(cm)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	
2	3613	2.53	4335	3.04	5058	3.54	5780	4.05	28.81
3	5339	3.79	6407	4.55	7475	5.31	8543	6.07	15.57
4	7013	5.06	8415	6.07	9818	7.08	11220	8.10	11.16
5	8633	6.32	10359	7.59	12086	8.85	13813	10.12	8.51
6	10200	7.59	12240	9.11	14280	10.63	16320	12.14	6.75
7	11714	8.85	14057	10.63	16400	12.40	18743	14.17	5.49
8	13175	10.12	15810	12.14	18445	14.17	21080	16.19	4.54
9	14583	11.38	17499	13.66	20416	15.94	23333	18.21	3.81
$A_{s\min}$ (cm ²)	2.92		3.50		4.08		4.67		
V_c (kg)	7333		8799		10266		11732		
W (kg/m)	250		300		350		400		

Tabla A.5 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 40$ cm

d	40 (cm)								$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
f'_c	250 (kg/cm ²)								
a	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		
(cm)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	
2	4144	2.53	4973	3.04	5801	3.54	6630	4.05	33.22
3	6136	3.79	7363	4.55	8590	5.31	9818	6.07	21.45
4	8075	5.06	9690	6.07	11305	7.08	12920	8.10	15.57
5	9961	6.32	11953	7.59	13945	8.85	15938	10.12	12.04
6	11794	7.59	14153	9.11	16511	10.63	18870	12.14	9.69
7	13573	8.85	16288	10.63	19003	12.40	21718	14.17	8.01
8	15300	10.12	18360	12.14	21420	14.17	24480	16.19	6.75
9	16973	11.38	20368	13.66	23763	15.94	27158	18.21	5.77
10	18594	12.65	22313	15.18	26031	17.71	29750	20.24	4.98
11	20161	13.91	24193	16.70	28225	19.48	32258	22.26	4.34
12	21675	15.18	26010	18.21	30345	21.25	34680	24.29	3.81
$A_{s\min}$ (cm ²)	3.33		4.00		4.67		5.33		
V_c (kg)	8380		10056		11732		13408		
W (kg/m)	281		338		394		450		

Tabla A.6 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 45$ cm

d f'_c		45 (cm) 250 (kg/cm ²)								$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)			
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
3	6933	3.79	8319	4.55	9706	5.31	11093	6.07	24.39	
4	9138	5.06	10965	6.07	12793	7.08	14620	8.10	17.78	
5	11289	6.32	13547	7.59	15805	8.85	18063	10.12	13.81	
6	13388	7.59	16065	9.11	18743	10.63	21420	12.14	11.16	
7	15433	8.85	18519	10.63	21606	12.40	24693	14.17	9.27	
8	17425	10.12	20910	12.14	24395	14.17	27880	16.19	7.85	
9	19364	11.38	23237	13.66	27110	15.94	30983	18.21	6.75	
10	21250	12.65	25500	15.18	29750	17.71	34000	20.24	5.87	
11	23083	13.91	27699	16.70	32316	19.48	36933	22.26	5.14	
12	24863	15.18	29835	18.21	34808	21.25	39780	24.29	4.54	
13	26589	16.44	31907	19.73	37225	23.02	42543	26.31	4.03	
$A_{s\min}$ (cm ²)	3.75		4.50		5.25		6.00			
V_c (kg)	9428		11313		13199		15084			
W (kg/m)	313		375		438		500			

Tabla A.7 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 50$ cm

d f'_c		50 (cm) 250 (kg/cm ²)								$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)			
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
3	7730	3.79	9276	4.55	10822	5.31	12368	6.07		
4	10200	5.06	12240	6.07	14280	7.08	16320	8.10		
5	12617	6.32	15141	7.59	17664	8.85	20188	10.12		
6	14981	7.59	17978	9.11	20974	10.63	23970	12.14		
7	17292	8.85	20751	10.63	24209	12.40	27668	14.17		
8	19550	10.12	23460	12.14	27370	14.17	31280	16.19		
9	21755	11.38	26106	13.66	30457	15.94	34808	18.21		
10	23906	12.65	28688	15.18	33469	17.71	38250	20.24		
11	26005	13.91	31206	16.70	36407	19.48	41608	22.26		
12	28050	15.18	33660	18.21	39270	21.25	44880	24.29		
13	30042	16.44	36051	19.73	42059	23.02	48068	26.31		
14	31981	17.71	38378	21.25	44774	24.79	51170	28.33		
15	33867	18.97	40641	22.77	47414	26.56	54188	30.36		
$A_{s\min}$ (cm ²)	4.17		5.00		5.83		6.67			
V_c (kg)	10475		12570		14665		16760			
W (kg/m)	344		413		481		550			

Tabla A.8 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 55$ cm

d f'_c		55 (cm) 250 (kg/cm ²)							
a (cm)	$b = 25$ (cm) M (kg · m) A_s (cm ²)		$b = 30$ (cm) M (kg · m) A_s (cm ²)		$b = 35$ (cm) M (kg · m) A_s (cm ²)		$b = 40$ (cm) M (kg · m) A_s (cm ²)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
3	8527	3.79	10232	4.55	11937	5.31	13643	6.07	30.28
4	11263	5.06	13515	6.07	15768	7.08	18020	8.10	22.19
5	13945	6.32	16734	7.59	19523	8.85	22313	10.12	17.34
6	16575	7.59	19890	9.11	23205	10.63	26520	12.14	14.10
7	19152	8.85	22982	10.63	26812	12.40	30643	14.17	11.79
8	21675	10.12	26010	12.14	30345	14.17	34680	16.19	10.06
9	24145	11.38	28974	13.66	33803	15.94	38633	18.21	8.71
10	26563	12.65	31875	15.18	37188	17.71	42500	20.24	7.63
11	28927	13.91	34712	16.70	40497	19.48	46283	22.26	6.75
12	31238	15.18	37485	18.21	43733	21.25	49980	24.29	6.01
13	33495	16.44	40194	19.73	46893	23.02	53593	26.31	5.39
14	35700	17.71	42840	21.25	49980	24.79	57120	28.33	4.86
15	37852	18.97	45422	22.77	52992	26.56	60563	30.36	4.39
16	39950	20.24	47940	24.29	55930	28.33	63920	32.38	3.99
17	41995	21.50	50394	25.80	58793	30.10	67193	34.40	3.63
$A_{s\min}$ (cm ²)	4.58		5.50		6.42		7.33		
V_c (kg)	11523		13827		16132		18436		
W (kg/m)	375		450		525		600		

Tabla A.9 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 60$ cm

d f'_c		60 (cm) 250 (kg/cm ²)							
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	
3	9323	3.79	11188	4.55	13053	5.31	14918	6.07	33.22
4	12325	5.06	14790	6.07	17255	7.08	19720	8.10	24.39
5	15273	6.32	18328	7.59	21383	8.85	24438	10.12	19.10
6	18169	7.59	21803	9.11	25436	10.63	29070	12.14	15.57
7	21011	8.85	25213	10.63	29415	12.40	33618	14.17	13.05
8	23800	10.12	28560	12.14	33320	14.17	38080	16.19	11.16
9	26536	11.38	31843	13.66	37150	15.94	42458	18.21	9.69
10	29219	12.65	35063	15.18	40906	17.71	46750	20.24	8.51
11	31848	13.91	38218	16.70	44588	19.48	50958	22.26	7.55
12	34425	15.18	41310	18.21	48195	21.25	55080	24.29	6.75
13	36948	16.44	44338	19.73	51728	23.02	59118	26.31	6.07
14	39419	17.71	47303	21.25	55186	24.79	63070	28.33	5.49
15	41836	18.97	50203	22.77	58570	26.56	66938	30.36	4.98
16	44200	20.24	53040	24.29	61880	28.33	70720	32.38	4.54
17	46511	21.50	55813	25.80	65115	30.10	74418	34.40	4.15
18	48769	22.77	58523	27.32	68276	31.88	78030	36.43	3.81
19	50973	24.03	61168	28.84	71363	33.65	81558	38.45	3.50
$A_{s\min}$ (cm ²)	5.00		6.00		7.00		8.00		
V_c (kg)	12570		15084		17598		20112		
W (kg/m)	406		488		569		650		

Tabla A.10 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 65$ cm

d 65 (cm) f'_c 250 (kg/cm ²)		$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
a (cm)		M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	
3		10120	3.79	12144	4.55	14168	5.31	16193	6.07	36.16
4		13388	5.06	16065	6.07	18743	7.08	21420	8.10	26.60
5		16602	6.32	19922	7.59	23242	8.85	26563	10.12	20.87
6		19763	7.59	23715	9.11	27668	10.63	31620	12.14	17.04
7		22870	8.85	27444	10.63	32018	12.40	36593	14.17	14.31
8		25925	10.12	31110	12.14	36295	14.17	41480	16.19	12.26
9		28927	11.38	34712	13.66	40497	15.94	46283	18.21	10.67
10		31875	12.65	38250	15.18	44625	17.71	51000	20.24	9.39
11		34770	13.91	41724	16.70	48678	19.48	55633	22.26	8.35
12		37613	15.18	45135	18.21	52658	21.25	60180	24.29	7.48
13		40402	16.44	48482	19.73	56562	23.02	64643	26.31	6.75
14		43138	17.71	51765	21.25	60393	24.79	69020	28.33	6.12
15		45820	18.97	54984	22.77	64148	26.56	73313	30.36	5.57
16		48450	20.24	58140	24.29	67830	28.33	77520	32.38	5.09
17		51027	21.50	61232	25.80	71437	30.10	81643	34.40	4.67
18		53550	22.77	64260	27.32	74970	31.88	85680	36.43	4.30
19		56020	24.03	67224	28.84	78428	33.65	89633	38.45	3.96
20		58438	25.30	70125	30.36	81813	35.42	93500	40.48	3.66
$A_{s\min}$ (cm ²)		5.42		6.50		7.58		8.67		
V_c (kg)		13618		16341		19065		21788		
W (kg/m)		438		525		613		700		

Tabla A.11 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 70$ cm

d f_c'		70 (cm) 250 (kg/cm ²)								$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)			
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
5	17930	6.32	21516	7.59	25102	8.85	28688	10.12	22.63	
6	21356	7.59	25628	9.11	29899	10.63	34170	12.14	18.51	
7	24730	8.85	29676	10.63	34622	12.40	39568	14.17	15.57	
8	28050	10.12	33660	12.14	39270	14.17	44880	16.19	13.37	
9	31317	11.38	37581	13.66	43844	15.94	50108	18.21	11.65	
10	34531	12.65	41438	15.18	48344	17.71	55250	20.24	10.28	
11	37692	13.91	45231	16.70	52769	19.48	60308	22.26	9.15	
12	40800	15.18	48960	18.21	57120	21.25	65280	24.29	8.22	
13	43855	16.44	52626	19.73	61397	23.02	70168	26.31	7.43	
14	46856	17.71	56228	21.25	65599	24.79	74970	28.33	6.75	
15	49805	18.97	59766	22.77	69727	26.56	79688	30.36	6.16	
16	52700	20.24	63240	24.29	73780	28.33	84320	32.38	5.64	
17	55542	21.50	66651	25.80	77759	30.10	88868	34.40	5.19	
18	58331	22.77	69998	27.32	81664	31.88	93330	36.43	4.79	
19	61067	24.03	73281	28.84	85494	33.65	97708	38.45	4.43	
20	63750	25.30	76500	30.36	89250	35.42	102000	40.48	4.10	
21	66380	26.56	79656	31.88	92932	37.19	106208	42.50	3.81	
22	68956	27.83	82748	33.39	96539	38.96	110330	44.52	3.54	
$A_{s\ min}$ (cm ²)		5.83		7.00		8.17		9.33		
V_c (kg)		14665		17598		20531		23464		
W (kg/m)		469		563		656		750		

Tabla A.12 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 75$ cm

d f'_c		75 (cm) 250 (kg/cm ²)								$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)			
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
5	19258	6.32	23109	7.59	26961	8.85	30813	10.12	24.39	
6	22950	7.59	27540	9.11	32130	10.63	36720	12.14	19.98	
7	26589	8.85	31907	10.63	37225	12.40	42543	14.17	16.83	
8	30175	10.12	36210	12.14	42245	14.17	48280	16.19	14.47	
9	33708	11.38	40449	13.66	47191	15.94	53933	18.21	12.63	
10	37188	12.65	44625	15.18	52063	17.71	59500	20.24	11.16	
11	40614	13.91	48737	16.70	56860	19.48	64983	22.26	9.96	
12	43988	15.18	52785	18.21	61583	21.25	70380	24.29	8.95	
13	47308	16.44	56769	19.73	66231	23.02	75693	26.31	8.10	
14	50575	17.71	60690	21.25	70805	24.79	80920	28.33	7.38	
15	53789	18.97	64547	22.77	75305	26.56	86063	30.36	6.75	
16	56950	20.24	68340	24.29	79730	28.33	91120	32.38	6.20	
17	60058	21.50	72069	25.80	84081	30.10	96093	34.40	5.71	
18	63113	22.77	75735	27.32	88358	31.88	100980	36.43	5.28	
19	66114	24.03	79337	28.84	92560	33.65	105783	38.45	4.89	
20	69063	25.30	82875	30.36	96688	35.42	110500	40.48	4.54	
21	71958	26.56	86349	31.88	100741	37.19	115133	42.50	4.23	
22	74800	27.83	89760	33.39	104720	38.96	119680	44.52	3.94	
23	77589	29.09	93107	34.91	108625	40.73	124143	46.55	3.68	
$A_{s\min}$ (cm ²)		6.25		7.50		8.75		10.00		
V_c (kg)		15713		18855		21998		25140		
W (kg/m)		500		600		700		800		

Tabla A.13 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 80$ cm

d 80 (cm)		f'_c 250 (kg/cm ²)							
a	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
(cm)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	
6	24544	7.59	29453	9.11	34361	10.63	39270	12.14	21.45
7	28448	8.85	34138	10.63	39828	12.40	45518	14.17	18.09
8	32300	10.12	38760	12.14	45220	14.17	51680	16.19	15.57
9	36098	11.38	43318	13.66	50538	15.94	57758	18.21	13.61
10	39844	12.65	47813	15.18	55781	17.71	63750	20.24	12.04
11	43536	13.91	52243	16.70	60950	19.48	69658	22.26	10.76
12	47175	15.18	56610	18.21	66045	21.25	75480	24.29	9.69
13	50761	16.44	60913	19.73	71065	23.02	81218	26.31	8.78
14	54294	17.71	65153	21.25	76011	24.79	86870	28.33	8.01
15	57773	18.97	69328	22.77	80883	26.56	92438	30.36	7.34
16	61200	20.24	73440	24.29	85680	28.33	97920	32.38	6.75
17	64573	21.50	77488	25.80	90403	30.10	103318	34.40	6.23
18	67894	22.77	81473	27.32	95051	31.88	108630	36.43	5.77
19	71161	24.03	85393	28.84	99625	33.65	113858	38.45	5.35
20	74375	25.30	89250	30.36	104125	35.42	119000	40.48	4.98
21	77536	26.56	93043	31.88	108550	37.19	124058	42.50	4.65
22	80644	27.83	96773	33.39	112901	38.96	129030	44.52	4.34
23	83698	29.09	100438	34.91	117178	40.73	133918	46.55	4.06
24	86700	30.36	104040	36.43	121380	42.50	138720	48.57	3.81
25	89648	31.62	107578	37.95	125508	44.27	143438	50.60	3.57
$A_{s\min}$ (cm ²)	6.67		8.00		9.33		10.67		
V_c (kg)	16760		20112		23464		26816		
W (kg/m)	531		638		744		850		

Tabla A.14 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 85$ cm

d f'_c		85 (cm) 250 (kg/cm ²)								
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$	
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
6	26138	7.59	31365	9.11	36593	10.63	41820	12.14	22.92	
7	30308	8.85	36369	10.63	42431	12.40	48493	14.17	19.35	
8	34425	10.12	41310	12.14	48195	14.17	55080	16.19	16.67	
9	38489	11.38	46187	13.66	53885	15.94	61583	18.21	14.59	
10	42500	12.65	51000	15.18	59500	17.71	68000	20.24	12.92	
11	46458	13.91	55749	16.70	65041	19.48	74333	22.26	11.56	
12	50363	15.18	60435	18.21	70508	21.25	80580	24.29	10.42	
13	54214	16.44	65057	19.73	75900	23.02	86743	26.31	9.46	
14	58013	17.71	69615	21.25	81218	24.79	92820	28.33	8.64	
15	61758	18.97	74109	22.77	86461	26.56	98813	30.36	7.92	
16	65450	20.24	78540	24.29	91630	28.33	104720	32.38	7.30	
17	69089	21.50	82907	25.80	96725	30.10	110543	34.40	6.75	
18	72675	22.77	87210	27.32	101745	31.88	116280	36.43	6.26	
19	76208	24.03	91449	28.84	106691	33.65	121933	38.45	5.82	
20	79688	25.30	95625	30.36	111563	35.42	127500	40.48	5.42	
21	83114	26.56	99737	31.88	116360	37.19	132983	42.50	5.07	
22	86488	27.83	103785	33.39	121083	38.96	138380	44.52	4.74	
23	89808	29.09	107769	34.91	125731	40.73	143693	46.55	4.45	
24	93075	30.36	111690	36.43	130305	42.50	148920	48.57	4.17	
25	96289	31.62	115547	37.95	134805	44.27	154063	50.60	3.92	
26	99450	32.89	119340	39.46	139230	46.04	159120	52.62	3.69	
27	102558	34.15	123069	40.98	143581	47.81	164093	54.64	3.48	
$A_s \text{ min (cm}^2\text{)}$	7.08		8.50		9.92		11.33			
V_c (kg)	17808		21369		24931		28492			
W (kg/m)	563		675		788		900			

Tabla A.15 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 90$ cm

d	90 (cm)								
f'_c	250 (kg/cm ²)								
a	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
(cm)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	
6	27731	7.59	33278	9.11	38824	10.63	44370	12.14	24.39
7	32167	8.85	38601	10.63	45034	12.40	51468	14.17	20.61
8	36550	10.12	43860	12.14	51170	14.17	58480	16.19	17.78
9	40880	11.38	49056	13.66	57232	15.94	65408	18.21	15.57
10	45156	12.65	54188	15.18	63219	17.71	72250	20.24	13.81
11	49380	13.91	59256	16.70	69132	19.48	79008	22.26	12.36
12	53550	15.18	64260	18.21	74970	21.25	85680	24.29	11.16
13	57667	16.44	69201	19.73	80734	23.02	92268	26.31	10.14
14	61731	17.71	74078	21.25	86424	24.79	98770	28.33	9.27
15	65742	18.97	78891	22.77	92039	26.56	105188	30.36	8.51
16	69700	20.24	83640	24.29	97580	28.33	111520	32.38	7.85
17	73605	21.50	88326	25.80	103047	30.10	117768	34.40	7.27
18	77456	22.77	92948	27.32	108439	31.88	123930	36.43	6.75
19	81255	24.03	97506	28.84	113757	33.65	130008	38.45	6.28
20	85000	25.30	102000	30.36	119000	35.42	136000	40.48	5.87
21	88692	26.56	106431	31.88	124169	37.19	141908	42.50	5.49
22	92331	27.83	110798	33.39	129264	38.96	147730	44.52	5.14
23	95917	29.09	115101	34.91	134284	40.73	153468	46.55	4.83
24	99450	30.36	119340	36.43	139230	42.50	159120	48.57	4.54
25	102930	31.62	123516	37.95	144102	44.27	164688	50.60	4.28
26	106356	32.89	127628	39.46	148899	46.04	170170	52.62	4.03
27	109730	34.15	131676	40.98	153622	47.81	175568	54.64	3.81
28	113050	35.42	135660	42.50	158270	49.58	180880	56.67	3.60
$A_{s\min}$ (cm ²)	7.50		9.00		10.50		12.00		
V_c (kg)	18855		22626		26397		30168		
W (kg/m)	594		713		831		950		

Tabla A.16 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 95$ cm

d f'_c		95 (cm) 250 (kg/cm ²)									
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$		
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	(cm)	M (kg · m)	A_s (cm ²)			
6	29325	7.59	35190	9.11	41055	10.63	46920	12.14	25.87		
7	34027	8.85	40832	10.63	47637	12.40	54443	14.17	21.87		
8	38675	10.12	46410	12.14	54145	14.17	61880	16.19	18.88		
9	43270	11.38	51924	13.66	60578	15.94	69233	18.21	16.55		
10	47813	12.65	57375	15.18	66938	17.71	76500	20.24	14.69		
11	52302	13.91	62762	16.70	73222	19.48	83683	22.26	13.16		
12	56738	15.18	68085	18.21	79433	21.25	90780	24.29	11.89		
13	61120	16.44	73344	19.73	85568	23.02	97793	26.31	10.82		
14	65450	17.71	78540	21.25	91630	24.79	104720	28.33	9.90		
15	69727	18.97	83672	22.77	97617	26.56	111563	30.36	9.10		
16	73950	20.24	88740	24.29	103530	28.33	118320	32.38	8.40		
17	78120	21.50	93744	25.80	109368	30.10	124993	34.40	7.79		
18	82238	22.77	98685	27.32	115133	31.88	131580	36.43	7.24		
19	86302	24.03	103562	28.84	120822	33.65	138083	38.45	6.75		
20	90313	25.30	108375	30.36	126438	35.42	144500	40.48	6.31		
21	94270	26.56	113124	31.88	131978	37.19	150833	42.50	5.91		
22	98175	27.83	117810	33.39	137445	38.96	157080	44.52	5.54		
23	102027	29.09	122432	34.91	142837	40.73	163243	46.55	5.21		
24	105825	30.36	126990	36.43	148155	42.50	169320	48.57	4.91		
25	109570	31.62	131484	37.95	153398	44.27	175313	50.60	4.63		
26	113263	32.89	135915	39.46	158568	46.04	181220	52.62	4.37		
27	116902	34.15	140282	40.98	163662	47.81	187043	54.64	4.13		
28	120488	35.42	144585	42.50	168683	49.58	192780	56.67	3.91		
29	124020	36.68	148824	44.02	173628	51.35	198433	58.69	3.70		
30	127500	37.95	153000	45.54	178500	53.13	204000	60.71	3.51		
$A_{s\min}$ (cm ²)		7.92		9.50		11.08		12.67			
V_c (kg)		19903		23883		27864		31844			
W (kg/m)		625		750		875		1000			

Tabla A.17 Valores de a (cm), \bar{M}_u (kg · m), A_s (cm²), W (kg/m), $d = 100$ cm

d f'_c		100 (cm) 250 (kg/cm ²)								
a (cm)	$b = 25$ (cm)		$b = 30$ (cm)		$b = 35$ (cm)		$b = 40$ (cm)		$\varepsilon_s/\varepsilon_y$	
	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	A_s (cm ²)	M (kg · m)	(cm)	M (kg · m)	A_s (cm ²)		
7	35886	8.85	43063	10.63	50240	12.40	57418	14.17	23.13	
8	40800	10.12	48960	12.14	57120	14.17	65280	16.19	19.98	
9	45661	11.38	54793	13.66	63925	15.94	73058	18.21	17.53	
10	50469	12.65	60563	15.18	70656	17.71	80750	20.24	15.57	
11	55223	13.91	66268	16.70	77313	19.48	88358	22.26	13.97	
12	59925	15.18	71910	18.21	83895	21.25	95880	24.29	12.63	
13	64573	16.44	77488	19.73	90403	23.02	103318	26.31	11.50	
14	69169	17.71	83003	21.25	96836	24.79	110670	28.33	10.53	
15	73711	18.97	88453	22.77	103195	26.56	117938	30.36	9.69	
16	78200	20.24	93840	24.29	109480	28.33	125120	32.38	8.95	
17	82636	21.50	99163	25.80	115690	30.10	132218	34.40	8.30	
18	87019	22.77	104423	27.32	121826	31.88	139230	36.43	7.73	
19	91348	24.03	109618	28.84	127888	33.65	146158	38.45	7.21	
20	95625	25.30	114750	30.36	133875	35.42	153000	40.48	6.75	
21	99848	26.56	119818	31.88	139788	37.19	159758	42.50	6.33	
22	104019	27.83	124823	33.39	145626	38.96	166430	44.52	5.95	
23	108136	29.09	129763	34.91	151390	40.73	173018	46.55	5.60	
24	112200	30.36	134640	36.43	157080	42.50	179520	48.57	5.28	
25	116211	31.62	139453	37.95	162695	44.27	185938	50.60	4.98	
26	120169	32.89	144203	39.46	168236	46.04	192270	52.62	4.71	
27	124073	34.15	148888	40.98	173703	47.81	198518	54.64	4.46	
28	127925	35.42	153510	42.50	179095	49.58	204680	56.67	4.23	
29	131723	36.68	158068	44.02	184413	51.35	210758	58.69	4.01	
30	135469	37.95	162563	45.54	189656	53.13	216750	60.71	3.81	
31	139161	39.21	166993	47.05	194825	54.90	222658	62.74	3.62	
$A_{s\ min}$ (cm ²)	8.33		10.00		11.67		13.33			
V_c (kg)	20950		25140		29330		33520			
W (kg/m)	656		788		919		1050			

Tabla A.18 Valores de $V_s = A_{sv} \cdot F_y \cdot d/s$ Acero A60. $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ Estribos de 2 ramas y $3/8"$

s	ALTURAS ÚTILES (cm)																
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
5	23856	29820	35784	41748	47712	53676	59640	65604	71568	77532	83496	89460	95424	101388	107352	113316	119280
6	19880	24850	29820	34790	39760	44730	49700	54670	59640	64610	69580	74550	79520	84490	89460	94430	99400
7	17040	21300	25560	29820	34080	38340	42600	46860	51120	55380	59640	63900	68160	72420	76680	80940	85200
8	14910	18638	22365	26093	29820	33548	37275	41003	44730	48458	52185	55913	59640	63368	67095	70823	74550
9	13253	16567	19880	23193	26507	29820	33133	36447	39760	43073	46387	49700	53013	56327	59640	62953	66267
10	11928	14910	17892	20874	23856	26838	29820	32802	35784	38766	41748	44730	47712	50694	53676	56658	59640
11		13555	16265	18976	21687	24398	27109	29820	32531	35242	37953	40664	43375	46085	48796	51507	54218
12		12425	14910	17395	19880	22365	24850	27335	29820	32305	34790	37275	39760	42245	44730	47215	49700
13			13763	16057	18351	20645	22938	25232	27526	29820	32114	34408	36702	38995	41289	43583	45877
14			12780	14910	17040	19170	21300	23430	25560	27690	29820	31950	34080	36210	38340	40470	42600
15			11928	13916	15904	17892	19880	21868	23856	25844	27832	29820	31808	33796	35784	37772	39760
16				13046	14910	16774	18638	20501	22365	24229	26093	27956	29820	31684	33548	35411	37275
17				12279	14033	15787	17541	19295	21049	22804	24558	26312	28066	29820	31574	33328	35082
18					13253	14910	16567	18223	19880	21537	23193	24850	26507	28163	29820	31477	33133
19					12556	14125	15695	17264	18834	20403	21973	23542	25112	26681	28251	29820	31389
20					11928	13419	14910	16401	17892	19383	20874	22365	23856	25347	26838	28329	29820
21						12780	14200	15620	17040	18460	19880	21300	22720	24140	25560	26980	28400
22						12199	13555	14910	16265	17621	18976	20332	21687	23043	24398	25754	27109
23							12965	14262	15558	16855	18151	19448	20744	22041	23337	24634	25930
24							12425	13668	14910	16153	17395	18638	19880	21123	22365	23608	24850
25							11928	13121	14314	15506	16699	17892	19085	20278	21470	22663	23856

Tabla A.19 Valores de $V_s = A_{sp} \cdot F_y \cdot d/s$ Acero A60. $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ Estribos de 2 ramas y $3/8"$

s	ALTURAS UTILES (cm)														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
26								12616	13763	14910	16057	17204	18351	19498	20645
27								12149	13253	14358	15462	16567	17671	18776	19880
28									12780	13845	14910	15975	17040	18105	19170
29									12339	13368	14396	15424	16452	17481	18509
30								11928		12922	13916	14910	15904	16898	17892
31										12505	13467	14429	15391	16353	17315
32										12114	13046	13978	14910	15842	16774
33											12651	13555	14458	15362	16265
34											12279	13156	14033	14910	15787
35											11928	12780	13632	14484	15336
36												12425	13253	14082	14910
37												12089	12895	13701	14507
38													12556	13341	14125
39													12234	12998	13763
40													11928	12674	13419
41														12364	13092
42														12070	12780
43															12483
44															12199
45															11928

Tabla A.20 Corte unitario resistido por estribos: $V_s/(b_w \cdot d)$ Acero A60. $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. Estribos de 2 ramas y $3/8"$

$s \text{ (cm)}$	$b_w \text{ (cm)}$						
	10	15	20	25	30	35	40
5	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	29.82
6	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	28.40	24.85
7	30.00	30.00	30.00	30.00	28.40	24.34	21.30
8	30.00	30.00	30.00	30.00	24.85	21.30	18.64
9	30.00	30.00	30.00	26.51	22.09	18.93	16.57
10	30.00	30.00	30.00	23.86	19.88	17.04	14.91
11	30.00	30.00	27.11	21.69	18.07	15.49	13.55
12	30.00	30.00	24.85	19.88	16.57	14.20	12.43
13	30.00	30.00	22.94	18.35	15.29	13.11	11.47
14	30.00	28.40	21.30	17.04	14.20	12.17	10.65
15	30.00	26.51	19.88	15.90	13.25	11.36	9.94
16	30.00	24.85	18.64	14.91	12.43	10.65	9.32
17	30.00	23.39	17.54	14.03	11.69	10.02	8.77
18	30.00	22.09	16.57	13.25	11.04	9.47	8.28
19	30.00	20.93	15.69	12.56	10.46	8.97	7.85
20	29.82	19.88	14.91	11.93	9.94	8.52	7.46
21	28.40	18.93	14.20	11.36	9.47	8.11	7.10
22	27.11	18.07	13.55	10.84	9.04	7.75	6.78
23	25.93	17.29	12.97	10.37	8.64	7.41	6.48
24	24.85	16.57	12.43	9.94	8.28	7.10	6.21
25	23.86	15.90	11.93	9.54	7.95	6.82	5.96
26	22.94	15.29	11.47	9.18	7.65	6.55	5.73
27	22.09	14.73	11.04	8.84	7.36	6.31	5.52
28	21.30	14.20	10.65	8.52	7.10	6.09	5.33
29	20.57	13.71	10.28	8.23	6.86	5.88	5.14
30	19.88	13.25	9.94	7.95	6.63	5.68	4.97

Tabla A.21 Corte unitario resistido por el concreto $v_c = 0.53 \cdot \sqrt{f'_c} = V_c/(b_w \cdot d)$

f'_c kg/cm^2	v_c kg/cm^2	$5 \cdot v_c$ kg/cm^2
210	7.68	30.72
250	8.38	33.52
280	8.87	35.47
300	9.18	36.72
350	9.92	39.66

Tabla A.22 Dimensiones y longitudes de los estribos

b	h	G = 7 cm			G = 7.5 cm		
		A	B	L	A	B	L
20	20	14	14	70	15	15	75
	25	19	14	80	20	15	85
	30	24	14	90	25	15	95
	35	29	14	100	30	15	105
	40	34	14	110	35	15	115
	45	39	14	120	40	15	125
25	30	24	19	100	25	20	105
	35	29	19	110	30	20	115
	40	34	19	120	35	20	125
	45	39	19	130	40	20	135
	50	44	19	140	45	20	145
	55	49	19	150	50	20	155
	31	54	19	160	55	20	165
30	40	34	24	130	35	25	135
	45	39	24	140	40	25	145
	50	44	24	150	45	25	155
	55	49	24	160	50	25	165
	60	54	24	170	55	25	175
	65	59	24	180	60	25	185
	70	64	24	190	65	25	195
	45	39	29	150	40	30	155
35	50	44	29	160	45	30	165
	55	49	29	170	50	30	175
	60	54	29	180	55	30	185
	65	59	29	190	60	30	195
	70	64	29	200	65	30	205
	75	69	29	210	70	30	215
	80	74	29	220	75	30	225
		$L = 2 \cdot (b' + h) - 10$			$L = 2 \cdot (b' + h) - 5$		

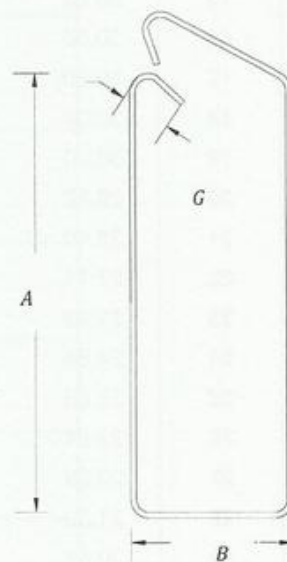
$$L = 2 \cdot (A + B + G)$$

En vigas altas $h > 90$ cm. Se colocarán en los costados de la viga, barras horizontales del mismo diámetro (o algo mayor) que los estribos, en una cantidad dada por,

$$0.05 \cdot A_s \rightarrow c/\text{costado}$$

separación ≤ 30 cm

En vigas anchas $b > 35$ cm es conveniente colocar estribos de más de dos ramas.

**Nota**

Los estribos se acotan por fuera

$$\begin{aligned} \text{rec} &= 2.5 \text{ cm (neto del estribo)} & G &= 7.5 \text{ cm} \\ &= 3.0 \text{ cm} & G &= 7.0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tabla A.23 Combinaciones de áreas de acero que caben en un ancho b

$b = 20 \text{ cm}$	Área (cm^2)	$b = 25 \text{ cm}$	Área (cm^2)
2 N° 2	2.54	5 N° 4	6.35
3 N° 4	3.81	2 N° 4 + 2 N° 5	6.50
2 N° 5	3.96	4 N° 5	7.92
2 N° 4 + 1 N° 5	4.50	2 N° 5 + 2 N° 6	9.66
4 N° 4	5.08	4 N° 6	11.4
2 N° 5 + 1 N° 4	5.23	2 N° 6 + 2 N° 7	13.44
2 N° 6	5.70	4 N° 7	15.48
3 N° 5	5.94		
2 N° 5 + 1 N° 6	6.81		
2 N° 6 + 1 N° 5	7.68		
2 N° 7	7.74		
3 N° 6	8.55		
2 N° 6 + 1 N° 7	9.57		
2 N° 8	10.12		
2 N° 7 + 1 N° 6	10.59		
3 N° 7	11.61		
2 N° 7 + 1 N° 8	12.80		
2 N° 8 + 1 N° 7	13.99		
3 N° 8	15.18		
$b = 30 \text{ cm}$	Área (cm^2)	$b = 35 \text{ cm}$	Área (cm^2)
6 N° 4	7.62	4 N° 4 + 2 N° 5	8.04
3 N° 5 + 2 N° 4	8.48	7 N° 4	8.89
5 N° 5	9.90	4 N° 5 + 2 N° 4	10.46
4 N° 5 + 1 N° 6	10.77	6 N° 5	11.88
3 N° 5 + 2 N° 6	11.64	4 N° 5 + 2 N° 6	13.62
3 N° 6 + 2 N° 5	12.51	4 N° 6 + 2 N° 5	15.36
4 N° 6 + 1 N° 5	13.38	6 N° 6	17.10
5 N° 6	14.25	4 N° 6 + 2 N° 7	19.14
4 N° 6 + 1 N° 7	15.27	4 N° 7 + 2 N° 6	21.18
3 N° 6 + 2 N° 7	16.32	6 N° 7	23.22
3 N° 7 + 2 N° 6	17.31	5 N° 8	25.30
4 N° 7 + 1 N° 6	18.33	7 N° 7	27.08
5 N° 7	19.35	10 N° 6	28.50
4 N° 8	20.24	6 N° 8	30.36
		5 N° 9	32.20

Tabla A.24 Número de barras de acero que caben en un ancho b

<i>barras</i> ↓	<i>n° barras</i> →	3	4	5	6	7	8
1/2"	b (cm) →	19	23	28	33	37	42
	A_s (cm ²) →	3.80	5.07	6.33	7.60	8.87	10.13
5/8"	b (cm) →	20	25	30	35	40	45
	A_s (cm ²) →	5.94	7.92	9.90	11.88	13.85	15.83
3/4"	b (cm) →	20	26	31	36	42	47
	A_s (cm ²) →	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80
7/8"	b (cm) →	21	27	33	38	44	49
	A_s (cm ²) →	11.64	15.52	19.40	23.28	27.16	31.03
1"	b (cm) →	22	28	34	40	46	52
	A_s (cm ²) →	15.20	20.27	25.33	30.40	35.47	40.54

APÉNDICE B COLUMNAS Y DIAGRAMAS DE INTERACCIONES ADIMENSIONALES

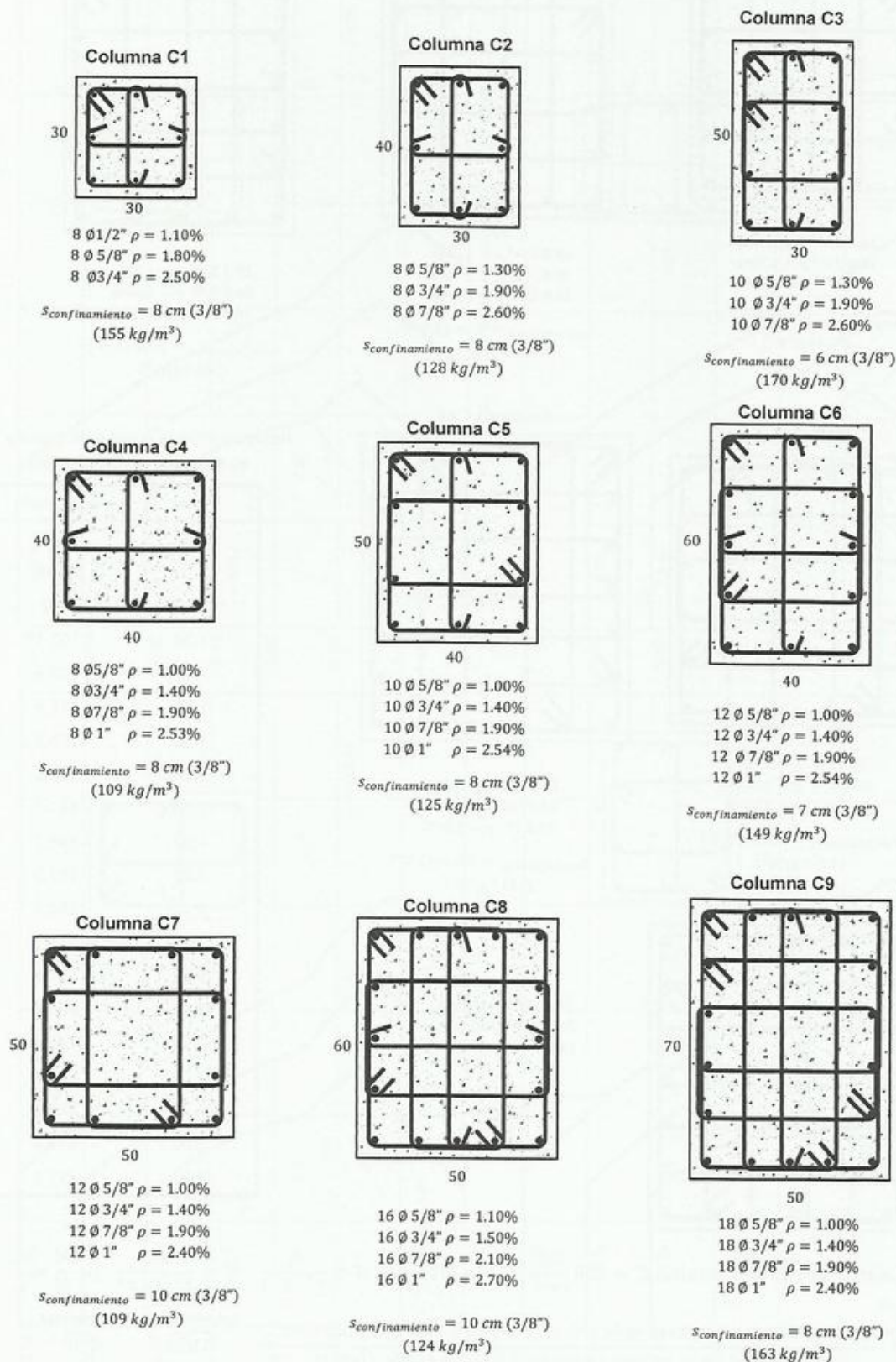
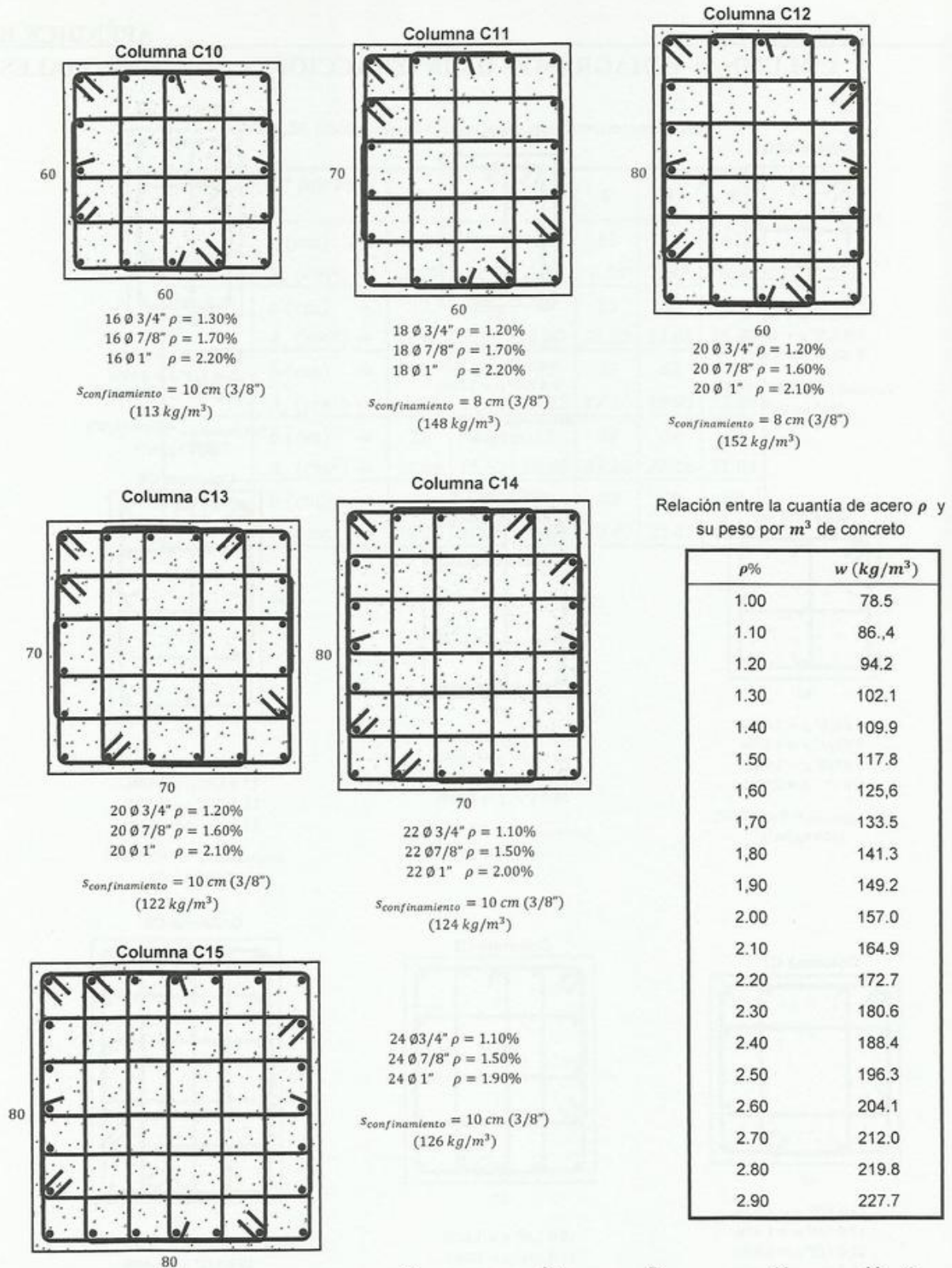


Fig. B.1 Detalles de columnas



Diagramas adimensionales: $f'_c = 250 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ $F_y = 4200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ $N = \frac{P_u}{f'_c \cdot b \cdot t}$ $M = \frac{M_u}{f'_c \cdot b \cdot t^2} \rightarrow \frac{M}{N} = \frac{e}{t}$

$\frac{d}{t} = \frac{\text{dist. entre la fila de acero más tracc. a la fibra mas comp. de conc.}}{\text{profundidad de la columna perpendicular al eje de flexión}} \cong \frac{\text{col. pequeñas}}{0.875} \frac{\text{col. grandes}}{0.90}$

Fig. B.2 Detalles de columnas

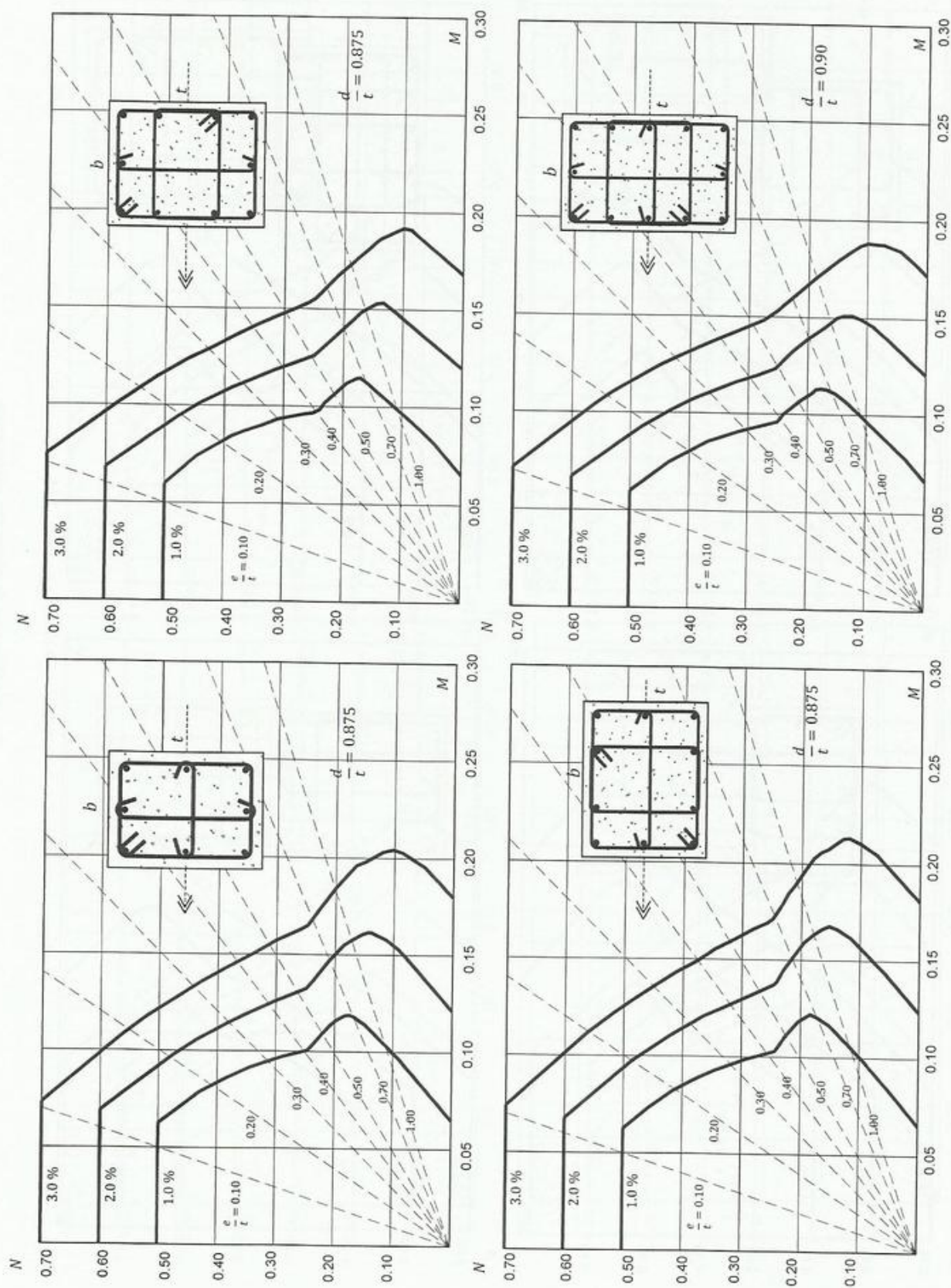


Fig. B.3 Diagrama de interacción adimensional

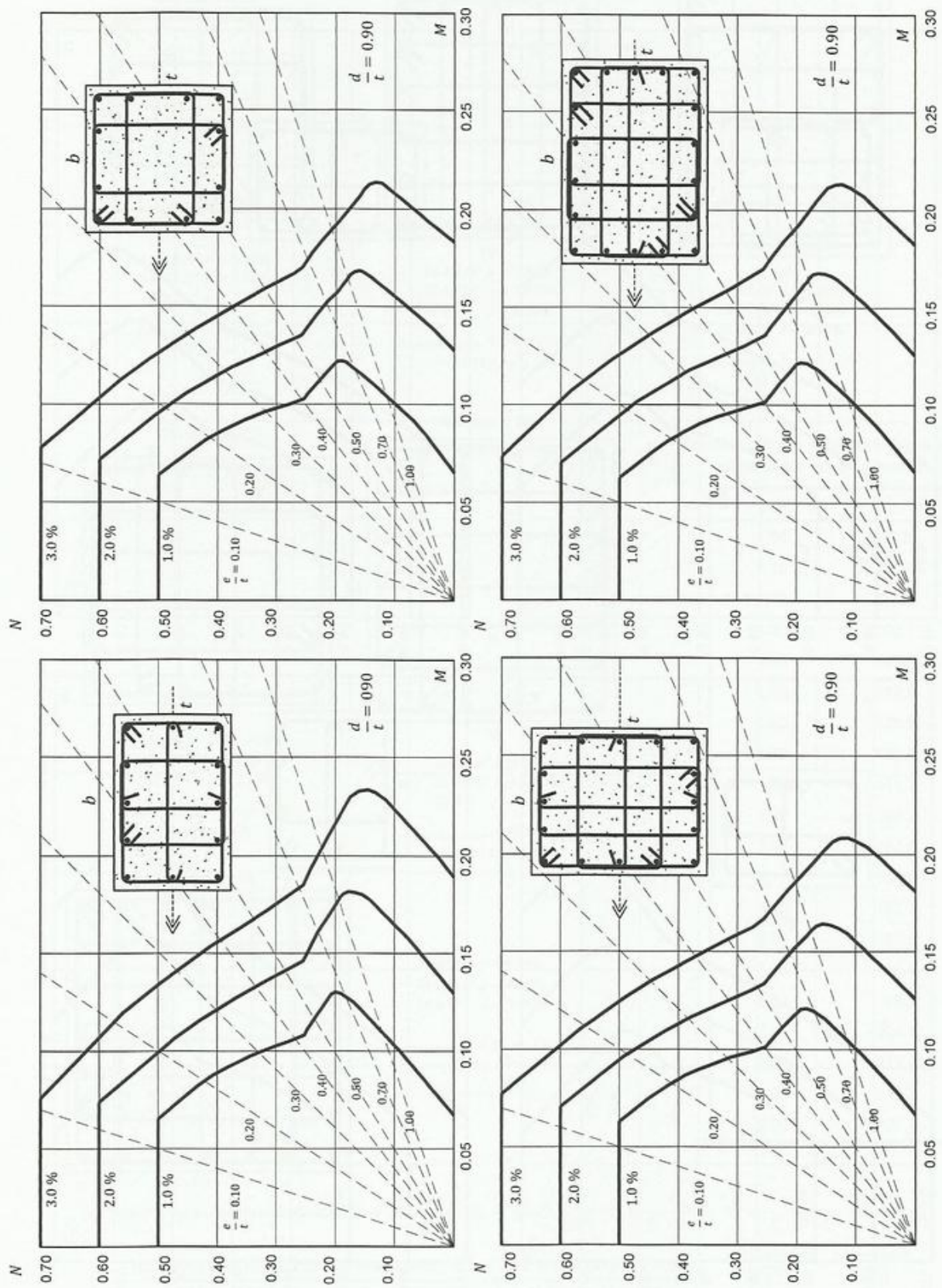


Fig. B.4 Diagrama de interacción adimensional

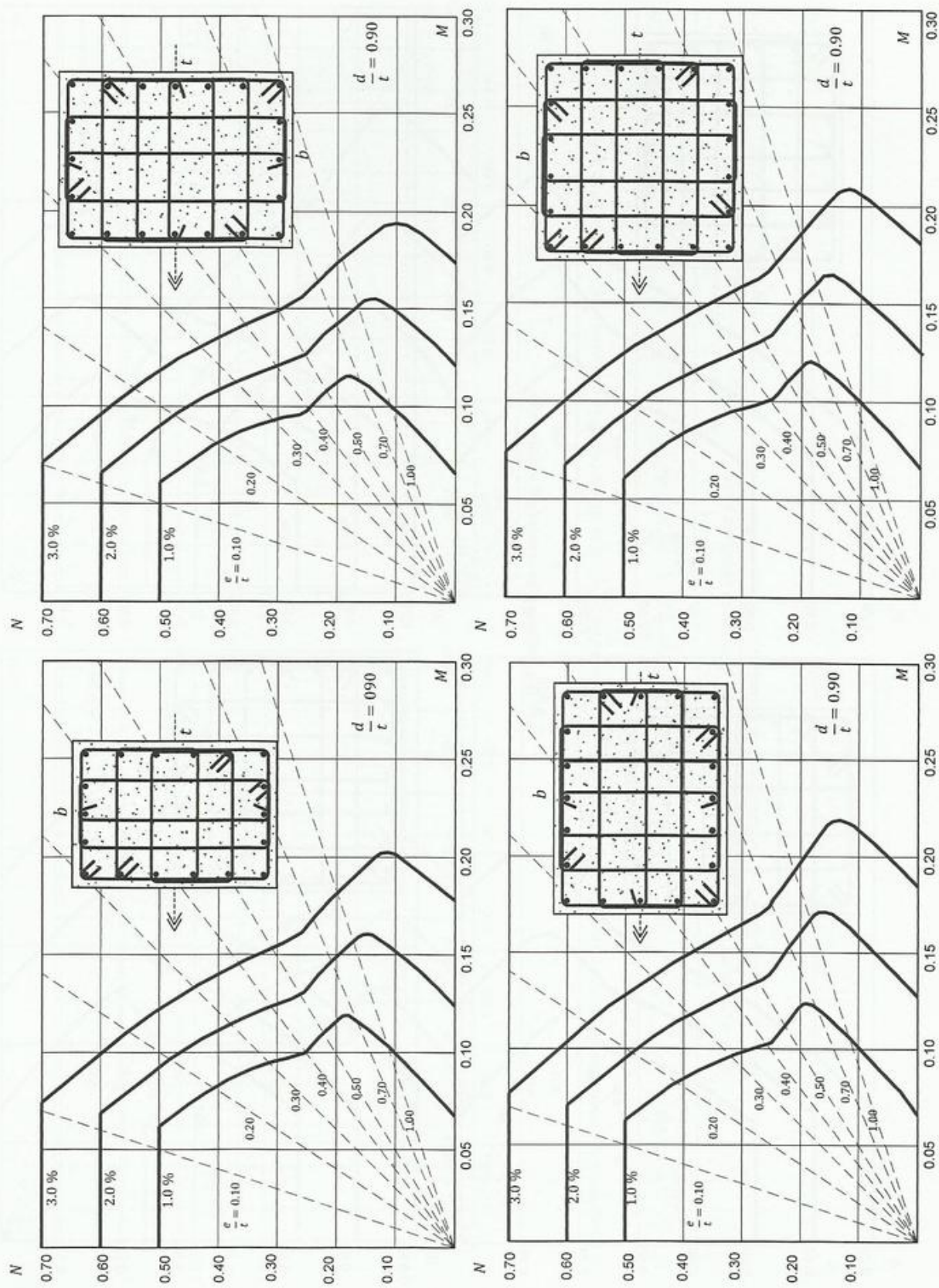


Fig. B.5 Diagrama de interacción adimensional

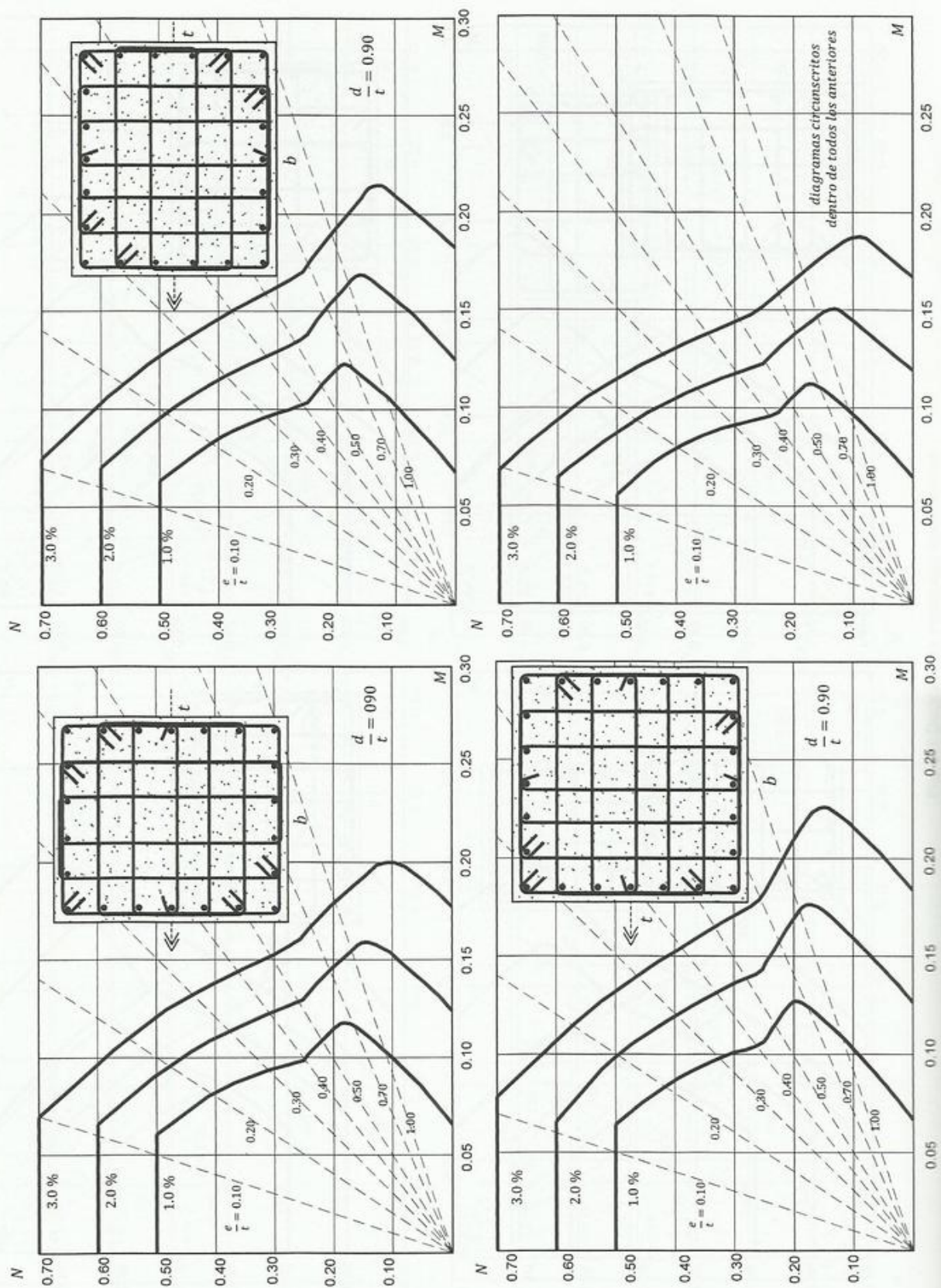


Fig. 8.6 Diagrama de interacción adimensional

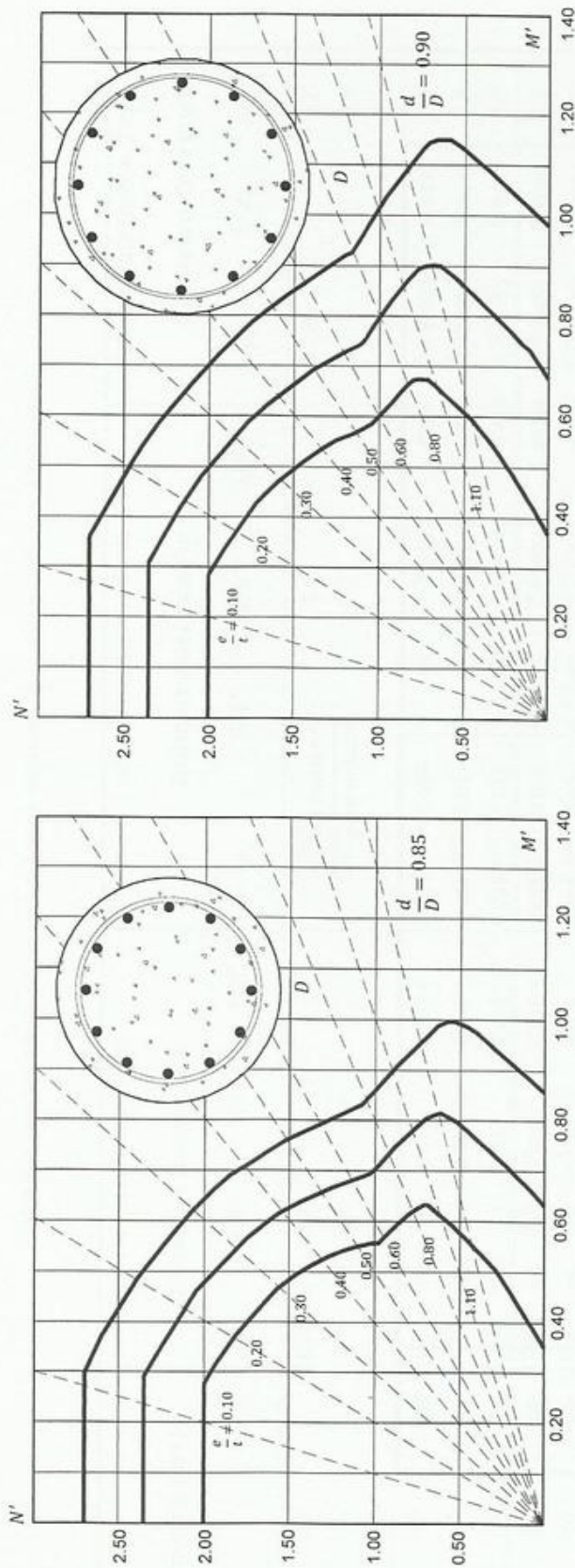


Fig. B.7 Diagrama de interacción adimensional

Diagramas adimensionales columnas circulares: $f'_c = 250 \frac{kg}{cm^2}$ $f'_c = 4200 \frac{kg}{cm^2}$ $D = \text{diámetro de la columna}$ $R = \text{radio de la columna}$

$$N' = \frac{P_u}{f'_c \cdot R^2} \quad M' = \frac{M_u}{f'_c \cdot R^3} \rightarrow \frac{M}{N} = \frac{e}{t}$$

$$\frac{d}{D} = \frac{\text{dist. entre la fila de acero mas tracc. a la fibra más comp. de conc.}}{\text{Diámetro de la columna}} = \frac{\text{col. pequeñas}}{\text{col. grandes}} = \frac{0.85}{0.90}$$

Tabla B.1 Cuantías de acero ρ en columnas circulares con acero uniformemente distribuido

Díámetro (cm)	No. Barras	1" 2	5" 8	3" 4	7" 8	No. Barras	5" 8	3" 4	7" 8	1" 1
35	8	0.011	0.017	0.024	0.032	6	0.012	0.018	0.024	0.032
40	10	0.010	0.016	0.023	0.031	8	0.013	0.018	0.025	0.032
45	12	0.010	0.015	0.022	0.029	8	0.010	0.014	0.020	0.025
50	16	0.010	0.016	0.023	0.032	12	0.012	0.017	0.024	0.031
55	20	0.011	0.017	0.024	0.033	16	0.013	0.019	0.026	0.034
60	24	0.011	0.017	0.024	0.033	20	0.014	0.020	0.027	0.036
65	28	0.011	0.017	0.024	0.033	24	0.014	0.021	0.028	0.037
70	32	0.011	0.017	0.024	0.032	24	0.012	0.018	0.024	0.032
75	36	0.010	0.016	0.023	0.032	28	0.013	0.018	0.025	0.032
80	40	0.010	0.016	0.023	0.031	28	0.011	0.016	0.022	0.028
85	44	0.010	0.016	0.022	0.030	32	0.011	0.016	0.022	0.029
90	48	0.010	0.015	0.022	0.029	36	0.011	0.016	0.022	0.029
95	56	0.010	0.016	0.023	0.031	44	0.012	0.018	0.024	0.031
100	60	0.010	0.015	0.022	0.030	48	0.012	0.017	0.024	0.031

$$\rho = \frac{\text{Área acero}}{\text{Área concreto}}$$

Tabla B.2 Paso del zuncho en cm para columnas circulares. $f_c' = 280 \text{ kg/cm}^2$ $F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Diámetro (cm)	Recubrimiento = 3 cm				Recubrimiento = 5 cm				Recubrimiento = 7 cm			
	Diámetro del zuncho				Diámetro del zuncho				Diámetro del zuncho			
	ρ_s	3/8"	1/2"	5/8"	ρ_s	3/8"	1/2"	5/8"	ρ_s	1/2"	5/8"	
25	0.022	6.8	-	-	0.053	3.6	6.4	-	0.125	-	-	5.8
30	0.017	7.0	-	-	0.038	3.8	6.8	-	0.075	4.2	-	6.6
35	0.014	7.1	-	-	0.029	3.9	7.1	-	0.053	4.5	-	7.1
40	0.012	7.2	-	-	0.023	4.1	7.3	-	0.041	4.8	-	7.5
45	0.010	7.3	-	-	0.020	4.1	7.4	-	0.033	4.9	-	7.8
50	0.009	7.4	-	-	0.017	4.2	7.5	-	0.028	5.1	-	8.0
55	0.008	7.2	-	-	0.015	4.3	7.6	-	0.024	5.2	-	8.1
60	0.008	6.6	-	-	0.013	4.3	7.7	-	0.021	5.2	-	8.3
65	0.008	6.0	-	-	0.012	4.3	7.8	-	0.019	5.3	-	8.4
70	0.008	5.5	-	-	0.011	4.4	7.8	-	0.017	5.4	-	8.5
75	0.008	5.1	-	-	0.010	4.4	7.9	-	0.015	5.4	-	8.5
80	0.008	4.8	-	-	0.009	4.4	7.9	-	0.014	5.5	-	8.6
85	0.008	4.5	8.0	-	0.009	4.4	7.9	-	0.013	5.5	-	8.7
90	0.008	4.2	7.6	-	0.008	4.4	7.9	-	0.012	5.5	-	8.7
95	0.008	4.0	7.1	-	0.008	4.2	7.5	-	0.011	5.6	-	8.8
100	0.008	-	6.8	-	0.008	-	7.1	-	0.011	5.6	-	8.8

$\rho_s = \frac{\text{Área del zuncho}}{\text{Área del núcleo de concreto}} \dots$ **Nota** la separación (paso) del zuncho no debe exceder 8.00 cm

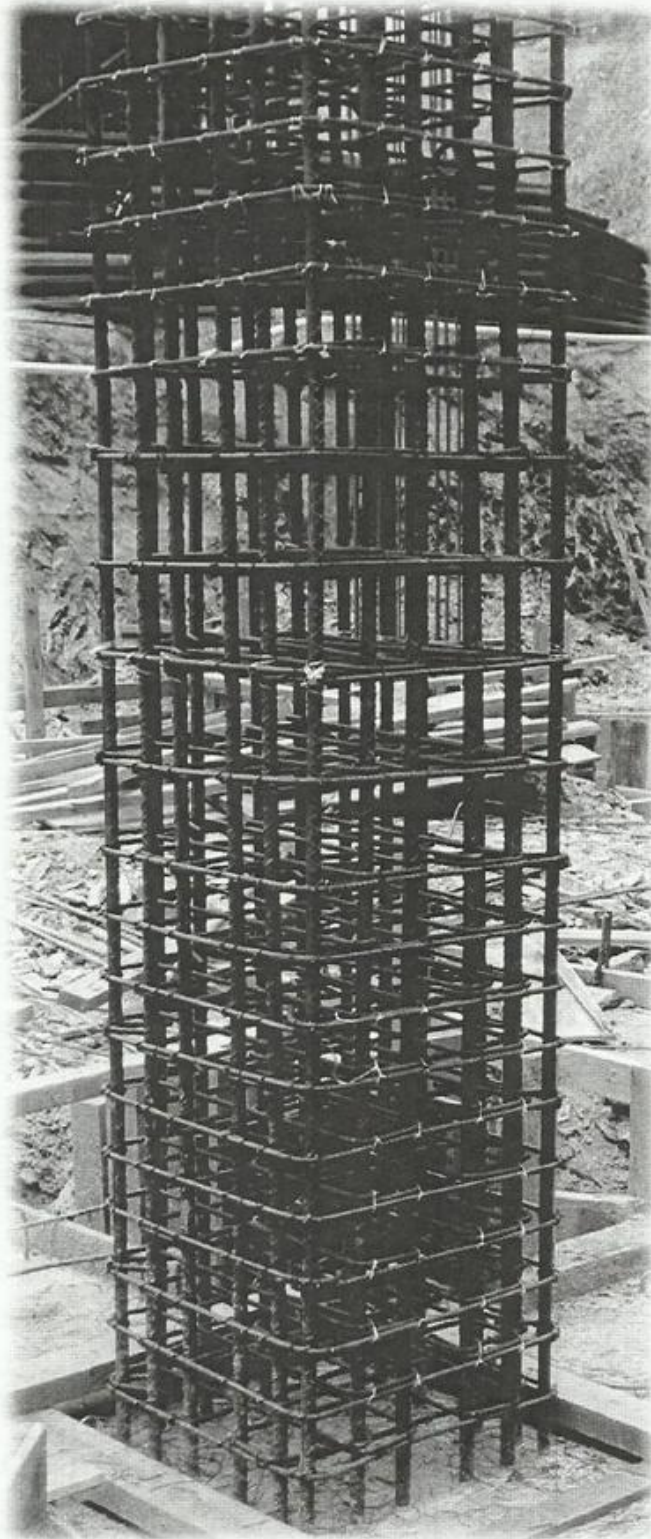


Fig. B.8. Acero principal y transversal en un edificio aporticado localizado en zona sísmica.
Cortesía de Pablo A. Fargier G.

APÉNDICE C

AYUDAS PARA EL DISEÑO DE LOSAS

Tabla C.1 Valores de los momentos últimos \bar{M}_u (kg · m). Losas Nervadas de $h = 20, 25$ y 30 cm. $f'_c = 210$ kg/cm²

N° Barras	$F_y = 2800$ (kg/cm ²)			$F_y = 4200$ (kg/cm ²)		
	20	25	30	20	25	30
2 # 3	-670	-870	-1060	-970	-1270	-1570
	700	900	1100	1050	1350	1650
1 # 3 + 1 # 4	-910	-1190	-1460	-1300	-1720	-2130
	980	1250	1530	1460	1870	2290
2 # 4	-1140	-1490	-1850	-1600	-2130	-2670
	1250	1600	1960	1850	2390	2920
1 # 4 + 1 # 5	-1360	-1810	-2270	-1860	-2550	-3230
	1540	2000	2450	2280	2970	3650
2 # 5	-1600	-2150	-2700	-	-2970	-3800
	1870	2420	2980	2750	3580	4420
1 # 5 + 1 # 6	-1860	-2520	-3200	-	-	-4420
	2260	2930	3610	3310	4320	5330
2 # 6	-	-2870	-3660	-	-	-4960
	-	3430	4230	3850	5050	6240

Tabla C.2 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 7.00$ cm
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho. $f'_c = 210$ kg/cm²)

a (cm)	d (cm)	A_s (cm ²)	\bar{M}_u (kg · m)	ρ (A_s/bd)	ϵ_s/ϵ_y
0.30	7.00	1.28	367	0.00183	28.25
0.70		2.98	831	0.00425	11.25
1.05		4.46	1214	0.00638	7.00
1.40		5.95	1574	0.00850	4.88
1.75		7.44	1913	0.01063	3.60
2.10		8.93	2230	0.01275	2.75
2.45		10.41	2526	0.01488	2.14
V_c (kg/m)	5376				

Tabla C.3 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 8.00$ cm
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho. $f'_c = 210$ kg/cm²)

a (cm)	d (cm)	A_s (cm ²)	\bar{M}_u (kg · m)	ρ (A_s/bd)	ϵ_s/ϵ_y
0.34	8.00	1.45	475	0.00181	28.50
0.80		3.40	1085	0.00425	11.25
1.20		5.10	1585	0.00638	7.00
1.80		7.65	2281	0.00956	4.17
2.20		9.35	2710	0.01169	3.14
2.80		11.90	3299	0.01488	2.14
V_c (kg/m)	6144				

Tabla C.4 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 9.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho. $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
0.38	9.00	1.66	613	0.00184	27.92
0.90		3.83	1374	0.00425	11.25
1.35		5.74	2006	0.00638	7.00
1.80		7.65	2603	0.00850	4.88
2.25		9.56	3163	0.01063	3.60
2.70		11.48	3687	0.01275	2.75
3.15		13.39	4175	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	6144				

Tabla C.5 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 10.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho. $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
1.00	11.00	4.25	1696	0.00425	11.25
1.50		6.38	2477	0.00638	7.00
2.00		8.50	3213	0.00850	4.88
2.50		10.63	3905	0.01063	3.60
3.00		12.75	4552	0.01275	2.75
3.50		14.88	5154	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	6144				

Tabla C.6 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 11.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho. $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
1.10	11.00	4.68	2052	0.00425	11.25
1.65		7.01	2997	0.00638	7.00
2.20		9.35	3888	0.00850	4.88
2.75		11.69	4725	0.01063	3.60
3.30		14.03	5508	0.01275	2.75
3.85		16.36	6237	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	8448				

Tabla C.7 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 12.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho. $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
1.20	12.00	5.10	2442	0.00425	11.25
1.80		7.65	3566	0.00638	7.00
2.40		10.20	4627	0.00850	4.88
3.00		12.75	5623	0.01063	3.60
3.60		15.30	6555	0.01275	2.75
4.20		17.85	7422	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	9217				

Tabla C.8 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 13.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho, $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
1.30	13.00	5.53	2866	0.00425	11.25
1.95		8.29	4186	0.00638	7.00
2.60		11.05	5430	0.00850	4.88
3.25		13.81	6599	0.01063	3.60
3.90		16.58	7692	0.01275	2.75
4.55		19.34	8711	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	9985				

Tabla C.9 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 14.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho, $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
1.40	14.00	5.95	3324	0.00425	11.25
2.10		8.93	4854	0.00638	7.00
2.80		11.90	6297	0.00850	4.88
3.50		14.88	7653	0.01063	3.60
4.20		17.85	8921	0.01275	2.75
4.90		20.83	10102	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	10753				


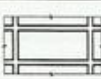


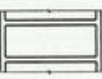
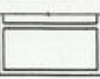
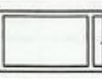
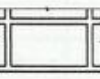
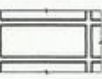
Tabla C.10 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 15.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho, $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
1.50	15.00	6.38	3815	0.00425	11.25
2.25		9.56	5573	0.00638	7.00
3.00		12.75	7229	0.00850	4.88
3.75		15.94	8786	0.01063	3.60
4.50		19.13	10241	0.01275	2.75
5.25		22.31	11597	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	11521				

Tabla C.11 Valores de los momentos últimos y áreas de acero en losas macizas $d = 16.00 \text{ cm}$
(Los valores corresponden a una franja de 1 m de ancho, $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$)

$a \text{ (cm)}$	$d \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$\bar{M}_u \text{ (kg} \cdot \text{m)}$	$\rho \text{ (} A_s/bd \text{)}$	$\varepsilon_s/\varepsilon_y$
1.60	16.00	6.80	4341	0.00425	11.25
2.40		10.20	6340	0.00638	7.00
3.20		13.60	8225	0.00850	4.88
4.00		17.00	9996	0.01063	3.60
4.80		20.40	11652	0.01275	2.75
5.60		23.80	13195	0.01488	2.14
$V_c \text{ (kg/m)}$	12289				


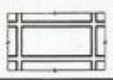
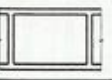
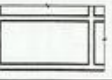
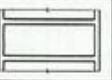
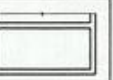
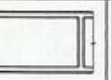
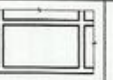
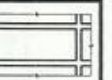
Tabla C.12 Losas armadas en dos sentidos. Coeficientes para el cálculo de momento en la dirección larga ACI 318-63

									
L_c/L_l	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1.00	$p_m^L = 36$	18	27	27	18	27	33	23	20
	$p_v^L = 36$	27	32	32	27	32	35	30	28
	$n^L = 0$	-45	-76	-50	0	0	-71	-61	-33
0.95	33	16	25	24	15	24	31	21	17
	33	25	29	29	24	29	32	27	25
	0	-41	-72	-45	0	0	-67	-56	-29
0.90	29	14	24	22	13	21	28	19	15
	29	22	27	26	21	25	29	24	22
	0	-37	-70	-40	0	0	-62	-52	-25
0.85	26	12	22	19	11	17	25	17	13
	26	19	24	23	19	22	26	22	20
	0	-31	-65	-34	0	0	-57	-46	-21
0.80	23	11	20	<u>16</u>	9	15	22	<u>15</u>	10
	23	17	22	<u>20</u>	16	19	23	<u>19</u>	17
	0	-27	-61	<u>-29</u>	0	0	-51	<u>-41</u>	-17
0.75	19	9	18	13	7	12	20	13	7
	19	14	19	16	13	16	20	16	13
	0	-22	-56	-24	0	0	-44	-36	-14
0.70	16	7	16	11	6	9	17	11	6
	16	12	16	14	11	13	17	14	11
	0	-17	-50	-19	0	0	-38	-29	-11
0.65	13	6	14	9	4	7	14	9	5
	13	10	14	11	9	10	14	11	9
	0	-14	-43	-15	0	0	-31	-24	-8
0.60	10	4	11	7	3	6	12	7	4
	10	7	11	9	7	8	11	9	7
	0	-10	-35	-11	0	0	-24	-18	-6
0.55	8	3	9	5	2	4	9	5	3
	8	6	9	7	5	6	9	7	6
	0	-7	-28	-8	0	0	-19	-14	-5
0.50	6	2	7	4	1	3	7	4	2
	6	4	7	5	4	5	7	5	4
	0	-6	-22	-6	0	0	-14	-10	-3

$L_c \rightarrow$ Luz en dirección corta y $L_l \rightarrow$ Luz en dirección larga

Nota: Los coeficientes p_m^L , p_v^L y n^L deben ser divididos entre 1000 (mil) antes de introducirlo en las ecuaciones del Capítulo 12

Tabla C.13 Losas armadas en dos sentidos. Coeficientes para el cálculo de momento en la dirección corta ACI 318-63

									
L_c/L_L	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1.00	$p_m^c = 36$	18	18	27	27	33	27	20	23
	$p_v^c = 36$	27	27	32	32	35	32	28	30
	$n^c = 0$	-45	0	-50	-75	-71	0	-33	-61
0.95	40	20	21	30	28	36	31	22	24
	40	30	31	35	34	38	36	31	32
	0	-50	0	-55	-79	-75	0	-38	-65
0.90	45	22	25	33	29	39	35	25	26
	45	34	35	39	37	42	40	35	36
	0	-55	0	-60	-80	-79	0	-43	-68
0.85	50	24	29	36	31	42	40	29	28
	50	37	40	43	41	46	45	40	39
	0	-60	0	-66	-82	-83	0	-49	-72
0.80	56	26	34	<u>39</u>	32	45	45	<u>32</u>	29
	56	41	45	<u>48</u>	44	51	51	<u>44</u>	42
	0	-65	0	<u>-71</u>	-83	-86	0	<u>-55</u>	-75
0.75	61	28	40	43	33	48	51	36	31
	61	45	51	52	47	55	56	49	46
	0	-69	0	-76	-85	-88	0	-61	-78
0.70	68	30	46	46	35	51	58	40	33
	68	49	57	57	51	60	63	54	50
	0	-74	0	-81	-86	-91	0	-68	-81
0.65	74	32	54	50	36	54	65	44	34
	74	53	64	62	55	64	70	59	54
	0	-77	0	-85	-87	-93	0	-74	-83
0.60	81	34	62	53	37	56	73	48	36
	81	58	71	67	59	68	77	65	59
	0	-81	0	-89	-88	-95	0	-80	-85
0.55	88	35	71	56	38	58	81	52	37
	88	62	80	72	63	73	85	70	63
	0	-84	0	-92	-89	-96	0	-85	-86
0.50	95	37	80	59	39	61	89	56	38
	95	66	88	77	67	78	92	76	67
	0	-86	0	-94	-90	-97	0	-89	-88

$L_c \rightarrow$ Luz en dirección corta y $L_L \rightarrow$ Luz en dirección larga

Nota: Los coeficientes p_m^c , p_v^c y n^c deben ser divididos entre 1000 (mil) antes de introducirlo en las ecuaciones del Capítulo 12

Tabla C.14 Losas armadas en dos sentidos. Coeficientes para calcular la distribución de la carga en la dirección corta y larga ACI 318-63

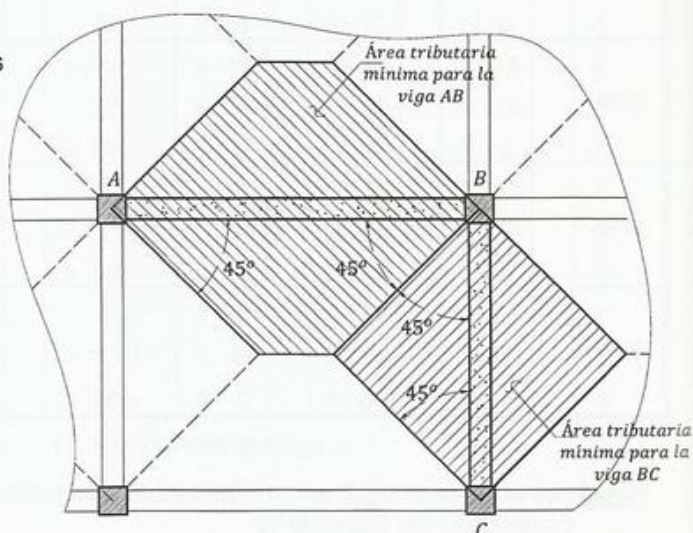
L_c/L_l	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	$c_L = 50$	50	83	50	17	29	71	67	33
	$c_c = 50$	50	17	50	83	71	29	33	67
0.95	45	45	80	45	14	25	67	62	29
	55	55	20	55	86	75	33	38	71
0.90	40	40	77	40	12	21	62	57	25
	60	60	23	60	88	79	38	43	75
0.85	34	34	72	34	10	17	57	51	21
	66	66	28	66	90	83	43	49	79
0.80	29	29	67	<u>29</u>	8	14	51	<u>45</u>	17
	71	71	33	<u>71</u>	92	86	49	<u>55</u>	83
0.75	24	24	61	24	6	12	44	39	14
	76	76	39	76	94	88	56	61	86
0.70	19	19	55	19	5	9	38	32	11
	81	81	45	81	95	91	62	68	89
0.65	15	15	47	15	4	7	31	26	8
	85	85	53	85	96	93	69	74	92
0.60	11	11	39	11	3	5	24	20	6
	89	89	61	89	97	95	76	80	94
0.55	8	8	31	8	2	4	19	15	5
	92	92	69	92	98	96	81	85	95
0.50	6	6	24	6	1	3	14	11	3
	94	94	76	94	99	97	86	89	97

$L_c \rightarrow$ Luz en dirección corta y $L_l \rightarrow$ Luz en dirección larga

Nota:

Los coeficientes c_c , c_L debe ser divididos entre **100 (cien)** antes de introducirlos en las ecuaciones del Capítulo 12.

La carga repartida mínima por viga es la que corresponde al área tributaria sombreada que se muestra en la Figura. \Rightarrow



APÉNDICE D

AYUDAS PARA EL DISEÑO DE FUNDACIONES

1. ENSAYOS EN CAMPO Y ESTIMACIÓN PRELIMINAR DE LA RESISTENCIA ADMISIBLE DEL SUELO

- **Ensayo de penetración estándar (SPT)**

El más común en la exploración de suelos granulares. Consiste en registrar el número de golpes N , necesarios para producir una penetración de 30.5 cm de una barra al dejar caer (o golpear) sobre esta un peso estándar de 63.4 kg desde una altura de 762 mm (30 pulgadas). El orden de magnitud de la resistencia admisible del suelo σ_{adm} (kg/cm²) puede estimarse de acuerdo a (ACI-IPS1, 2002),

$$\begin{aligned} \text{En suelos Granulares} \dots \dots \dots \sigma_{adm} &\cong N/9 \\ \text{En suelos cohesivos no muy blandos} \dots \dots \sigma_{adm} &\cong N/8 \end{aligned}$$

- **Ensayo de penetración con cono (CPT)**

Usado en suelos granulares con partículas de tamaño medio. Consiste en empujar un cono una velocidad constante de 2 cm/s y registrar el esfuerzo q_c requerida para el avance al dividir la fuerza entre el área de la base del cono. La base del cono mide 10.00 cm² y la inclinación de sus caras es de 60°. El orden de magnitud de la resistencia admisible del suelo σ_{adm} (kg/cm²) se puede obtener así (ACI-IPS1, 2002),

$$\begin{aligned} \text{En suelos granulares} \dots \dots \dots \sigma_{adm} &\cong 0.027 \cdot q_c \\ \text{En suelos cohesivos no muy blandos} \dots \dots \sigma_{adm} &\cong q_c/12 \end{aligned}$$

Este último valor de σ_{adm} debe ser verificado por otro procedimiento

La capacidad portante admisible no mayorada σ_{adm} , para suelos cohesivos se debe determinar cómo,

$$\sigma_{adm} \cong 2 \cdot s_u$$

Donde s_u es la resistencia a corte del suelo (no drenada)

Tabla D.1 Capacidad portante promedio de diferentes tipos de suelo
(Valores orientativos que deben ser verificados con los resultado del estudio de suelos)

SUELO	CAPACIDAD PORTANTE σ_{adm} (kg/cm ²)
Suelo aluvial	≤ 0.50
Arcilla blanda	0.50
Arcilla firme	1.00
Arena húmeda	1.00
Arena y arcilla mezcladas	1.50
Arena fina seca (compacta)	2.00
Arcilla dura	2.50
Arena gruesa seca (compacta)	3.00
Arena y grava mezcladas (compacta)	3.50
Grava (compacta)	4.00
Roca blanda	6.00
Lutita o pizarra dura	8.00
Roca media	10.00
Roca dura	15.00

La resistencia admisible del suelo se puede incrementar en un 33% cuando se estudie la combinación de carga que incluye al sismo.

Tabla D.2 Dimensiones mínimas de zapatas cuadradas en (m) cargadas concéntricamente

$P_{servicio} \text{ (ton)}$	$\sigma_{adm} \left(\frac{kg}{cm^2} \right)$									
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	
50	2.2	1.8	1.6	1.4	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2	
75	2.7	2.2	1.9	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	
100	3.2	2.6	2.2	2.0	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	
125	3.5	2.9	2.5	2.2	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	
150	3.9	3.2	2.7	2.4	2.2	2.1	1.9	1.8	1.7	
175	4.2	3.4	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	1.9	
200	4.5	3.7	3.2	2.8	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	
225	4.7	3.9	3.4	3.0	2.7	2.5	2.4	2.2	2.1	
250	5.0	4.1	3.5	3.2	2.9	2.7	2.5	2.4	2.2	
275	5.2	4.3	3.7	3.3	3.0	2.8	2.6	2.5	2.3	
300	5.5	4.5	3.9	3.5	3.2	2.9	2.7	2.6	2.4	
350	5.9	4.8	4.2	3.7	3.4	3.2	3.0	2.8	2.6	
400	6.3	5.2	4.5	4.0	3.7	3.4	3.2	3.0	2.8	
450	6.7	5.5	4.7	4.2	3.9	3.6	3.4	3.2	3.0	
500	7.1	5.8	5.0	4.5	4.1	3.8	3.5	3.3	3.2	
550		6.1	5.2	4.7	4.3	4.0	3.7	3.5	3.3	
600		6.3	5.5	4.9	4.5	4.1	3.9	3.7	3.5	
650		6.6	5.7	5.1	4.7	4.3	4.0	3.8	3.6	
700		6.8	5.9	5.3	4.8	4.5	4.2	3.9	3.7	
750		7.1	6.1	5.5	5.0	4.6	4.3	4.1	3.9	
800			6.3	5.7	5.2	4.8	4.5	4.2	4.0	
850			6.5	5.8	5.3	4.9	4.6	4.3	4.1	
900			6.7	6.0	5.5	5.1	4.7	4.5	4.2	
950			6.9	6.2	5.6	5.2	4.9	4.6	4.4	

Nota: En edificaciones usuales la intensidad de la carga bajo condiciones de servicio puede estimarse en 1.0 ton/m^2 . (ver Ejemplo 13.1)

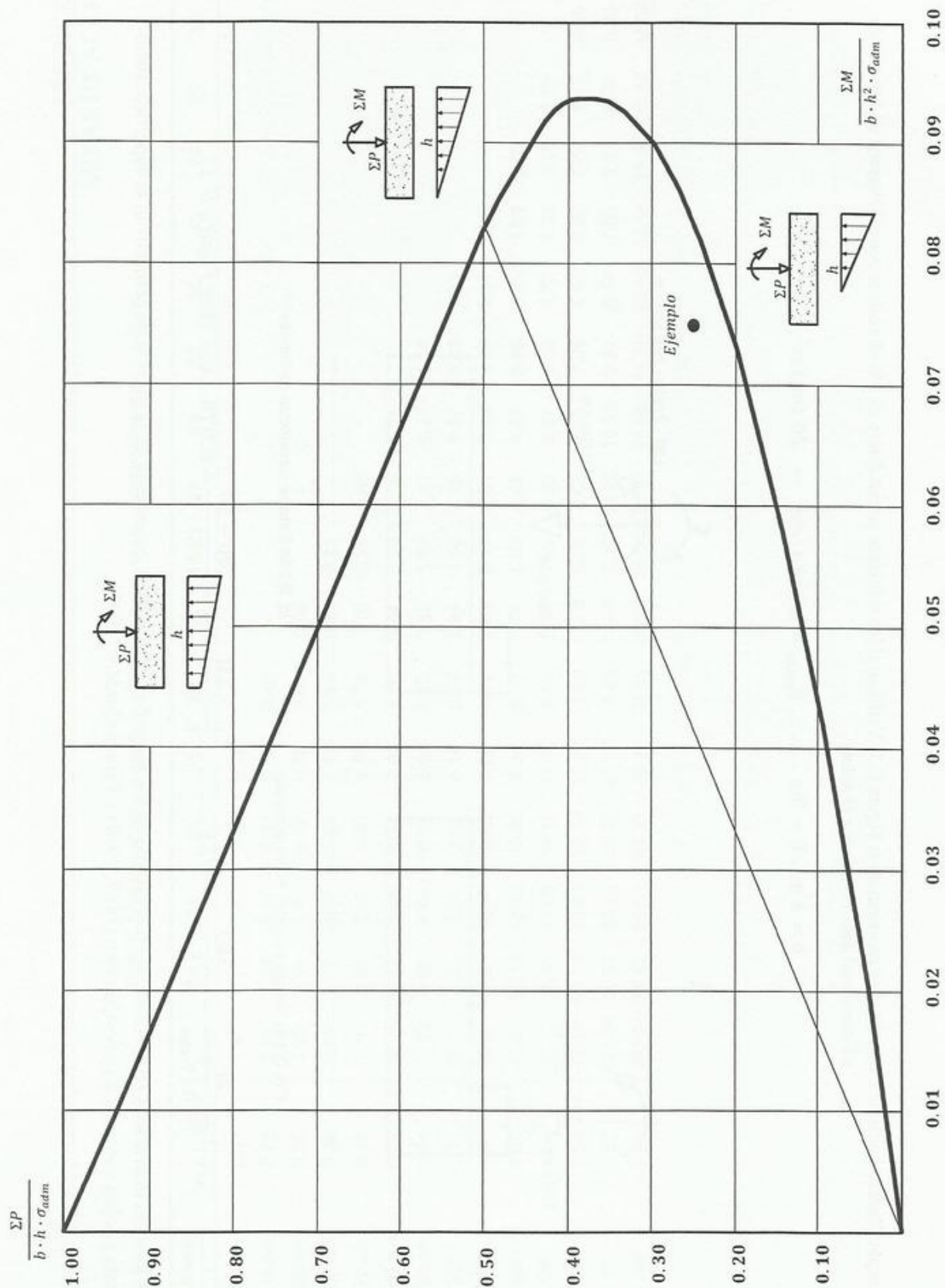
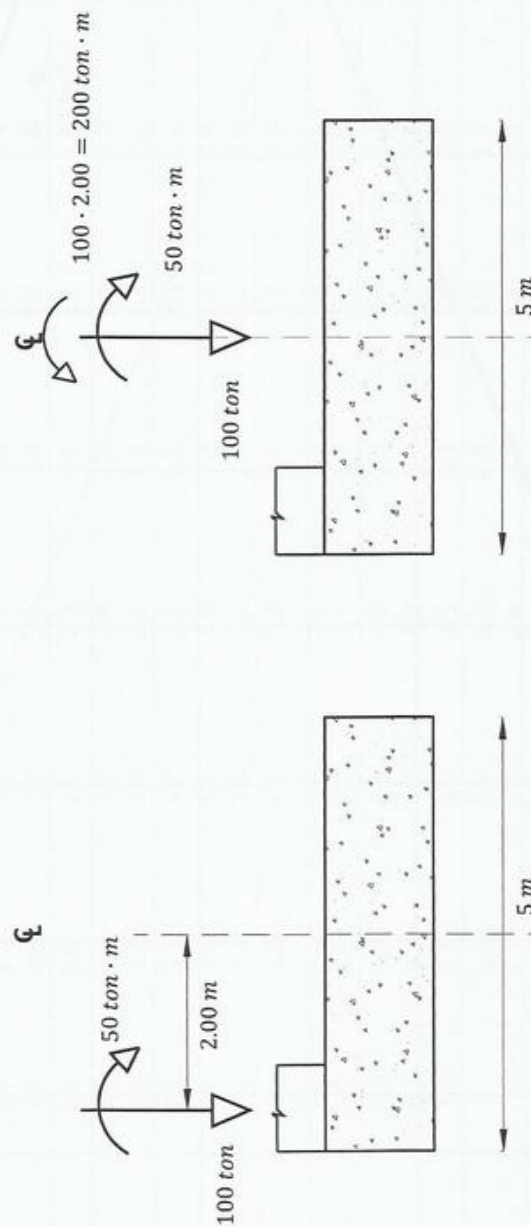


Fig. D.1 Diagrama de Interacción adimensional para diseño de zapata desarrollado por el autor

Ejemplo: Zapata medianera. Los datos se muestran en la Figura D.2. Verificar si los esfuerzos entran dentro de los admisibles con el Diagrama de Interacción adimensional desarrollado por el autor.

$$b = 4 \text{ m} \dots h = 5 \text{ m} \dots \sigma_{adm} = 2.00 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow 20 \text{ ton/m}^2$$



$$\frac{\Sigma P}{b \cdot h \cdot \sigma_{adm}} = \frac{100}{4 \cdot 5 \cdot 20} = 0.25 \dots \dots \dots \frac{\Sigma M}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{adm}} = \frac{200 - 50}{4 \cdot 5^2 \cdot 2} = 0.075 \dots \dots \dots O.K \text{ (ver Figura D.1)}$$

Los lectores interesados en profundizar en el estudio de los procedimientos para la estimación de la presión de contacto en la superficie suelo-zapata pueden consultar a Lobo-Quintero (1967, 1969) y Febres-Cordero (1992).

APÉNDICE E
ÁREAS DE ACERO

Tabla E.1 Área de acero por metro de ancho. Separaciones (s) comprendidas entre 5 y 80 cm

ϕ (Acero)	Área (cm ²)	s = 5 cm	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
0.30 cm	0.07	1.41	0.71	0.47	0.35	0.28											
0.40 cm	0.13	2.51	1.26	0.84	0.63	0.50	0.42										
0.50 cm	0.20	3.93	1.96	1.31	0.98	0.79	0.65	0.56									
0.60 cm	0.28	5.65	2.83	1.88	1.41	1.13	0.94	0.81	0.71								
0.70 cm	0.38	7.70	3.85	2.57	1.92	1.54	1.28	1.10	0.96	0.86							
0.80 cm	0.50	10.05	5.03	3.35	2.51	2.01	1.68	1.44	1.26	1.12	1.01						
0.90 cm	0.64	12.72	6.36	4.24	3.18	2.54	2.12	1.82	1.59	1.41	1.27	1.16					
3/8"	0.71	15.71	7.85	5.24	3.93	3.14	2.62	2.24	1.96	1.75	1.57	1.43	1.31				
1/2"	1.27	25.33	12.67	8.44	6.33	5.07	4.22	3.62	3.17	2.81	2.53	2.30	2.11	1.95			
5/8"	2.01	40.21	20.11	13.40	10.05	8.04	6.70	5.74	5.03	4.47	4.02	3.66	3.35	3.09	2.87		
3/4"	2.84	56.70	28.35	18.90	14.18	11.34	9.45	8.10	7.09	6.30	5.67	5.15	4.73	4.36	4.05	3.78	
7/8"	3.88	77.59	38.79	25.86	19.40	15.52	12.93	11.08	9.70	8.62	7.76	7.05	6.47	5.97	5.54	5.17	4.85
1"	5.07	101.34	50.67	33.78	25.33	20.27	16.89	14.48	12.67	11.26	10.13	9.21	8.44	7.80	7.24	6.76	6.33
1 3/8"	9.84	196.84	98.42	65.61	49.21	39.37	32.81	28.12	24.61	21.87	19.68	17.89	16.40	15.14	14.06	13.12	12.30

Tabla E.3 Separaciones entre barras requeridas para $\rho = 0.0025$

Espesor (cm) → ϕ (Acero)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0.30 cm																			
0.40 cm	5																		
0.50 cm	8	5																	
0.60 cm	11	8	6	5															
0.70 cm	15	10	8	6	5														
0.80 cm	20	13	10	8	7	6	5												
0.90 cm	-	17	13	10	8	7	6	6	5	5									
3/8"	-	19	14	11	9	8	7	6	6	5	5								
1/2"	-	-	25	20	17	14	13	11	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5
5/8"	-	-	40	32	27	23	20	18	16	15	13	12	11	11	10	9	9	8	8
3/4"	-	-	-	45	38	32	28	25	23	21	19	17	16	15	14	13	13	12	11
7/8"	-	-	-	-	52	44	39	34	31	28	26	24	22	21	19	18	17	16	16
1"	-	-	-	-	-	58	51	45	41	37	34	31	29	27	25	24	23	21	20
1 3/8"	-	-	-	-	-	-	-	87	79	72	66	61	56	52	49	46	44	41	39

$$\rho = \frac{\text{Área acero}}{\text{Área concreto}}$$

Tabla E.4 Separaciones entre barras requeridas para $\rho = 0.0020$

Espeor (cm) → Ø (Acero)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0.30 cm	4																		
0.40 cm	6	4																	
0.50 cm	10	7	5																
0.60 cm	14	9	7	6															
0.70 cm	19	13	10	8	6	5	5	4	4										
0.80 cm	-	17	13	10	8	7	6	6	5	5	4	4	4						
0.90 cm	-	21	16	13	11	9	8	7	6	6	5	5	5	4	4	4	4		
3/8"	-	24	18	14	12	10	9	8	7	6	6	5	5	5	4	4	4	4	
1/2"	-	-	32	25	21	18	16	14	13	12	11	10	9	8	8	7	7	7	6
5/8"	-	-	-	40	33	29	25	22	20	18	17	15	14	13	13	12	11	11	10
3/4"	-	-	-	-	-	41	36	32	29	26	24	22	20	19	18	17	16	15	14
7/8"	-	-	-	-	-	55	49	43	39	35	32	30	28	26	24	23	22	20	19
1"	-	-	-	-	-	72	63	56	51	46	42	39	36	34	32	30	28	27	25
1 3/8"	-	-	-	-	-	-	-	-	98	89	82	76	70	66	62	58	55	52	49

$$\rho = \frac{\text{Área acero}}{\text{Área concreto}}$$

Tabla E.5 Separaciones entre barras requeridas para $\rho = 0.0018$

Espe ^{or} (cm) → Ø (Acero)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0.30 cm	4																		
0.40 cm	7	5																	
0.50 cm	11	7	5	4															
0.60 cm	16	10	8	6	5	4	4												
0.70 cm	21	14	11	9	7	6	5	5	4	4	4								
0.80 cm	-	19	14	11	9	8	7	6	6	5	5	4	4	4					
0.90 cm	-	24	18	14	12	10	9	8	7	6	6	5	5	5	4	4	4	4	4
3/8"	-	26	20	16	13	11	10	9	8	7	7	6	6	5	5	5	4	4	4
1/2"	-	-	35	28	24	20	18	16	14	13	12	11	10	9	9	8	8	7	7
5/8"	-	-	-	44	37	32	28	25	22	20	19	17	16	15	14	13	12	12	11
3/4"	-	-	-	-	53	45	40	35	32	29	26	24	23	21	20	19	18	17	16
7/8"	-	-	-	-	-	62	54	48	43	39	36	33	31	29	27	25	24	23	22
1"	-	-	-	-	-	-	70	62	56	51	47	43	40	37	35	33	31	30	28
1 3/8"	-	-	-	-	-	-	-	-	-	99	91	84	78	73	68	64	61	58	55

$$\rho = \frac{\text{Área acero}}{\text{Área concreto}}$$

LONGITUDES DE DESARROLLO DE ACUERDO AL ACI 318-08

F.1 DESARROLLO DE BARRAS CORRUGADAS Y DE ALAMBRES CORRUGADOS A TRACCIÓN (ACI-318-08 Sección 12.2)

$$L_d = \left(\frac{F_y}{3.5 \cdot \sqrt{f'_c}} \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s \cdot \lambda}{\left(\frac{c_b + K_{tr}}{D_b} \right)} \right) \cdot D_b > 30 \text{ cm} \quad [ACI \quad 12.1]$$

El término $(c_b + K_{tr}/D_b)$ no debe tomarse mayor a 2.5 y

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} \cdot F_y (\text{estribo})}{105 \cdot s \cdot n} \quad [ACI \quad 12.2]$$

En donde n es el número de barras o alambres que se empalman o desarrollan. Se puede usar $K_{tr} = 0$ como una simplificación de diseño aun si hay refuerzo transversal presente. La expresión anterior puede simplificarse de acuerdo a lo expuesto en la Tabla F.1.

Tabla F.1 Longitudes de desarrollo simplificadas

Detallado	Alambres corrugados o Barras 3/4" y Menores	Barras 7/8" y mayores
Espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo empalmados o desarrolladas no menor que D_b , recubrimiento libre no menor que D_b , y estribos a lo largo de L_d no menos que el mínimo del reglamento ó espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo desarrolladas o empalmadas no menor a $2 \cdot D_b$ y recubrimiento libre no menor a D_b .	$\frac{a}{\left(\frac{F_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda}{6.6 \cdot \sqrt{f'_c}} \right)} \cdot D_b$	$\frac{b}{\left(\frac{F_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda}{5.3 \cdot \sqrt{f'_c}} \right)} \cdot D_b$
Otros casos	$\frac{c}{\left(\frac{F_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda}{4.4 \cdot \sqrt{f'_c}} \right)} \cdot D_b$	$\frac{d}{\left(\frac{F_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e \cdot \lambda}{3.5 \cdot \sqrt{f'_c}} \right)} \cdot D_b$

- En el caso de vigas, con más de 30 cm de concreto fresco debajo de la longitud de desarrollo o un empalme, $\psi_t = 1.3$. Otras situaciones $\psi_t = 1.0$.
- Barras o alambres con recubrimiento epóxico con menos de $3 \cdot D_b$ de recubrimiento, o separación libre menor de $3 \cdot D_b$. $\psi_e = 1.5$. Para todas las otras barras o alambres con recubrimiento epóxico, $\psi_e = 1.2$. Refuerzo sin recubrimiento epóxico (el más usado en Venezuela), $\psi_e = 1.0$. El producto $\psi_t \cdot \psi_e$ no necesita ser mayor de 1.70.
- Para barras de 3/4" o menores y alambres corrugados, $\psi_s = 0.8$. Para barras 7/8" y mayores, $\psi_s = 1.0$.
- Donde se use concreto liviano, $\lambda = 1.3$. Donde se utilice concreto de peso normal, $\lambda = 1.0$.

F.2 DESARROLLO DE BARRAS CORRUGADAS Y DE ALAMBRES CORRUGADOS A COMPRESIÓN (A.C.I 12.3)

$$L_{dc} = \left(\frac{0.075 \cdot F_y}{\sqrt{f'_c}} \right) \cdot D_b \geq (0.0043 \cdot F_y) \cdot D_b$$

F.3 DESARROLLO DE PAQUETES DE BARRAS (A.C.I 12.4)

La longitud de desarrollo de cada barra individual dentro de un paquete de barras sometido a tracción o a compresión, debe ser aquella de la barra individual aumentada un 20 % para un paquete de 3 barras y en un 33 % para un paquete de 4 barras.

Para determinar los factores de modificación en 1, un paquete de barras debe ser tratado como una sola barra de un diámetro derivado del área total equivalente.

F.4 DESARROLLO DE GANCHOS ESTÁNDAR EN TRACCIÓN (A.C.I 12.5)

La longitud de desarrollo para barras corrugadas en tracción que terminen en un gancho estándar l_{dh} se debe calcular con ψ_e igual a 1.2 para refuerzo con recubrimiento epóxico y, λ igual a 1.3 para concretos con agregados livianos. Para otros casos, ψ_e y λ deben tomarse igual a 1.0.

$$L_{dh} = \left(0.075 \cdot \psi_e \cdot \lambda \cdot \frac{F_y}{\sqrt{f'_c}} \right) \cdot D_b > 15 \text{ cm} \quad \text{y además} \quad L_{dh} > 8 \cdot D_b$$

12.5.3 La longitud L_{Dh} se puede multiplicar por los siguientes factores cuando corresponda.

- Para barras No. 36 y ganchos menores, con recubrimiento lateral (normal al plano del gancho) no menor de 6.5 cm, y para ganchos de 90°, con recubrimiento en la extensión de la barra más allá del gancho no menor de 5.0 cm0.7
- Para ganchos de 90° de barras No. 36 y menores que se encuentran confinados por estribos perpendiculares a la barra que se está desarrollando, espaciados a lo largo de l_{Dh} a no más de $3D_b$, o bien, rodeado con estribos paralelos a la barra que se está desarrollando y espaciados a no más de $3D_b$ a lo largo de la longitud de desarrollo del extremo del gancho más el doble.....0.8
- Para ganchos de 180 ° de barra No. 36 y menores que se encuentran confinados con estribos perpendiculares a la barra que se está desarrollando, espaciados a no más de $3D_b$ a lo largo de L_{dh}0.8

La longitud de desarrollo para barras en tracción, compresión y con gancho puede reducirse cuando no se requiera específicamente anclaje o longitud de desarrollo para F_y , y se dispone de una cuantía de refuerzo mayor a la requerida por análisis, la longitud de desarrollo requerida se puede multiplicar por el factor..... $(A_s \text{ requerido}) / (A_s \text{ proporcionado})$

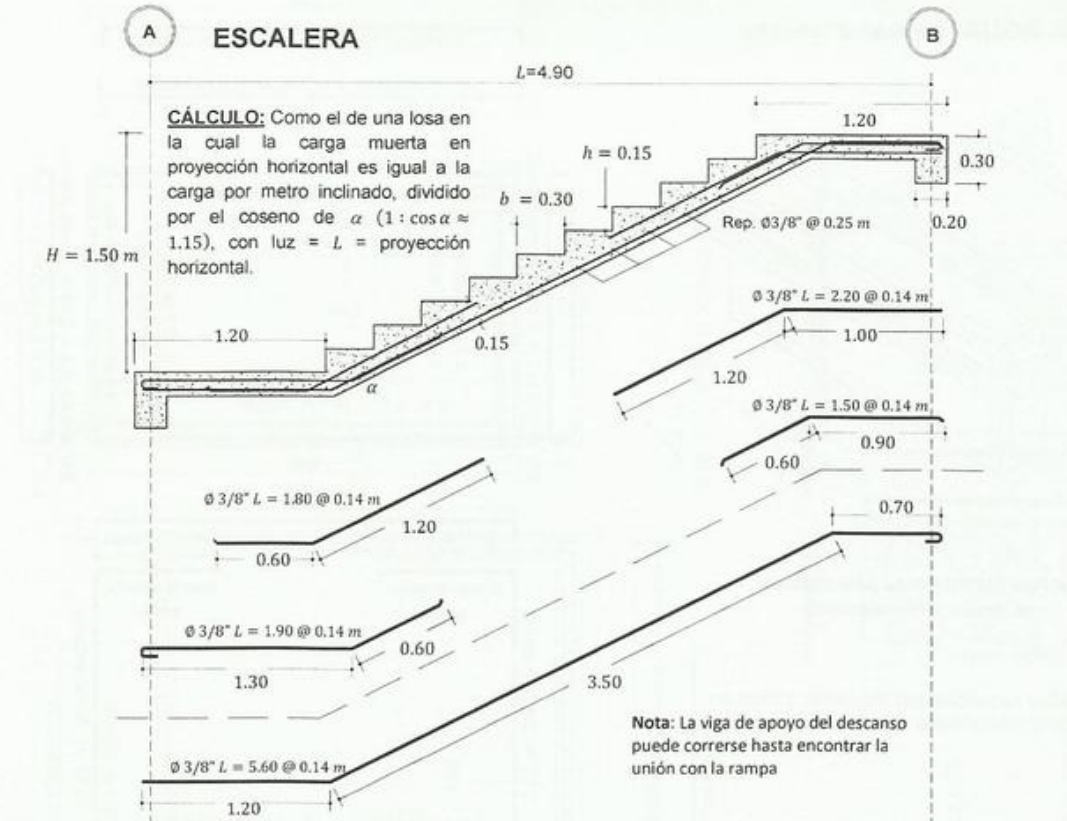
Las tablas F.2 y F.3 resumen las longitudes de desarrollo de acuerdo a las ecuaciones a y b de la página anterior. Nótese que en la tabla 9.2 se recomendó usar, 50,25,20 veces el diámetro para barras en tracción, con gancho y en compresión, respectivamente, valores estos conservadores en su mayoría si se comparan con los de las ecuaciones anteriores.

Tabla F.2 Longitudes de desarrollo básicas en *cm* para barras en tracción y compresión ACI-318-08

Barra #	Diámetro pulg.	Diámetro (D_b) cm	Perímetro cm	Área cm ²	Peso kg/m	Tracción recta f'_c (kg/cm ²)					Compresión f'_c (kg/cm ²)				
						210	250	280	310	350	210	250	280	310	350
						44 D_b	40 D_b	38 D_b	36 D_b	34 D_b	22 D_b	20 D_b	19 D_b	18 D_b	18 D_b
3	3/8"	0.95	3.0	0.713	0.559	42	38	36	34	32	21	19	18	17	17
4	1/2"	1.27	4.0	1.267	0.994	56	51	48	46	43	28	25	24	23	23
5	5/8"	1.59	5.0	1.979	1.554	70	64	60	57	54	35	32	30	29	29
6	3/4"	1.91	6.0	2.850	2.237	84	77	72	69	65	41	38	36	34	34
7	7/8"	2.22	7.0	3.879	3.045	98	89	85	80	76	48	44	42	40	40
8	1"	2.54	8.0	5.067	3.978	112	102	97	92	86	55	51	48	46	46
9	1 1/4"	2.86	9.0	6.413	5.034	125	115	109	103	97	62	57	54	52	52
10	1 1/2"	3.18	10.0	7.917	6.215	139	128	121	115	108	69	63	60	57	57
11	1 3/8"	3.49	11.0	9.580	7.520	191	175	165	157	148	76	70	66	63	63

Tabla F.3 Longitudes de desarrollo básicas en *cm* para barras con ganchos ACI-318-08

Barra #	Diámetro (D_b) pulg.	Diámetro cm	Perímetro cm	Área cm ²	Peso kg/m	Gancho f'_c (kg/cm ²)				
						210	250	280	310	350
						22 D_b	20 D_b	19 D_b	18 D_b	17 D_b
3	3/8"	0.95	3.0	0.713	0.559	21	19	18	17	16
4	1/2"	1.27	4.0	1.267	0.994	28	25	24	23	21
5	5/8"	1.59	5.0	1.979	1.554	35	32	30	28	27
6	3/4"	1.91	6.0	2.850	2.237	41	38	36	34	32
7	7/8"	2.22	7.0	3.879	3.045	48	44	42	40	37
8	1"	2.54	8.0	5.067	3.978	55	51	48	45	43
9	1 1/4"	2.86	9.0	6.413	5.034	62	57	54	51	48
10	1 1/2"	3.18	10.0	7.917	6.215	69	63	60	57	53
11	1 3/8"	3.49	11.0	9.580	7.520	76	70	66	62	59



DIMENSIONES

ancho mínimo: $b_{\min} = 90\text{ cm}$

huellas $25 \text{ a } 32 = b$

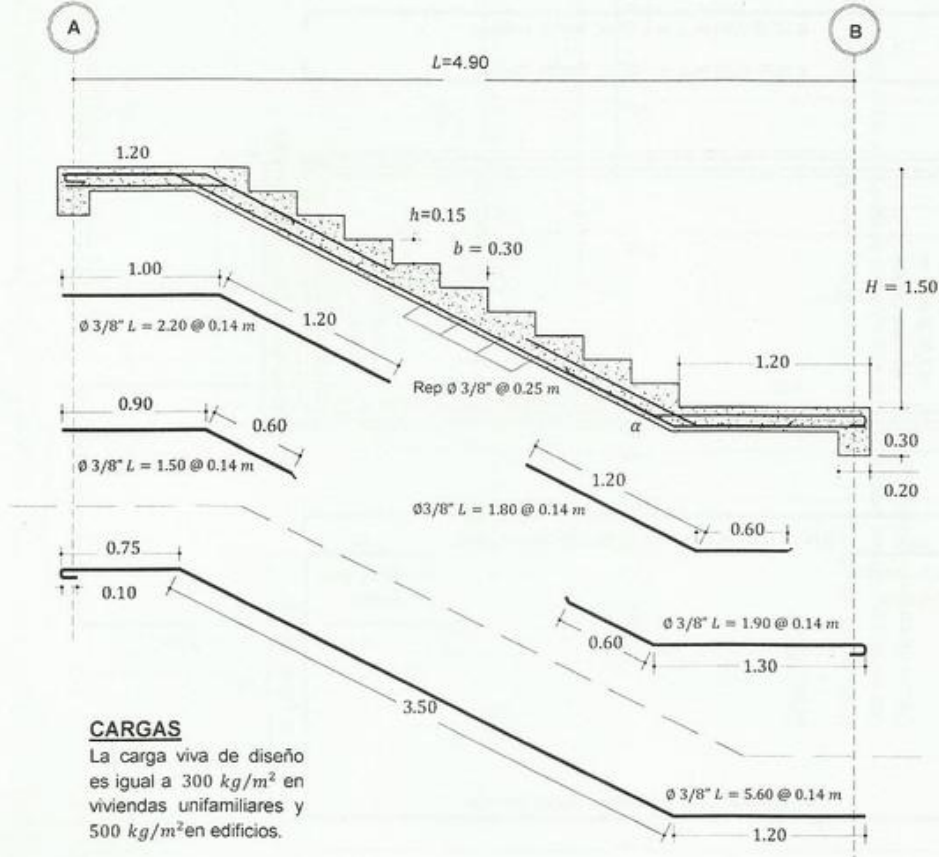
contrahuellas ... $15 \text{ a } 18 = h$

$2 \cdot h + b \geq 60\text{ cm}$

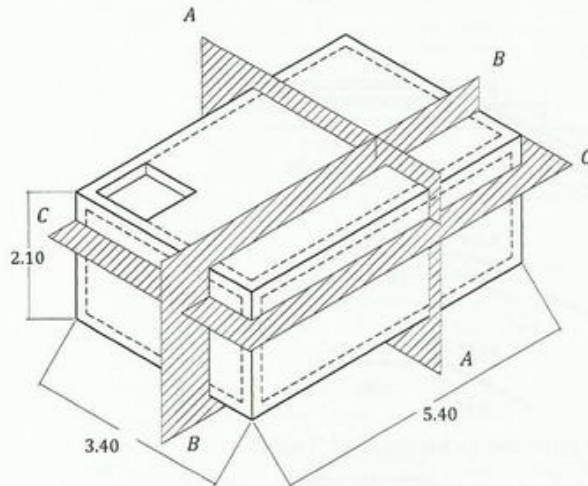
$H = \text{desnivel entre pisos}$

Número de contrahuellas = H/h

Número de huellas = $\frac{H}{h} - 1$



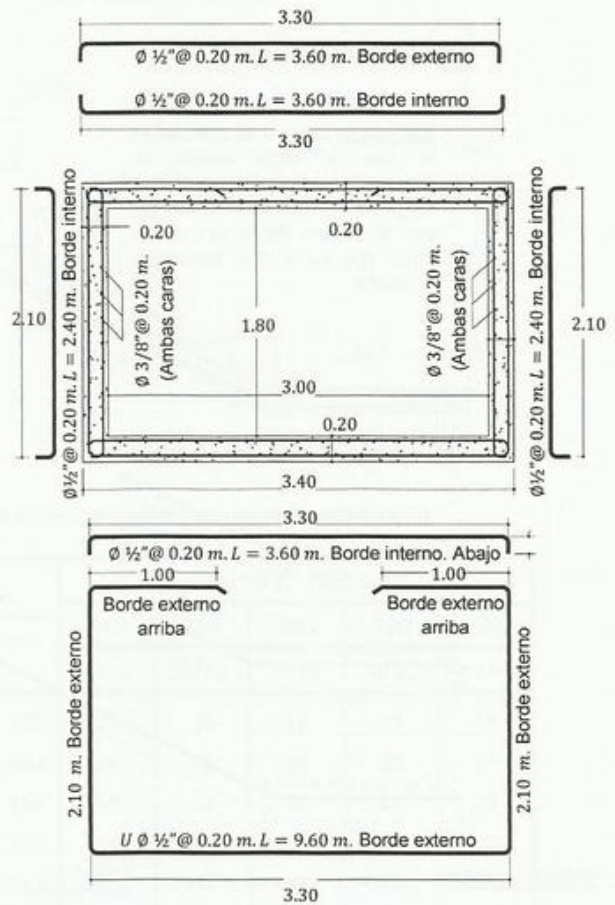
TANQUE DE AGUA Capacidad 22500 lts



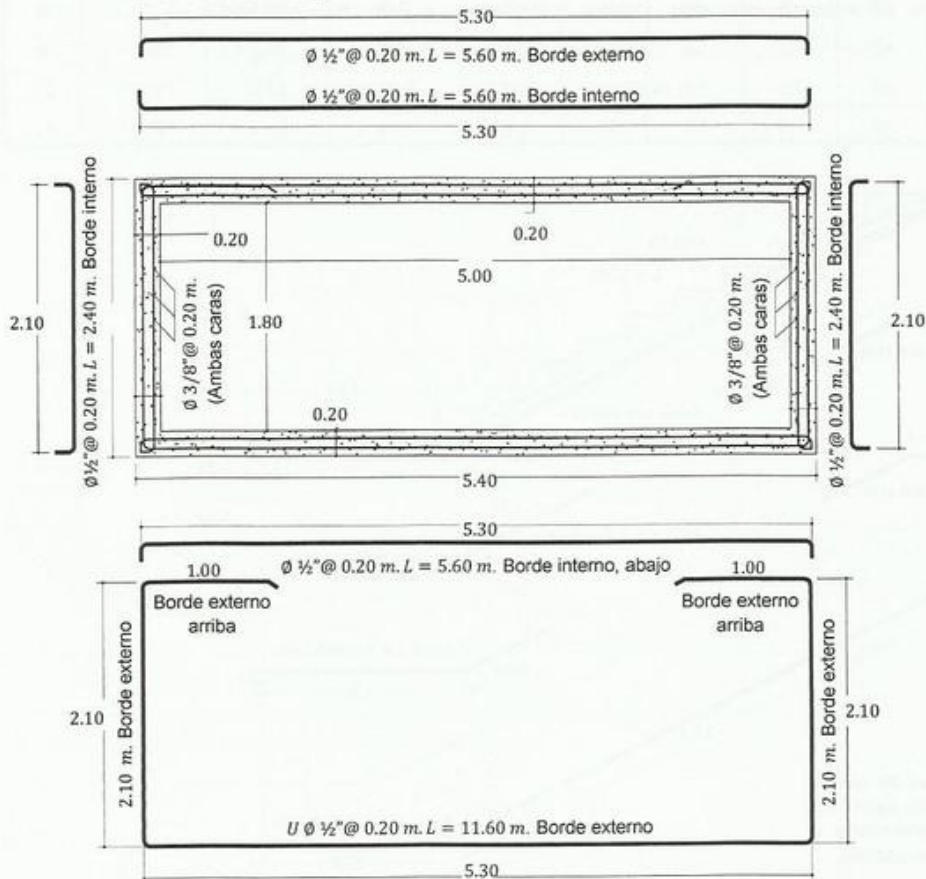
La tapa del tanque es para sostener al tanque hidroneumático

Capacidad requerida por incendio: 12000 lts
La tubería matriz debe ser de al menos 1 1/2"

SECCION A-A

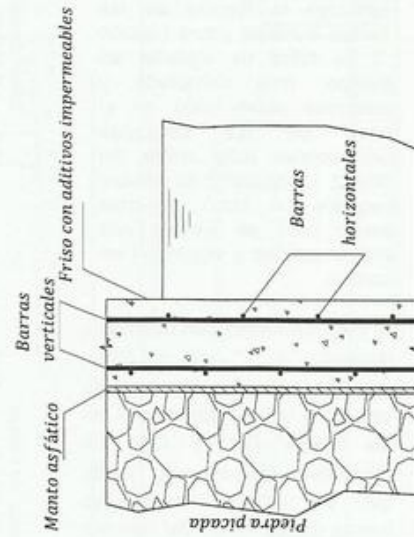
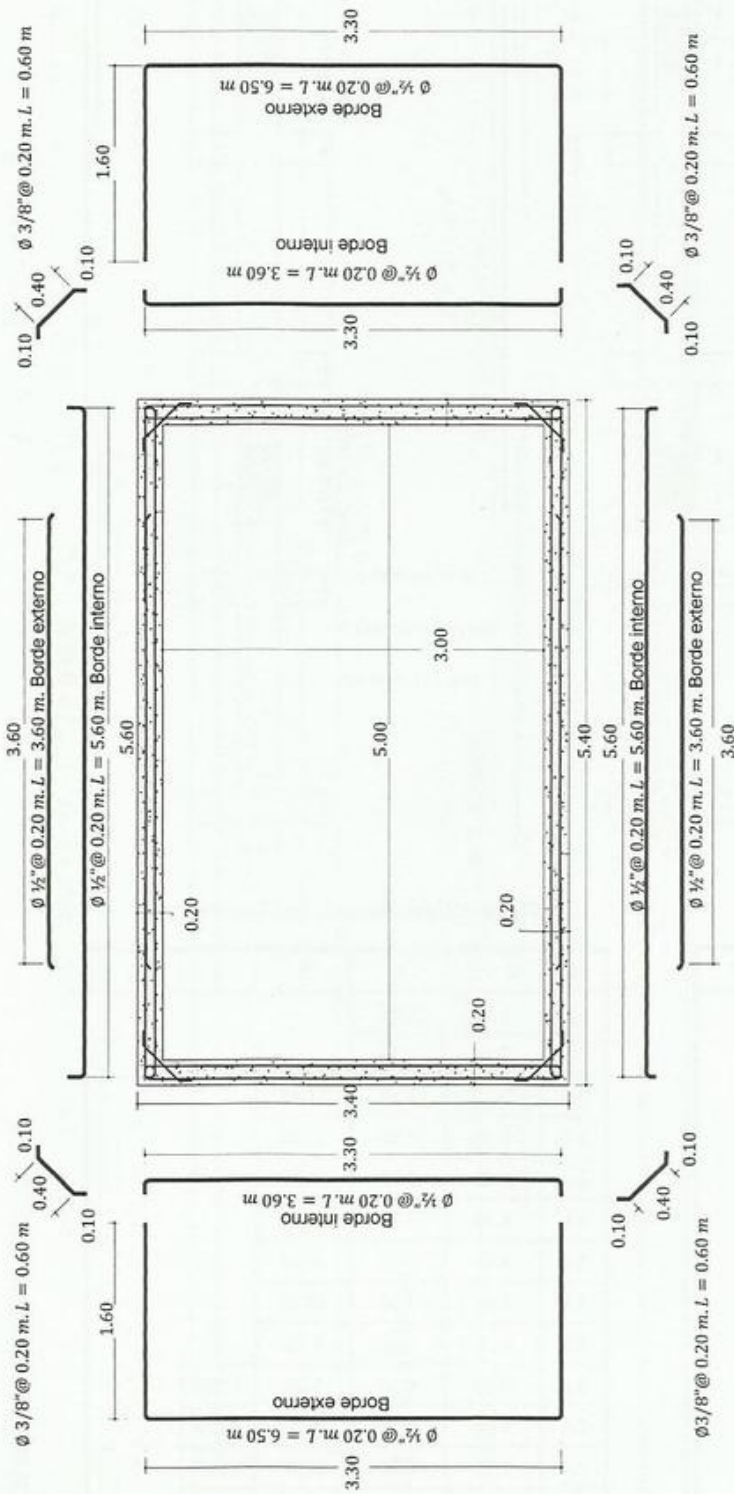


SECCION B-B



APÉNDICE G

SECCION C-C



CÁLCULO

Cada pared del tanque se calculará como una losa armada en dos direcciones, con los cuatro bordes continuos. Los empujes por el suelo y el agua los mayoraremos por 1.60. Casos de carga a considerar,

- Tanque vacío + empuje activo del suelo
- Tanque lleno (Carga hidrostática) + Tanque hidroneumático lleno (sin empuje activo del suelo).
- Tanque lleno + Tanque hidroneumático lleno + Empuje activo del suelo.
- Tanque vacío + Tanque hidroneumático lleno + Empuje activo del suelo.

SOLAPES EN COLUMNAS → **Opción 1**

Nota: La cantidad de acero principal en la opción 1 es menor que en la 2. Sin embargo la fijación de las barras a media altura (opción 1) es difícil de ejecutar en campo, muy demorada y peligrosa sobre todo en el caso de las columnas perimetrales más arriba del piso 2. La opción 2 en cambio requiere un tanto de más acero pero se ejecuta con mayor rapidez y seguridad en campo.

Si se usan barras con diámetros menores a 1" → $L_d \leq 1.00$ m, $f'_c \geq 250$ kg/cm² y la altura de viga $h_v \geq 40$ cm, tendríamos en las tablas G.1 y G.2 los diferentes valores de l_b a los que es necesario cortar las barras dependiendo del número de pisos N a cubrir con una barra. Es difícil cubrir más de dos pisos con diámetros de 5/8" pues las barras son muy flexibles y tienden a doblarse.

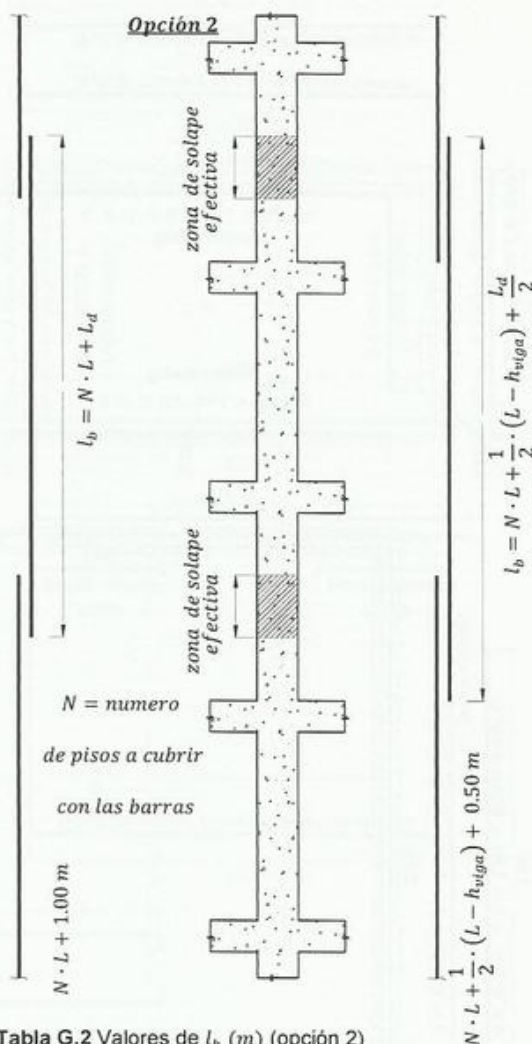
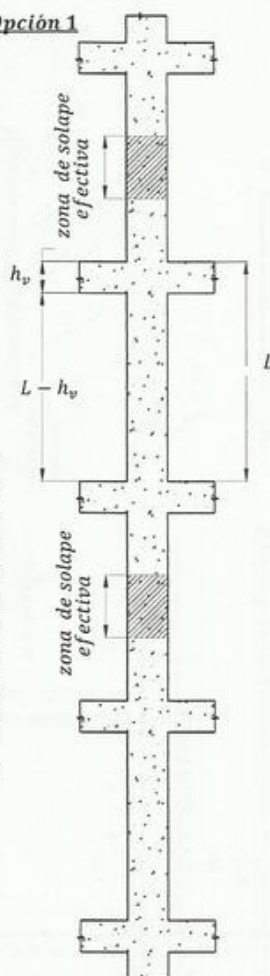


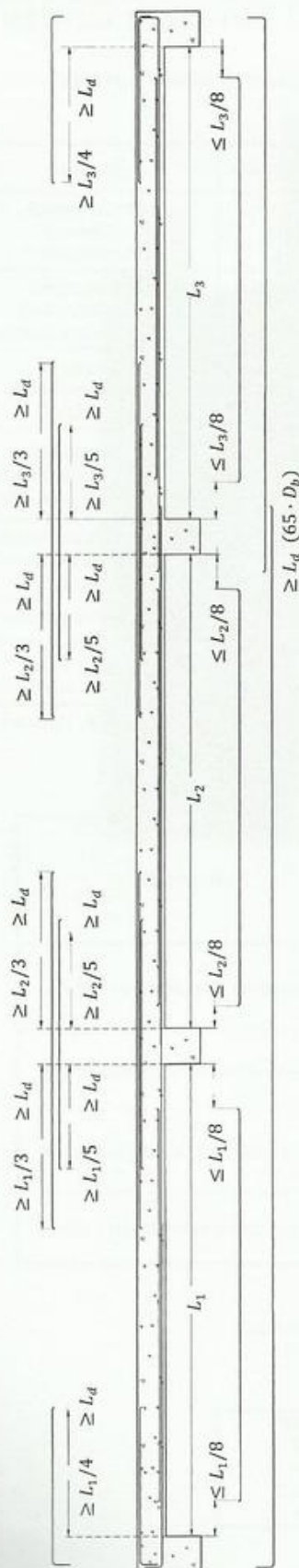
Tabla G.1 Valores de l_b (m) (opción 1)

L	N = 1	2	3	4	5
3.5	4.50	8.00	11.50		
3.4	4.40	7.80	11.20		
3.3	4.30	7.60	10.90		
3.2	4.20	7.40	10.60		
3.1	4.10	7.20	10.30		
3.0	4.00	7.00	10.00		
2.9	3.90	6.80	9.70		
2.8	3.80	6.60	9.40		
2.7	3.70	6.40	9.10	11.80	
2.6	3.60	6.20	8.80	11.40	
2.5	3.50	6.00	8.50	11.00	
2.4	3.40	5.80	8.20	10.60	
2.3	3.30	5.60	7.90	10.20	
2.2	3.20	5.40	7.60	9.80	12.00
2.1	3.10	5.20	7.30	9.40	11.50

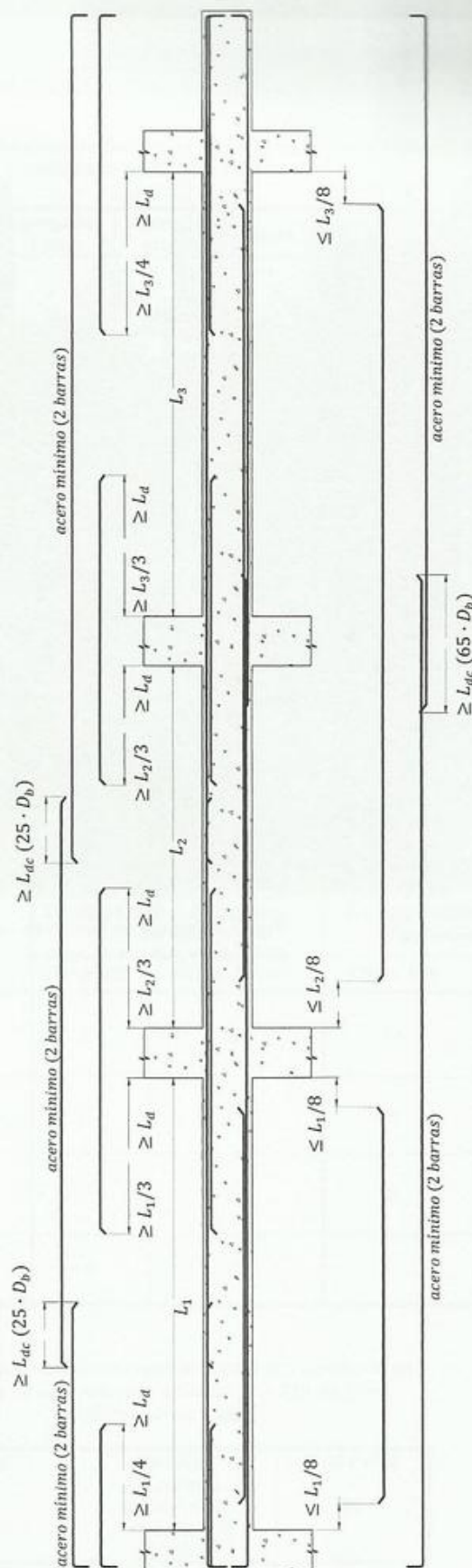
Tabla G.2 Valores de l_b (m) (opción 2)

L	N = 1	2	3	4	5
3.5	5.55	9.05			
3.4	5.40	8.80			
3.3	5.25	8.55	11.85		
3.2	5.10	8.30	11.50		
3.1	4.95	8.05	11.15		
3.0	4.80	7.80	10.80		
2.9	4.65	7.55	10.45		
2.8	4.50	7.30	10.10		
2.7	4.35	7.05	9.75		
2.6	4.20	6.80	9.40	12.00	
2.5	4.05	6.55	9.05	11.55	
2.4	3.90	6.30	8.70	11.10	
2.3	3.75	6.05	8.35	10.65	
2.2	3.60	5.80	8.00	10.20	
2.1	3.45	5.55	7.65	9.75	11.85

DESPIECE TIPO DE UN NERVIO EN UNA LOSA

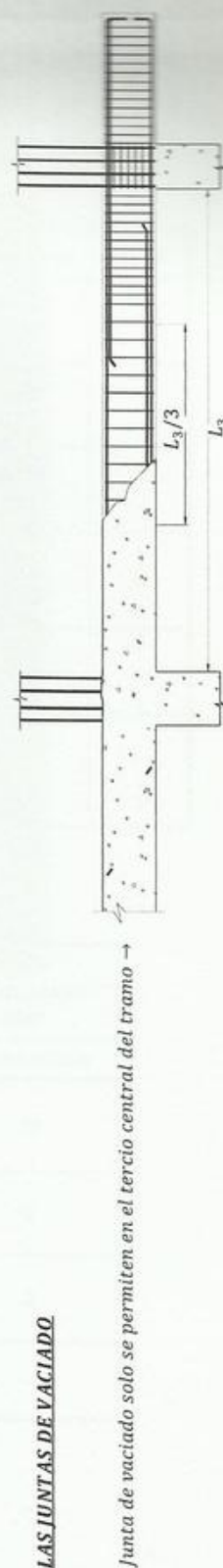


DESPIECE TIPO DE UNA VIGA



Nota: los coeficientes para el cálculo de los momentos de diseño por cargas de gravedad para vigas y losas se presentan en la Figura 12.6

UBICACION DE LAS JUNTAS DE VACIADO



Junta de vaciado solo se permiten en el tercio central del tramo

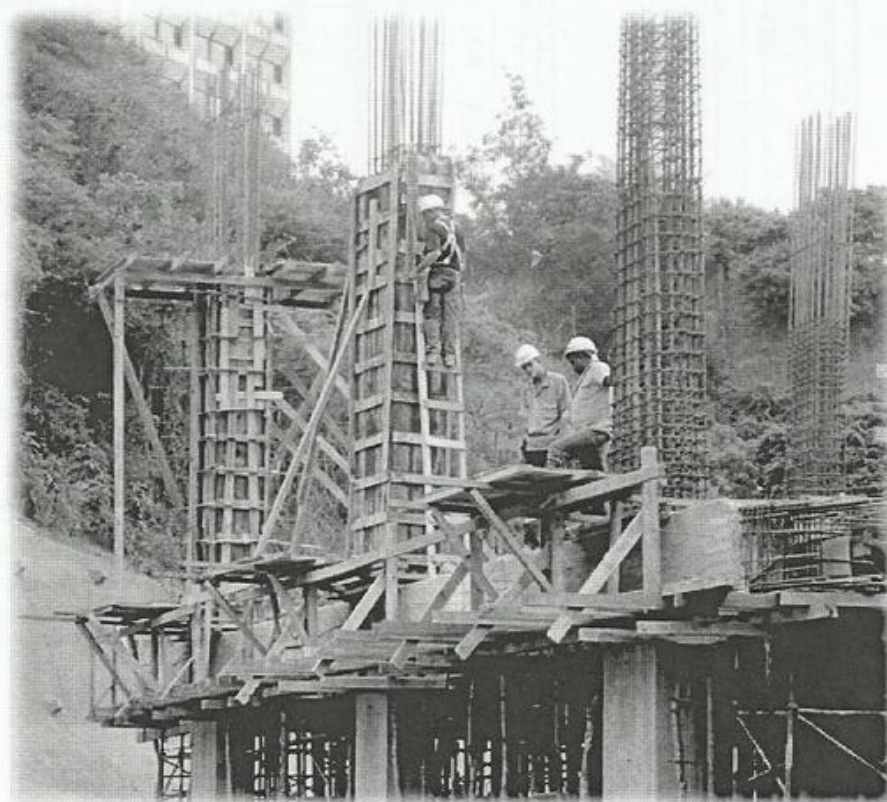


Fig. G.1 Vaciado de Columnas
Cortesía de Pablo A. Fargier G.

APÉNDICE H

DOSIFICACIONES DEL CONCRETO, TIEMPOS DE CURADO Y DESENCOFRADO

Tabla H.1 Efectos en la calidad del concreto debidos al aumento de un solo componente de la mezcla.
Adaptado de ACI-IPS1-2002

Atributo	Cemento	Agregado Fino	Agregado grueso	Agua	Aire Incorporado	Mezclado	Edad
Asentamiento	-	-	+	+	+	+	
Cohesión	+	+	-	-	+	+	
Trabajabilidad	+	+	-	+	+	+	
Segregación	-	-	+	+	-	-	
Sedimentación	-	+	-	+	-	-	
Consolidación húmeda	-	+	-	+	-	-	
Exudación	-	-	+	+	-	-	
Aire incorporado	-	+	-	+	+	+	-
Durabilidad	+	-	+	-	+	+	
Resistencia	+	-	+	-	-	+	+
Módulo de elasticidad	+	-	+	-	-	+	+
Resist. al congelamiento	+	-	+	-	+	+	-
Resistencia al desgaste	+	-	+	-	+	+	+
Resistencia química	+	-	+	-	+	+	+
Permeabilidad	-	+	-	+	-	-	-
Expansión húmeda	+	-	-	-	+	-	
Retracción de fraguado	+	-	-	-	+	-	-
Densidad	+	-	+	-	-	+	-
Acabado superficial	+	+	-	-	+	+	

Fuente: A.C.I-IPS1-2002

Tabla H.2 Tiempo de curado. Adaptado de ACI-IPS1-2002

Elemento	Tiempo mínimo de curado, en días		Tiempo mínimo para retirar encofrados, en días	
	Clima frío	Clima cálido	Clima frío	Clima cálido
Losas y vigas auto portantes	7	10	14	10
Muros hasta de 20 cm de espesor	7	7	4	3
Muros delgados, columnas y pilas	7	7	3	2
Pisos y pavimentos sobre el suelo	4	7	-	-

Tabla H.3 Dosificación de materiales para la preparación de la mezcla de concreto para alcanzar $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$ en un trompo de 1 saco

Material	Cantidad	# de Palas
Arena	2.5 cuñetes	16
Piedra	3.5 cuñetes	20
Cemento	1 saco 42.5 kg	-
Agua	1.5 cuñete	-

Nota: Cuñete de 18 Litros



Fig. H.1 Apuntalamiento de losas y vigas
Cortesía de Pablo A. Fargier G.

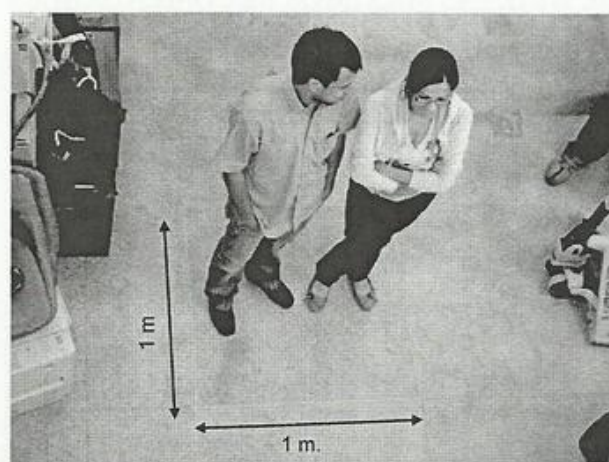
SOBRECARGAS USUALES Y ANCHOS DE GRIETAS MÁXIMOS RECOMENDABLES

Tabla I.1 Sobrecargas (ver COVENIN Mindur 2002-88)

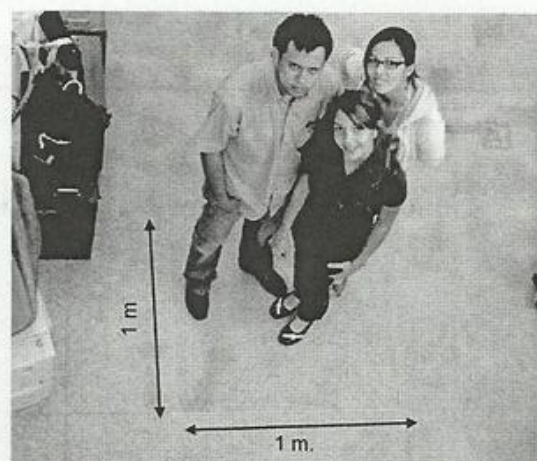
<i>Tipo</i>	<i>Área</i>	<i>Carga (kg/m²)</i>
Viviendas	Balcones >1.20m	300
	Lo Demás	175
Construcciones Educativas		300
Hospitales	Cuartos	175
	Salas de Operación	250
	Áreas de Circulación	300
	Morgue	600
Oficinas	Oficina	250
	Áreas de Circulación	300
Hoteles	Habitaciones	175
	Áreas de Circulación	300
Bibliotecas	Sala de lectura	300
	Estanterías por cada m. de altura	250
	Estanterías mínima carga	700
	Estanterías sobre rieles	1100
Construcciones Deportivas	Tribunas, Graderías	500
	Vestuarios, Sanitarios	175
Azoteas	Sin Acceso	100
	Con Acceso	--
Techos Inclinados		≥ 50
Escaleras	Viviendas Unifamiliares	300
	Edificios	500
Tabiquería con Friso Bloques: Arcilla/Concreto	<i>e</i> = 10 cm	180/210
	<i>e</i> = 15 cm	230/270
	<i>e</i> = 20 cm	280/330

Tabla I.2 Condiciones de exposición vs. ancho máximo de grieta recomendados

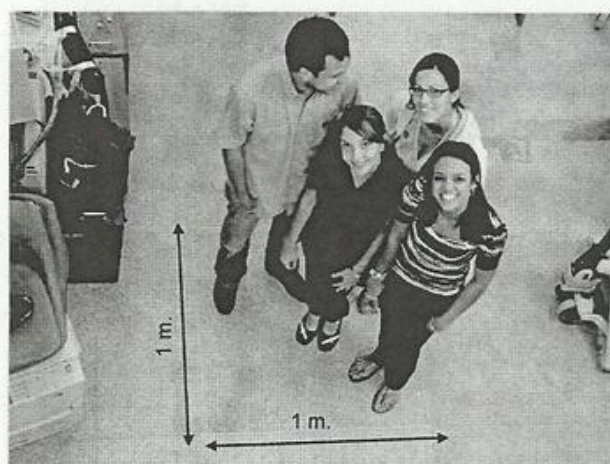
Condiciones de Exposición	Ancho de Grieta (mm)
Ambientes Secos	0.40
Ambientes Húmedos	0.30
Ambientes Marinos	0.15
Tanques y piscinas	0.10



142 kg/m²



195 kg/m²



259 kg/m²



376 kg/m²



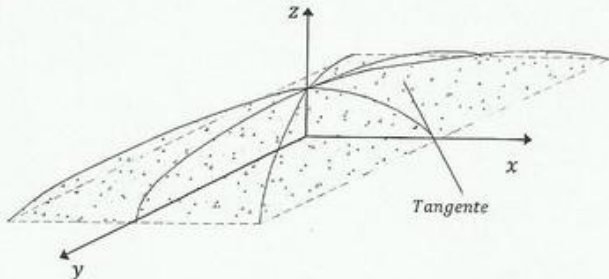
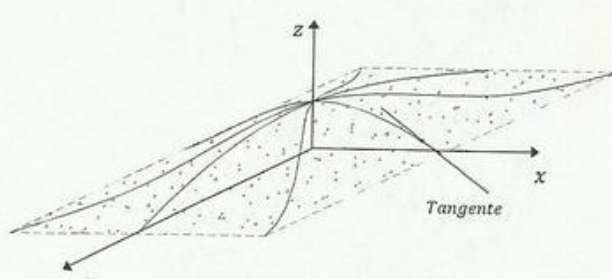
585 kg/m²



650 kg/m²

Fig. I.1 Ejemplos de intensidades de carga viva. Adaptado de Nowak y Collins (2000)

FE DE ERRATAS. 18 DE OCTUBRE DEL 2010

Página	Donde dice:	Debe decir:
5	β_d Varía de acuerdo a las características...	C varía de acuerdo a las características...
8	Aparto de anclaje para un torón	Aparato de anclaje para un torón
16	A la izquierda de la (Figura 2.13) se indican los...	A la izquierda de la Figura 2.13 se indican los...
71, 72	$\rho_{min} = m \cdot [1 - \sqrt{0.40 \cdot q/g^2}]$	$\rho_{min} = m \cdot [1 - \sqrt{1 - 0.40 \cdot q/g^2}]$
114	Como complemento se harán los cálculos con...	Como complemento se harán los cálculos con...
141	En este caso la combinación las fuerzas laterales...	En este caso la combinación de las fuerzas laterales...
152	Lo contrario ocurre si (ρ) es grande con la gan.	Lo contrario ocurre si ρ es grande.
155	Investigaciones recientes indican...	Investigaciones recientes indican ...
165	La reacción del suelo sobre el terreno...	La reacción del suelo sobre la zapata...
172	$P_{u\text{exc } y} = P_u + P_{u\text{ sismo-eje } y} \rightarrow \text{flexión sobre eje } y$	$P_{u\text{exc } y} = P_u + P_{u\text{ sismo-eje } y} \rightarrow \text{flexión sobre eje } x$
175	...de corte en vigas compuestas (Ver ejemplo 15.6).	...de corte en vigas compuestas (ver ejemplo 15.6).
176	Bass, Carrasquillo, Jirsa (1989) Realizaron...	Bass, Carrasquillo y Jirsa (1989), realizaron...
209	ue	que
211, 213	$\bar{P}_u = 250 \text{ ton}$	$P_u = 250 \text{ ton}$
272	arranque de la pantalla para...	En el arranque de la pantalla para...
201	Si $T_u \geq T_{th}$ El miembro requerirá armadura por Torsión...	Si $T_u \geq T_{th}$ el miembro requerirá armadura por torsión...
304	(Adaptado de Naaman, 2004)	(Adaptado de Naaman, 2004)
306	a) Se requiere una fuerza igual un mayor a 252.94 ton	a) Se requiere una fuerza igual o mayor a 252.94 ton
313	...en lugar de articulaciones. (ver Ejemplo 16.5).	...en lugar de articulaciones. (Ver Ejemplo 16.6).
321	...chequeos establecidos en la Sección 16.2.	...chequeos establecidos en la Sección 16a, (página 313).
343	$\phi = x/\epsilon_{cm}$	$\phi = \epsilon_{cm}/x$
348	El incremento de f'_c tiene mayor impacto el comportamiento...	El incremento de f'_c tiene mayor impacto en el comportamiento...
350	"Time Dependent Deflections Reinforced Concrete Beams"	"Time Dependent Deflections of Reinforced Concrete Beams"
195	 <p>Fig. 10.5. Analogía de la membrana. Sección rectangular</p>	 <p>Fig. 10.5. Analogía de la membrana. Sección rectangular (corregida)</p> <p>Nota: como los esfuerzos cortantes por torsión en las esquinas son cero, también lo serán las pendientes de la recta tangente a la membrana. (Ver página 191)</p>